





ELEMENTOS DE ALGEBRA



ELEMENTOS DE ALGEBRA

OU

CALCULO DAS FUNCCOES DIRECTAS

POB

Alfredo Candido de Moraes Rego

E

Antonio Gabriel de Moraes Rego

(Ex-Guardas-Marinhas)

ENGENHEIROS MILITARES

Subordonnée à la Morale, la Logique doit être systématiquement réduite aux spéculations qu' exige la préparation normale de la science finale, à laquelle il faut réserver l'élaboration décisive de toutes les conceptions, tant pour la méthode qu' envers la doctrine.

A. COMTE.



RIO DE JANEIRO

EDICTOR — J. J. DE SOUSA PEIXOTO

93 RUA DE S. JOSE' 93

—
1885

~~~~~  
Typ. Esperança—Rua de S. José 14.  
~~~~~


OBSERVAÇÃO

La culture isolée de l'algebre suscite, entre la methode et la doctrine une séparation aussi vicieuse que celle qui fut consacrée par le régime metaphysique.

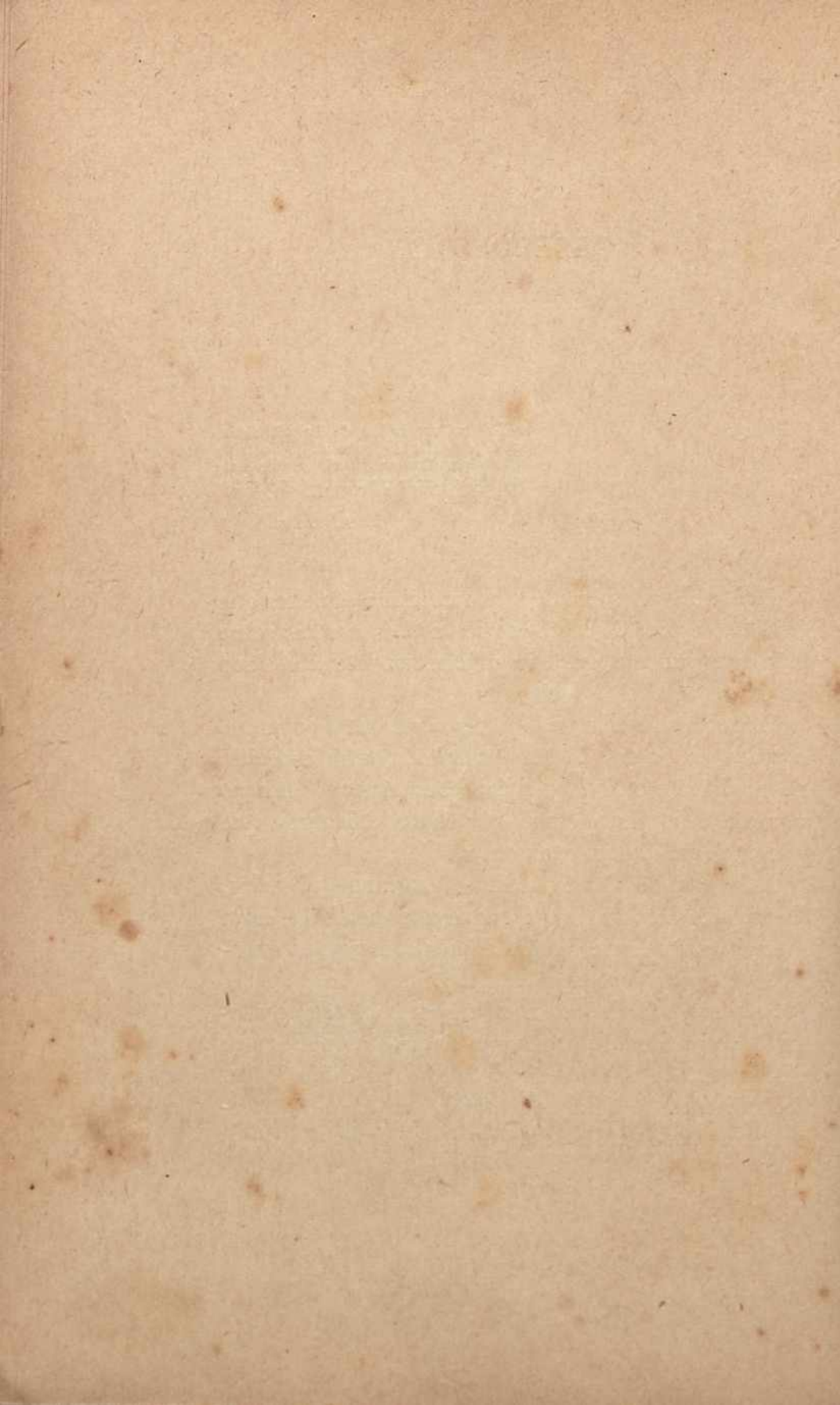
A. COMTE.

Esta obra é destinada a proporcionar áquelles que inicião o estudo da mathematica noções exactas sobre este dominio, em geral insufficientemente apreciado pelos compendios especiaes.

Ella comprehende duas partes: uma geral commum a todos os ramos da mathematica, outra especial, na qual fica o calculo das funcções directas limitado ao necessario para o estudo dos ramos cõcretos, que constitue sua destinação normal.

As obras de Comte, Laffite, Lagrange, Cauchy, Bertrand e Lacroix, foram as que mais nos forneceram materiaes, e se nem sempre as mencionamos na exposição é para não accumular citações.

Se o nosso trabalho traz alguma vantagem sensivel ao problema do ensino, o dirão aquelles que diariamente se achão em lucta com as difficuldades provenientes da falta de methodo que em geral apresentam os compendios actualmente aceitos.



THEORIA ELEMENTAR DA ABSTRACÇÃO

Antes de encetar o estudo da mathematica convem mostrar o modo por que o espirito humano chega a obter os elementos de que ella dispõe e a elaborar as relações que a constituem. Esta marcha tem a vantagem de deixar bem clara a ligação intima, a subordinação necessaria de nossas concepções para com a realidade objectiva d'onde ellas emanam; previne as divagações abstractas, e apresenta um meio valioso de poder-se esclarecer certos factos cuja interpretação no dominio abstracto tem se prestado ás argumentações subtis da decahida metaphysica.

Observar o mundo, colher as noções necessarias, elaborar as relações que as ligam tal é em resumo o trabalho que realisa nosso cerebro para constituir uma theoria.

Ha portanto em toda constituição scientifica dois factos distinctos.— 1º, a idéa ou noção de cada elemento separadamente considerado; 2º, o modo de relação que deve ligar esses elementos para constituir um typo que explique com a necessaria aproximação o facto observado.

Os processos por que o cerebro chega a obter esses elementos, e os que emprega para elaborar as relações correspondentes constituem de um modo geral a theoria da abstracção cuja apreciação elementar nós passamos a expôr.

Esta exposição tem tambem a vantagem de fazer desaparecer a noção de verdade absoluta com que quasi geralmente se costuma a considerar as verdades scientificas, cujo character relativo scientificamente não é possivel desconhecer.

N'esta theoria nós distinguiremos duas partes : a instituição da abstracção e o seu papel normal e systematico no conjuncto da existencia humana.

A instituição da abstracção comprehende :

- 1.º A theoria statica, na qual estuda-se o modo por que o trabalho cerebral effectua a abstracção ;
- 2.º Theoria dinamica, que estuda o desenvolvimento da abstracção — applicação do methodo subjectivo á direcção da abstracção

I

Os seres que nós observamos se nos apresentam simultaneamente ao espirito por intermedio d'aquelles dos nossos sentidos que por elles podem ser impressionados.

Consideremos, por exemplo, differentes esphas de metaes diversos. Estes corpos nos apresentam as qualidades que possuem de côr, peso, som, densidade, elasticidade, dureza, etc. Se nós abstrahirmos de todas estas qualidades para só considerar a fórma, seremos levados a concluir de que ha uma fórma

commum a todos elles, e uma vez obtida esta noção independente dos corpos em que a observamos, nós podemos estudal-a em suas propriedades características e por tal modo que em qualquer parte que existam objectos esphericos possamos reconhecer esta fórma independente de toda outra propriedade qualquer.

A consideração, pois, da fórma isolada de todos os outros phenomenos que a acompanhavam, nos levou a idéa geral de *fórma espherica*, permittindo-nos construir um typo puramente ideal, inteiramente abstracto, de uma existencia essencialmente subjectiva, tal como a esphera que estudamos em geometria. Estas ideias geraes, estes typos abstractos, obtidos pela faculdade que tem nossa organização cerebral, de poder considerar as propriedades dos seres d'elles isoladas e cada uma de per si, convenientemente combinadas pelo trabalho cerebral, formam todos as nossas construcções abstractas, nas quaes se resume o nosso mais precioso cabedal scientifico.

Tal é o facto caracteristico da operação da abstracção. E' pela abstracção que nós chegamos a exprimir mais primorosamente os nossos pensamentos.

O facto de poder-mos considerar as propriedades quaesquer dos corpos, as suas qualidades d'elles isoladas e generalisar as noções correspondentes a outros seres que apresentam caracteres semelhantes ou identicos, traduzindo essas propriedades pela palavra destinada a representar o sêr que a possui, tem sido sempre um recurso inexgotavel de que os poetas tiram as suas mais esplendidas comparações e suas imagens mais delicadas.

Citemos um exemplo :

A bocca de rubis, cheia de perlas
Das crystalinas mãos a neve pura ?

CAMÕES.

Considerada a comparação que traduzem estes versos de Camões, pelo lado objectivo, o disparate é insupportavel. Realmente, com uma bocca de rubis, cheia de perolas e umas mãos feitas de neve, não se comprehende que possa haver um sêr humano.

Mas se notarmos que a palavra *rubi* está alli traduzindo simplesmente a côr avermelhada de uma pedra preciosa que ella representa ; que a palavra perola, traduz simplesmente a côr branca de prata commum ás perolas, e finalmente que a palavra neve, alli traduz simplesmente a brancura da neve e não o corpo em si, nós veremos immediatamente que o poeta nada mais fez do que abstrahir de todas as propriedades do rubi, para só considerar a côr a que elle compara os labios vermelhos de sua amante ; abstrahir de todas as propriedades da perola e só considerar a côr á que elle compara os seus alvos dentes e finalmente a brancura delicada de suas mãos elle compara á côr da neve pura.

Exemplos como este podiamos citar por milhares, e tirados dos primeiros poetas. Entre nós incontestavelmente G. Dias é quem apresenta mais delicadeza sobre este ponto. Em suas poesias é notavel a facilidade e extrema variedade por que elle generalisa e compara as propriedades de um ser em relação a outro.

A abstracção permittindo-nos separar dos corpos observados as qualidades que elles possuem, nos pro-

porciona meios de podermos construir typos abstractos dotados de elevado gráo de perfeição, verdadeiros modelos dos quaes tudo devemos fazer para nos aproximar.

A educação, a instrucção e os bons exemplos, têm por fim principal fazer com que cada individuo se aproxime moral e intellectualmente de um typo abstracto do homem, que a abservação nos leva a construir mentalmente como devendo ser aquelle que deviamos ter para que a existencia em sociedade fosse a mais feliz possivel.

Despindo por bem dizer os corpos das propriedades que o constituem, a abstracção nos permite poder estudal-as separadamente uma das outras, combinal-as e por esta fôrma construir esses typos ideaes cuja noção nós traduzimos pelos nomes de Familia, Patria, Humanidade, etc.

Os homens não são todos iguaes, mas-todos apresentam certas propriedades communs, como a intelligencia, o sentimento, a actividade, uma certa organização, que estudadas e consideradas em si e combinadas em nosso cerebro nos fornecem o typo abstracto do homem que se escuda em physiologia. Entre o homem, os animaes e os vegetaes ha propriedades communs como a nutrição, o crescimento que, consideradas abstrahindo de todas as outras que concorrem para formular a differença entre esses corpos, nos fornecem a noção abstracta que nós traduzimos pela palavra *vida* e o typo que nós denominamos *ser vivente*.

A abstracção, pois, determina sempre uma generalisação; exige a apreciação de muitos seres nos quaes se manifeste a propriedade considerada, de

modo que possa ser formulada completamente a noção correspondente.

Estas simples considerações mostram-nos desde já que os diferentes typos abstractos adquiridos por nosso espirito não foram elaborados na mesma época, pois que os phenomenos cuja apreciação devia permittir a sua construcção foram tambem estudados em épocas muito differentes. Assim, pois, o typo abstracto do homem só pôde ser diffinitivamente construido, quando os factos vitaes, intellectuaes e moraes foram sufficientemente apreciados; o typo abstracto da Patria só pôde ser scientificamente elaborado com a instituição diffinitiva da sociologia.

Antes d'isto o homem chegou mesmo a ser comparado a uma machina, e a patria não passava de uma phantasia, embora a sua extencia real fosse conhecida por todos os corações a ella devotados.

A proporção, porém, que os seres foram melhor observados, que a mentalidade foi se desenvolvendo, a abstracção tornou-se mais precisa, a elaboração mais exacta, e os typos abstractos subordinando-se com rigor as verdades observadas tornaram-se verdadeiramente scientificos.

Esta elaboração abstracta, puramente intellectual, essencialmente destinada á explicação do mundo e do homem, traduzida por meio de signaes apropriados pôde ser transmittida por aquelles que a realisaram a outros, com os quaes conveyiam, consolidando-se assim a solidariedade e continuidade do conjuncto humano e estreitando-se as relações mutuas indispensaveis ao seu desenvolvimento normal.

Em toda construcção abstracta é necessario distinguir-se duas sortes de elementos: as propriedades ab-

stractas que o trabalho cerebral separa da observação de muitos corpos a que ellas são communs, taes como: o peso, a côr, a dureza, o cheiro, etc., e as relações abstractas, que resultam da comparação das propriedades abstractas da mesma ou de differente natureza, como, por exemplo, a relação entre o espaço percorrido por um corpo que cai, e o tempo gasto em percorrel-o, a relação entre o volume do gaz e a pressão que elle supporta.

As propriedades abstractas, facilmente comprehendese, são muito mais simples de determinar que as relações abstractas. Tambem, emquanto aquellas datão da mais remota antiguidade, estas só começaram a ser scientificamente elaboradas com o immortal theorema de Thalès. Este accrescimo de difficuldade de uma a outra phase da elaboração abstracta, nos é facilmente compensado pela maior importancia dos resultados correspondentes, os quaes nos permitem attingir o verdadeiro fim de todas as nossas indagações scientificas—a previsão.

Ouçamos o Sr. Laffitte :

« As propriedades abstractas constituem esta massa de idéas communs sem as quaes não podem existir relações um pouco extensas entre os homens ; ellas fornecem os materiaes e uma base á construcção das relações abstractas e nada mais. O papel, porém, das relações abstractas, tem uma outra importancia.

Pela estreita dependencia que ellas estabelecem entre dois phenomenos da mesma ou de differente natureza, a descoberta de uma relação abstracta nos permite prever e modificar um d'entre elles. Se, por exemplo, nós chegamos a conhecer a relação entre a circumferencia e o raio, torna-se facil determinar qual

a circumferencia para um raio dado ou reciprocamente, qual deverá ser o raio para uma circumferencia dada. Toda a industria moderna sendo baseada sobre este conhecimento torna-se desnecessario demonstrar a utilidade das relações abstractas. Concebe-se tambem que as previsões que ellas permitem e a possibilidade de modificar que d'ahi resulta, serão tanto mais seguras quanto mais precisas tiverem sido as relações estabelecidas, ou por outra, quanto mais rigorozas forem as relações abstractas de uma certa ordem, tanto mais a arte correspondente a esta ordem será de uma cultura facil e menos illusoria. Ninguem poderá esperar do homem politico ou mesmo do medico que elle apresente na concepção e mais tarde na execução de seus planos o mesmo rigor que o mecanico e o chimico. »

As propriedades abstractas são facilmente creadas por nosso espirito, de modo que nós podemos sem difficuldade obter, combinando-as, os typos mais phantasticos e extravagantes, que julgarmos necessarios á satisfação de alguma exigencia de nossa existencia physica, moral ou intellectual.

Na obscuridade nós podemos observar este facto em nós mesmos com facilidade. Ouçamos um grande physiologista allemão :

« Estando-se na obscuridade figure-se um rosto ; elle não conserva por muito tempo as suas fórmãs, muda por assim dizer, a cada instante, por vezes com admiravel rapidez, e as configurações que d'ahi resultam não são d'aquellas que a alma teve conhecimento por intermedio dos sentidos mas novas combinações que excitam a surpresa. Os elementos destas figuras phantasticas são, é verdade, tirados

de ideias que nós recebemos por meio da experiência, mas as mudanças e combinações por que passam os elementos para dar lugar a novos productos realisa-se com plena liberdade. A imaginação traça no campo visual não esclarecido as linhas que lhe agradam, e como as formas dependem das linhas que as limitam, as quaes podem variar infinitamente, este modo de acção deve muitas vezes dar lugar a figuras que nunca tiveram existencia real. Uma imaginação menos viva se contentará em combinar as figuras anteriormente observadas: de unir, por exemplo, as azas do passaro ás espaduas do cavallo, ou uma cauda de peixe ao corpo de um quadrupede; a imaginação, porém, que goza de uma grande actividade não se limita a combinar assim as ideias já obtidas; ella quer ainda modificá-las, estendel-as e transformá-las. Quando Goethe, com os olhos fechados, figurava a si uma flôr, esta fórma, como elle mesmo contou-me, soffria mudanças as mais notaveis, desenvolvendo-se novas flores tendo outras fórmas, metamorphoseando-se assim em uma infinidade de figuras, todavia com certa regularidade e simetria.» (Muller, 2^o pg. 518).

Quanto a construcção que resulta da combinação das relações abstractas o facto é inteiramente outro; ella nos fornece uma traducção abstracta do mundo exterior aproximada, é verdade, porem sufficiente para nos permittir o conhecimento necessario á satisfação de nossas necessidades reaes, ella constitue o nosso cabedal scientifico, que nos proporciona conhecer desde o phenomeno mais simples do mundo inorganico até o facto mais complicado da existencia moral.

Uma vez conhecidas e demonstradas, as relações moraes se nos impoem ao espirito de modo a tornar inabalavel a adhesão ás crenças scientificas, e a permittir o estabelecimento de uma completa unidade em todos os cerebros. Um semelhante resultado seria muito mais simples e mais rapidamente obtido se as demonstrações não se fossem tornando mais complicadas e muito menos precisas á proporção que nós passamos de considerar os phenomenos mais geraes e mais simples para considerar phenomenos mais complicados e particulares do dominio moral.

As construcções abstractas, pois, compoem-se de dous elementos : as propriedades e as relações abstractas. Para realisal-as torna-se necessario ao cerebro satisfazer determinadas condições as quaes vamos ligeiramente estudar.

A abstracção é o resultado do concurso de todas as nossas faculdades intellectuaes mantidas em convergencia para um mesmo fim pela acção das outras regiões do cerebro— a região affectiva e a região pratica. Esta concepção scientifica mostra o quanto é errado pensar-se, como os metaphysicos, que a abstracção é uma faculdade distincta de nossa alma e sem séde alguma mental como são consideradas nesse systema philosophico todas as nossas outras faculdades.

O sentimento é nem só necessario para nos inspirar as nossas investigações, de que elle constitue o mais energico estimulante, como tambem nos serve de coordenador sempre que procuramos unificar todos os nossos conhecimentos. Sem a influencia do amor profundo por Catharina de Athayde, Camões, o poeta mais elevado, o mais sublime e mais digno realista

de Portugal, jámais teria produzido os immortaes monumentos poeticos que nos legou.

E' facto que cada um póde verificar em si mesmo, que quanto mais fraca é a estimulação moral em nossa alma, tanto menos disposta torna-se a intelligencia para o trabalho.

O trabalho intellectual é sempre realizado sob a inspiração do instincto de conservação: desde o instincto nutritivo até o maternal; dos instinctos altruistas, desde o apego até a nobre e elevada bondade ou sympathia universal, com assistencia dos instinctos de destruição, construcção e vaidade.

As qualidades de character são tambem indispensaveis aos trabalhos intellectuaes. Sem firmeza e sem perseverança nada póde ser realizado. Kepler e Lagrange, como observa Laffitte, foram tão ousados e perseverantes quanto Turenne e Cezar.

Mas emquanto estes pelas graves consequencias que podiam resultar de suas precipitações, eram prudentes, aquelles, como theoreticos, eram muito mais temerarios.

Qualquer elaboração abstracta, portanto, embora realisada pelo conjuncto intellectual, exige sempre um movel affectivo que a inspire e estimule a região mental, como tambem a satisfação de certas condições para o conjuncto da actividade, que tem de manter a persistencia, a constancia indispensavel a qualquer acquisição em que as difficuldades não possam ser facilmente vencidas.

« *Aguu molle em pedra dura tanto bate até que fura,* tal foi o proverbio com que a sabedoria vulgar, por um feliz contraste, que lhe inspirou a observação do

mundo, traduziu o poderoso effeito que traz a perseverança no trabalho.

Vejamos agora qual a natureza do conjuncto puramente intellectual, que convém para elaborar directamente as nossas construcções abstractas.

Antes, porém, de apreciar a região intellectual é necessario distinguirmos o *objectivo* do *subjectivo*, isto é, o que directamente refere-se ao objecto, do que é relativo ao sujeito e pura construcção do seu cerebro. Este dualismo só foi definitivamente formulado no seculo XVIII por Hume, embora já Aristoteles affirmasse a grande verdade de que tudo o que existe no cerebro provém de uma sensação exterior.

O mundo fornece ao nosso cerebro os materiaes para as suas construcções subjectivas, o excita, o alimenta e regula fornecendo as impressões necessarias ao seu exercicio e á suas emoções, e subordinando sua acção a uma ordem invariavel, que assiste ás suas creações destinadas a traduzil-as.. Como o estomago o cerebro realisa uma digestão de materiaes diferentes : o primeiro recebe como alimento corpos de naturezas diversas, elabora-os e com os productos resultantes vivifica todo o organismo ; o segundo recebe da contemplação do mundo exterior as mais variadas impressões que se transformam em ideias as mais diversas, as quaes por elle combinadas garantem a existencia e o desenvolvimento do grande organismo colectivo de que fazemos parte.

Hume, diz Laffitte, em seus *Essais sur l'entendement humain*, depois de haver definido o que elle entende por *impressão*, estabelece uma differença entre as *impressões* e as *ideias*, que para elle vem a ser o que nós, segundo a expressão de Aristoteles, chamamos

imagens ou *impressões* transformadas em signaes. Elle expõe como todas as nossas ideias quaesquer provém destas *imagens*, que nós combinamos, associamos e com as quaes entretemo-nos, por assim dizer, a contento de nossa phantasia : mostra como as consequencias as mais extraordinarias á primeira vista, as mais afastadas em apparencia da realidade, não são entretanto mais que ideias tomadas nesta realidade. « O poder creador da alma, diz elle, reduz-se ao de compor, remover, augmentar, diminuir os materiaes que lhe são fornecidos pelos sentidos e pela experiencia. Pensando em uma montanha de ouro nós não fazemos mais que unir duas ideias, que podem subsistir *juntamente* : a *ideia de ouro* e a *de montanha*. E mais adiante : « *em resumo, todos os materiaes de nossos pensamentos são tomados ou dos sentidos exteriores ou do sentimento interno; a função da alma consiste em fazer a combinação e a ligação.* »

Estas ideias foram mais desenvolvidas e com mais precisão pelo incomparavel Diderot Nós vamos transcrever uma parte de sua esplendida — *Lettre sur les aveugles* — por onde se póde avaliar de quantas noções ficamos privados desde que nos venha a faltar um dos nossos sentidos.

« Como, diz elle, de todas as demonstrações exteriores, que nos dispertam a commiseração e a ideia da dor, os cegos não são affectados senão pelo lamento, eu lhes supponho, em geral, deshumanidade. Que differença ha, para um cego, entre um homem que urina e um outro que sem queixar-se esvae-se em sangue ?

Nós mesmos não cessamos de condoer-nos desde que a distancia ou pequenez dos objectos produz sobre

nós o mesmo effeito que a privação da vista sobre o cego? Tanto dependem nossas virtudes de nosso modo de sentir e do gráo em que nos affectam as cousas exteriores! Tambem eu não duvido que, sem o temor do castigo, muitas pessoas sentissem menos pena em matar um homem a uma distancia em que elle se lhe apresentasse do tamanho de uma andorinha, do que em esfaquear um boi.

Se nós temos compaixão de nm cavallo que soffre e se esmagamos sem nenhum escrupulo uma formiga, não é o mesmo principio que nos determina? Ah! senhora! quanto a moral dos cegos é differente da nossa! quanto a de um surdo differeria ainda da de um cego, e quanto um ser que possuísse um sentido mais do que nós, acharia a nossa moral imperfeita, para nao dizer peor! (Diderot—*Œuvres choisies* par Francois Tolou, V. 1º pag. 54.)

Diderot passa depois disto a considerações sobre as ideias religiosas de um cego e muito judiciosamente observa que para o cego o espectáculo imponente que a natureza nos apresenta, esse poderoso argumento empregado para fortalecer e inspirar a crença em um Deos, tem muito pouca importancia.

Kant, caracterizou perfeitamente a distincção entre o concreto e o abstrato consagrando as duas denominações de *objectivo* e *subjectivo*.

Este facto capital, porém, não foi sufficiente para transpor completamente o dominio metaphysico, sob o qual ainda se achava aquelle eminente pensador, apezar de suas vistas elevadas em pontos de subida importancia.

A completa apreciação da natureza propria as nossas construcções mentaes estava naturalmente depen-

dendo de uma theoria scientifica sobre as localisações cerebraes e esta só começou a ser instituida pelos immortaes esforços de Gall, os quaes, embora as condições sociaes e noções scientificas de então não permittissem um resultado diffinitivo, foram sufficientes para estabelecer o estudo da alma no terreno puramente scientifico, formulando os dois principios fundamentaes de que deviam partir todas as indagações a esse respeito.

Gall tornando a sua theoria essencialmente objectiva incorreu em erros inaceitaveis; mas em compensação foi quem primeiro affirmou que o cerebro era a séde de todas as nossas faculdades intellectuaes e moraes; e um orgão composto de outros, destinado cada um a preencher uma determinada funcção da alma.

Com estas duas descobertas ficou elaborada a grande base que mais tarde devia receber o monumento, que havia de constituir com os materiaes dos Broussais, Blainville etc., a theoria abstracta da alma humana.

Comte precisando logo a impossibilidade absoluta de um estudo da alma sob o ponto de vista objectivo de seu digno predecessor, substituiu o methodo objectivo pelo methodo subjectivo, cuja applicação aos factos moraes, onde tudo é solidario, tudo concorre, onde só o conjuncto nos pôde ser sufficientemente conhecido, é mais efficaz, mais racional e unico possivel, e pôde assim elaborar diffinitivamente a theoria systematica do cerebro, a qual até hoje se acha conforme todas as judiciosas indicações anatomicas.

A alma é constituida pelo conjuncto de suas funcções intellectuaes, moraes e praticas. As funcções são exercidas pelo cerebro, que assim se acha sub-

jectivamente dividido em tres regiões : uma relativa á intelligencia, é a anterior ; outra relativa ao sentimento, é a posterior ; e finalmente outra mediana relativa ao character.

A intelligencia comprehende cinco faculdades distinctas : a *contemplação concreta*, a *contemplação abstracta*, *meditação inductiva*, *meditação deductiva* e *linguagem*.

Estas faculdades sob a inspiração e excitação da região affectiva, devem, por intermedio dos sentidos, recolher os materiaes fornecidos pelo meio em que vivemos, elaboral-os e formar as construcções que têm de dirigir, com assistencia do sentimento, a actividade.

A phase objectiva começa com a contemplação emquanto que a subjectiva tem lugar desde que principia a meditação.

A primeira implica a existencia de um objecto para ser observado, a segunda pôde ser feita na mais completa escuridão e no mais profundo silencio.

A imaginação reproduz as imagens ; a memoria lembra a serie de acontecimentos realizados, de modo que o espirito tem sempre presentes esses auxiliares indispensaveis e poderosos para facilitar a sua elaboração e garantir á sua exactidão.

Estes factos, uma vez obtidos os materiaes pela observação, são inteiramente independentes do mundo exterior, e só se acham subordinados ás leis que garantem a plena harmonia cerebral necessaria a toda e qualquer concepção como a todo e qualquer acto de nossa existencia.

Um objecto se nos apresenta ao espirito pelo conjuncto de propriedades que nos são fornecidas pelos sentidos. Estas propriedades convenientemente com-

binadas compõem uma certa imagem, que é o resultado da contemplação concreta, onde o ser é apreciado em seu todo. A imagem é assim construída por uma serie de sensações simples causadas pelas impressões recebidas da côr, do peso, do som, da fórma, volume etc. sobre os centros correspondentes aos nervos sensitivos da visão, do tacto, da audição etc. A contemplação concreta e os ganglios sensitivos em que vão ter os conductores das impressões sensoriaes são, pois, a séde de onde partem todas as nossas concepções desde as mais bellas producções poeticas ao mais simples pensamento de architectura, desde a mais elemental elaboração mathematica até as mais transcendentis construcções moraes. A esse centro do cerebro devem estar normalmente subordinadas todas as nossas idealisações para que ellas possam ter uma utilidade real; n'elle estão as materiaes fundamentaes.

Se os materiaes são máos, a construcção pôde ser perfeita e rigorosa, mas será sempre uma chimera, uma phantasia, desnecessaria, inutil, cuja unica consequencia será inutilisar um esforço cerebral que poderia ser aproveitado em investigações de necessidade real.

Tomada a imagem pela contemplação concreta, ella será tanto mais approximada da realidade e tanto mais precisa e viva, quanto mais energicas forem as aptidões individuaes. Obtida a imagem começa um novo trabalho cerebral que a decompõe em noções simples que a constituíam; estas são apreciadas em suas propriedades particulares, e a abstracção principia assim a desenvolver-se na região da contemplação abstracta, elaborando os elementos que têm de servir de base á construcção geral. Assim é que a

imagem do homem começa p̄r decompor-se em um certo numero de partes componentes: o coração, o pulmão, o cerebro, os braços etc., estas apresentam-se por sua vez como constituidas por certos tecidos por entre os quaes circula o sangue, que decompõe-se em globulus, tendo cada uma destas partes suas propriedades caracteristicas.

A primeira phase, portanto, é essencialmente synthetica o ser é ahi apreciado em seu todo; emquanto que a segunda é essencialmente analytica: procede por decomposição até chegar aos elementos fundamentaes da constituição do conjuncto fornecido pela primeira operação cerebral.

Esta differença capital torna a contemplação concreatá muito mais propria ás artes que a contemplação abstracta, a qual pela sua aptidão analytica convém muito mais ao espirito scientifico.

Com estas duas funcções ficam elaborados os materiaes abstractos, mas a verdadeira abstracção só principia quando começa a inducção, porque só então a generalisação exige a consideração completa das propriedades independente do conjuncto em que elles se nos manifestam.

A meditação inductiva abrange o que ha de commum em uma classe ou em classes differentes, na grande sociedade dos seres que a contemplação abstracta nos apresenta, formulando, assim, ideias geraes, verdadeiras abstracções de que se tem de utilizar a nossa acção constructora,

Todas as arvores, arbustos e hervas apresentam por entre a variedade de suas formas, de suas dimensões, propriedades importantes que lhes são communs taes como: a alimentação, o crescimento, a duraçãõ

limitada, com as quaes a meditação inductiva constroe um typo puramente ideal que se denomina de *vegetal*.

Além disto, tem ainda mais a meditação inductiva de determinar as relações que ligam entre si dois phenomenos abstractos da mesma ou de diferente natureza, e é esta precisamente a parte mais complicada de sua missão, e onde começa verdadeiramente o dominio scientifico.

Estas relações uma vez estabelecidas, a intervenção da função deductiva completa a elaboração tirando do facto apreciado todas as consequencias, e leis que delle possam resultar.

« Deduzir, diz Laffite, não é, em ultima analyse, mais que transformar, isto é, separar explicitamente de uma cousa uma outra cousa que ahi se achava implicitamente contida; fazel-a destacar, estabelecel-a claramente, é proprio da deducção, Mas existem, como diz Aristoteles, certos processos que convenientemente empregados permittam chegar a um tal resultado? De modo algum. Deduzir é uma aptidão distincta e irreductivel do nosso cerebro muito pouco desenvolvida entre a maior parte dos homens; o nome de methodo deductivo indica simplesmente o conjuncto dos processos que nosso cerebro tem construido nos differentes casos que se lhe têm apresentado. » (*Les grands types de l' Humanité*, v. 1^o pag. 110.)

Constituida, assim, em nosso cerebro a concepção abstracta baseada sobre os materiaes objectivos, falta-nos considerar a ultima phase que consiste em traduzir esta concepção exteriormente de modo a podel-a transmittir a outro cerebro qualquer e fixar por mais tempo a sua duração.

Para isto tem as funcções de expressão que nos facultam signaes proprios para traduzirmos os diferentes estados em que se possa achar a nossa alma, facilitando assim a abstracção pela fixação das propriedades das seres sobre as quaes a attenção se concentra e são estabelecidas as concepções.

Estas diferentes facultades intellectuaes embora perfeitamente distinctas, para poderem ser apreciadas separadamente, são sempre concorrentes nas operações cerebraes, de modo que a mais elementar observação é sempre acompanhada de um raciocinio muitas vezes quasi que expontaneamente sugerido.

Esta solidariedade estende-se a todo o conjuncto cerebral, de sorte que a actividade da região especulativa, é sempre influenciada pelo estado da região affectiva e reciprocamente.

O mesmo dá-se para com o character. A participação total do cerebro em todas as nossas construcções é, pois, evidente e necessaria.

Apreciada em si a abstracção, vamos ver ligeiramente quaes as condições sociaes que a permittiram e favoreceram o seu desenvolvimento, até o ponto elevado em que hoje nol-a manifesta a humanidade.

Para chegar a poder realisar a elevada abstracção que nos apresentam as immorredouras concepções dos Newton, Lagrange, Decartes, etc., o espirito humano começou primeiramente iniciando abstracções muito mais simples, muito mais faceis, cuja existencia, mesmo entre os animaes inferiores, é hoje facta absolutamente acoberto de qualquer duvida.

Uma falsa apreciação da abstracção levou os metaphysicos a considerarem-n'a exclusiva á especie humana; os trabalhos, porem, de Hume e Georges

Leroy destruíram completamente uma tal supposição tornando positivamente demonstrada a aptidão para abstrahir em muitos outros animaes, apenas differindo em gráo da abstracção humana.

Ninguém affirma nem mesmo suppõe que um cão ou um passaro seja capaz de realizar uma construcção abstracta como a da gravitação, mas o que se avança e se prova é que esses animaes são capazes de formular as noções abstractas com que têm de dirigir á sua conducta.

Taussenel (a), em seu —*Le monde des oiseaux*, nos narra o modo engenhoso como os pelicanos, impossibilitados de fazer a rede para a pesca, suppreem este processo por uma manobra racional, cuja descripção nós a transcrevemos para que se possa avaliar o quanto taes passaros são aptos para formular abstracções e raciocinios muito logicos.

«Logo que elles presentem a chegada dos peixes no rio em cujas margens se acham estacionados, um signal de alerta é dado a todo o bando. Todos se reúnem; escolhem o lugar para o combate, geralmente uma enseada ou um baixio, que é sempre aquelle em que é maior a affluencia de peixes. Escolhido o lugar o pelicano mais velho, mais experiente, mais pratico no processo, traça com as azas a linha de circumvalação ou de investimento. Isto feito, todos os outros pelicanos, cem ou duzentos, dispõem-se em ordem sobre a superficie d'agua, segundo a direcção marcada pelo chefe e guardando entre si a distancia necessaria para que cada um

(a) *Le monde des oiseaux*—v. 3º pag. 315.

possa livremente manobrar com as azas. Bloqueado por esta fôrma o cardume, começa a operação pelo signal de investida dado pelo general, signal que é repetido em toda a linha de sentinellas. Succede-se, então, uma verdadeira tempestade: todos, sem mudarem de lugar, batem com as azas n'agua e gritam; os movimentos tornam-se cada vez mais rapidos; a agua perturba-se e o effeito é certo. Os peixes amedrontados fogem em todos os sentidos e os que se acham no bloqueio fogem para a margem. O cordão estreita-se, o circuito vai progressivamente diminuindo, até que os passaros conchegados uns aos outros fôrnam uma verdadeira muralha invulneravel. Os peixes desesperados cambalhoteiam no ar; mas isto longe de fazer com que os pelicanos rompam a formatura, alegra-os e leva-os a tornarem mais forte, mais solidaria a linha de bloqueio; até que afinal, a agua lhes dando apenas pelo meio das pernas e os peixes achando-se fatigados pela luta, começa o assalto em que cada um procura a sua presa.»

Outros e numerosos exemplos nos poderiam fornecer George Leroy, Broussais, Laffite, etc.; basta, porém, o que citamos para, se não convencer, ao menos levar a meditar sobre a questão áquelles em cujo espirito paire alguma duvida.

Partindo da abstracção elementar foi que o homem pôde accumular os materiaes necessarios á suas elevadas construcções. Todo o cabedal scientifico que actualmente possuímos, todo este conjuncto de leis que nos dirige a existencia, que nos poupam tantos esforços, foi composto por tres elementos distinctes: um constituido por um trabalho de observação, que fornece as imagens concretas; outro por uma ope-

ração cerebral em que estas imagens são apreciadas em suas partes componentes e suas propriedades ; a abstracção começa então com o apparecimento das noções abstractas : e, finalmente, o terceiro elemento resume-se em um trabalho intellectual que compara as noções abstractas, apreciando as relações que entre ellas existem.

O primeiro modo de realisação do nosso trabalho mental foi, naturalmente, o que mais se desenvolveu com o regimen fetichista.

Preoccupado com a observação dos seres, os fetichistas pouco attendião aos phenomenos que nelles se manifestavam ; pouco se lhes importava que o espaço percorrido por um corpo que cahia, fosse função do tempo ; que existisse certa relação entre o diametro maior da orbita de um planeta e o tempo de sua respectiva revolução. O ser era tudo para elles.

Taes disposições, facilmente comprehende-se, foram em extremo favoraveis á observação, á contemplação concreta. Os materiaes objectivos que deviam servir de base a todas as construcções posteriores, ficaram, assim, elaborados ; o emprego continuo e aturado da observação foi desenvolvendo o espirito até que, muito naturalmente, o levou á apreciação dos phenomenos, que foram, em virtude dos habitos solidamente contrahidos, representados por entidades abstractas, tendo uma fórma determinada, um modo de ser proprio aos factos que representavam. Depois foram os fetiches substituidos pelos mythos do polythismo, só differentes dos primeiros pelo poder maior e dominios mais extensos.

Esta instituição de entidades abstractas revestidas de fórmas e attributos humanos, levou o espirito a

construir imagens destinadas a represental-as, e assim não só concorreu para facilitar o desenvolvimento scientifico e mesmo favorecer o desenvolvimento artistico, como tambem desviou a sua attenção da contemplação exclusiva do mundo exterior, levando-a á consideração do proprio homem.

Começou desde então a iniciar-se o estudo moral, o dominio mais complicação da investigação scientifica.

O fetichismo habituou os corações a reconhecerem uma ordem immutavel exterior; o polytheismo creando os deuses superiores ao mundo e ao homem, suppondo-os dotados de um poder elevado, conformou o sentimento de ordem emanado do regimen primitivo com a ideia de variedade necessariamente despertada pela elevada autoridade dos deuses, os quaes eram suppostos por sua vez sujeitos ao destino, que representava a fatalidade geral da synthese fetichista.

Este sentimento da ordem profundamente fortalecido por uma sufficiente duração do estado fetichista foi tão necessario ao desenvolvimento moral do espirito scientifico, que nos povos onde a sua influencia não se acentuou precisamente, ainda hoje encontra-se as crenças mais extravagantes e atrasadas.

Preparado, porém, pelo dominio fetichista o polytheismo desenvolvendo a abstracção, permittiu ao espirito humano as construcções scientificas cujo começo teve logar na Grecia, onde pela primeira vez se enunciaram com precisão algumas relações abstractas que pôde o homem conceber sob o dominio da nova phase religiosa.

Ouçamos o Sr. Laffitte :

«Elle, Thalès, institue assim a geometria das linhas, a geometria verdadeiramente abstracta. Nós vemos ali uma das revoluções mais notaveis do espirito humano, isto é, o desenvolvimento da sciencia abstracta, que não poderia consistir em simples noções numericas, communs a todas os povos e evidentemente insufficientes. Foram os gregos que fundaram a sciencia abstracta ; foi Thalès quem primeiro se manifestou n'esta immortal creação. Os theocratas, com effeito, só conheciam a geometria das superficies ; geometria reduzida a simples quadraturas, empiricamente obtidas, emquanto que Thalés iniciou a verdadeira geometria abstracta que consiste em estabelecer relações precisas entre as diversas partes de uma figura, de maneira a poder-se determinar rigorosamente uma dellas por meio das outras. Ainda mais, e foi isto um serviço consideravel, elle introduziu na logica humana, com os seus dois theoremas a dupla ideia de *equação e proporção*.

Seu primeiro theorema, a somma dos tres angulos de um triangulo é sempre igual a dois rectos, fornece a noção de equação; o segundo, os triangulos equiangulos têm os lados homologos proporcionaes, fornece a noção de proporção. Estas duas noções, e principalmente a segunda, aperfeiçoadas pelos philosophos da escola de Pithagoras, tornaram-se em suas mãos processos abstractos de deducção como mostra claramente o decimo livro de Euclides (*).

Na Grecia, pois, começou o grande movimento, então presidido pela escola Jonica, que só termina com a escola de Alexandria.

(*) Laffitte—*Les grands types de l'Humanité* v. 1^o pag. 126.

Tambem as bases do monumental edificio ficaram definitivamente assentadas.

Para completar o desenvolvimento mental esboçado pelo fetichismo com a logica do sentimento, e desenvolvido pelo polytheismo com logica das imagens, foi ainda necessaria uma nova concepção, que determinasse a instituição da logica dos signaes, desenvolvendo a deducção e a expressão. Tal foi sob o ponto de vista intellectual, o papel do monotheismo de S. Paulo e de Mahomet.

Detestando o polytheismo, o espirito monotheico não podia ser simpathico ao uso de imagens por elle tão elevadamente desenvolvido e nem tão pouco podia servir-se exclusivamente das inspirações affectivas, que não apresentavam a precisão necessaria para as indagações exactas, nem a nitidez sufficiente para permittir longos raciocinios. Desenvolveu-se, então, o emprego dos signaes que satisfazião completamente a condição essencial para a facil deducção, que devia ser o processo mais desenvolvido pela crença monotheica. Este emprego, porem, conduziu logo a um abuso em extremo prejudicial, quer ao coração quer ao espirito e, certamente, mais lamentaveis teriam sido as consequencias se o monotheismo oriental, pela confusão que conservava dos dois poderes, não corrigisse sempre o espirito divagador com realidades praticas, e se as doutrinas de S. Paulo não encontrassem na instituição do papado um poderoso moderador. Com a construcção monotheica, ficou a mentalidade humana completamente desenvolvida.

Producto dos esforços gigantescos da civilização grego-romana, e dos esforços da evolução catholica, formou-se no Occidente uma raça de elites, que con-

servou desde muitos seculos todos os elementos das gerações passadas, corrigiu-os, desenvolveu-os, augmentou a valiosa herança, e assim construiu a base abstracta sobre o qual se tem desenvolvido o conjuncto humano.

Pouco numerosos, esses bemfeitores da humanidade são dignos da nossa mais profunda veneração, de nossa eterna gratidão como tendo empregado todo o seu genio em esclarecer a nossa conducta, em poupar os nossos esforços e livrar nos dos preconceitos da ignorancia e dos prejuizos lamentaveis das superstições.

A abstracção se por um lado é indispensavel ao progresso da existencia humana, por outro, quando mal regulada, torna-se nociva levando o espirito ás mais inuteis divagações que constituem um verdadeiro charlatanismo scientifico,

Que resultados nos podem provir da observação da passagem de Venus pelo disco solar, para que gastassemos com isso contos de réis, que uma melhor disciplina theorica teria empregado em auxiliar a a solução de problemas que tanto nos convém resolver? Estes desvios são devidos a falta de uma doutrina social scientifica, unica capaz de corrigir as inuteis divagações no dominio abstracto, que tantos esforços cerebraes tem inutilizado e desperdiçado tamanho auxilio pecuniario.

Para regular o trabalho abstracto devem ser satisfeitas as seguintes condições :

1ª. E' preciso que o poder regulador tenha, no mais alto gráo o sentimento moral e social;

2ª. Que elle saiba discernir as indagações uteis das que não o são;

3°. Que entre as indagações uteis saiba distinguir as que são opportunas e sufficientemente preparadas.

A primeira condicção, sobre tudo affectiva, exige uma concepção synthetica; e as outras uma concepção analytica.

A concepção synthetica cada um de nós a tem perfeitamente instituida pela apreciação do conjuncto domestico. Cada individuo tem affeição a sua familia; o amor inspirado por este conjuncto é a preparação para o amor universal, como o typo da familia é a miniatura da humanidade, onde o pequeno numero de individuos é substituido por numerosas gerações. Qualquer pessoa, pois, acha-se apta a conceber precisamente a idéa da Humanidade mediante uma educação racional e sem preconceitos.

Esta concepção é o resultado do concurso de uma serie de esforços de todos os eminentes pensadores e sabios. Quantos sacrificios não foram necessarios para chegarmos a idéa precisa da ordem exterior que nos rege?

Nós devemos mais aos mortos que aos vivos.

E sempre que qualquer tem tomado a si a ousadia de levar a effeito grandes construcções desprezando o auxilio dos trabalhos por outros já elaborados, o resultado tem sido deploravel. Que notavel differença entre o modo por que sahio Descartes em sua elaboração mathematica e o modo porque se sahio em suas apreciações metaphysicas! E se isto deu-se com este espirito de eleito o que não seria das mediocridades pretendendo seguir um tal exemplo? Esta solidariedade necessaria e digna ninguem melhor sentiu que A. Comte. Philosopho algum apreciou as

gerações passadas tão leal, tão francamente, com tanta justiça e proficiência como elle.

A construcção abstracta da humanidade, fornece o conhecimento das leis que nos regem ; a noção de um ser colectivo emanada do coração, adquire mais precisão com o desenvolvimento das indicações intellectuaes ; o conhecimento da ordem exterior nos dispõe o coração a aceitar voluntariamente uma digna submissão. A alma sente deste modo muito mais perfeita a sua unidade, o dever desenvolve-se muito mais facilmente, a fé torna-se mais firme, a solidariedade mais intima, a continuidade melhor determinada e nós caminhamos guiados por uma doutrina de amor que se resume na phrase eminentemente digna *viver para outrem*.

Fazendo o homem conhecer-se a si proprio, a abstracção é depois por elle mantida em seus verdadeiros limites restringindo-se ás investigações exigidas pelas necessidades reaes de nossa existencia no planeta.

Todo esforço dirigido para qualquer fim alheio a taes exigencias deve ser reputado inutil e desperdiçado. Examine-se os Jornaes da Escola Polytechnica de França e então se verá quanto esforço cerebral inutilmente gasto, quanta divagação lamentavel.

Convenientemente disciplinada, porém, a abstracção é uma das faculdades que maiores serviços nos prestão. E' baseando-se sobre as verdades abstractas, modificando convenientemente suas condições que arte tem podido elevar-se a tão subido grão de perfeição.

Quem antigamente era capaz de conceber que se pudesse contar o tempo sem que o sól se apresentasse

para projectar a sombra da estillete sobre o quadrante ?

Quando esses homens primitivos chegariam a pensar que se podesse saber o dia do mez, as phases da lua, as horas os minutos e os segundos por um instrumento de menos de duas pollegadas de diametro ?

A arte foi primitivamente, o resultado de algumas observações ; depois, a proporção que a contemplação foi se tornando abstracta, ella foi se aperfeiçoando até que seus resultados foram baseados nas indicações de theorias abstractas.

A observação do movimento da sombra projectada por um corpo em virtude do movimento diurno, deu lugar a construcção de instrumentos destinados a medida do tempo; mais tarde o conhecimento dos phenomenos da gravitação determinou a construcção de relogios nelle baseados e muito mais perfeitos que os primeiros.

A perfeição artistica com o desenvolvimento do estudo abstracto nem só torna-se muito elevada nas artes inferiores, como tambem estende-se a dominios mais complexos como sejam os dominios moral e social. O conhecimento das leis sociaes nos permite formar verdadeiros homens politicos, e o das leis moraes verdadeiros moralistas. Desde então o organismo social póde ser convenientemente modificado, prevenindo-se as catastrophes e a anarchia a que a ignorancia possa dar lugar no seio do sêr colectivo.

Dirigir um individuo ou uma sociedade, comprehendendo-se, é tarefa muito mais difficil que dirigir a construcção de um navio ou de uma casa.

Para dirigir o organismo social é necessario estar

de posse da doutrina scientifica que nol-o faz conhecer. Só assim é possível chegar-se a determinar quaes as medidas a tomar, quaes as modificações a fazer para que a ordem permaneça, para que o movimento progressivo se realice de modo mais vantajoso.

Hoje então a questão está mais complicada. A existencia de cada sociedade antigamente achava-se isolada, por bem dizer, de todas as outras, hoje ao contrario acham-se estreitamente relacionadas entre si.

A humanidade se nos apresenta como um immenso organismo, onde tudo é harmonioso e solidario, onde cada nação é um elemento concorrente, cuja existencia influe poderosamente sobre a harmonia geral do conjuncto.

O estudo das leis abstractas é necessario a todo o homem, seja qual fôr o fim a que se destine; é indispensavel á mulher para que ella possa desempenhar com vantagem a sua digna missão social.

II

Depois de ter estudado a abstracção no modo como ella se nos manifesta; de havermos apreciado quaes as faculdades de nossa alma que concorrem para realisal-a, e finalmente esboçado as condições sociaes que determinaram sua instituição e desenvolvimento, nós vamos estudar o modo por que ella se acha localisada em o nosso aparelho cerebral.

Convenientemente localisado, este poderoso auxiliar nos fornece imagens precisas dos objectos

exteriores; activa a imaginação e por esta fórma actuando mais energicamente sobre a região affectiva, torna-se um elemento inestimavel para o nosso aperfeiçoamento moral. A vida subjectiva torna-se completa, as idéas ganham a necessaria precisão e os entes que nos são queridos podem nos ser presentes a todo instante, por uma imagem que nos despertará os mais dignos sentimentos.

Esta existencia intima excitando muito pouco a actividade de nossos instinctos egoistas e desenvolvendo grande actividade nos sentimentos sympathicos, nos dá a alma, pela pratica diaria de taes actos, o aperfeiçoamento e a coordenação que o estado real da sociedade exige para sua estabilidade. A abstracção, pois, bem dirigida é de salutar influencia sobre o moral do homem.

Uma theoria da abstracção começou a ser sustentada desde que as noções abstractas poderam ser constituidas.

Recebendo as impressões do mundo exterior e formulando noções sem uma existencia objectiva, pura criação de suas aptidões, cuja verdade se lhe manifestava desde que elle procurava guiar a sua actividade, o espirito humano foi naturalmente levado a considerar a differença entre o conjuncto exterior, concreto e o conjuncto interior subjectivo ou abstracto.

A Platão cabe a gloria de haver constituido uma theoria das idéas, cujas difficuldades haviam sido muito superiores para que Thalès as pudesse vencer e Pythagoras fosse além de um simples esboço.

Conhecendo completamente a doutrina da escola de Pythagoras, Platão foi o seu legitimo continuador. A sua exposição, como judiciosamente observa Laffite,

é antes a de escriptor que propaga do que a de um pensador que inventa. No Hýpias a estabilidade das noções abstractas e a variedade das impressões, são estabelecidas com grande verdade. O bello abstracto é ahí estudado com clareza e correcção admiraveis. A distincção entre os factos objectivos, que podem variar, e a noção abstracta que representa um modo de sêr commum a todos elles, é admiravelmente sustentada.

O dialogo entre Socrates e Hýpias é muito attraente e elegante (veja-se Victor Cousin—Oeuvres de Platon—vol. 4º, pags. 115 e seguintes.)

A' simples leitura do Hýpias vê-se o quanto é admissivel á opinião de Diogenes de Lærce, quando avança que Platão em sua theoria do entendimento colheu a maior parte dos materiaes na escola de Pythagoras.

A theoria das idéas ainda com Platão é bastante imperfeita ; as noções abstractas, as construcções as mais elevadas da abstracção, elle suppõe como só podendo ser obtidas pêla intervenção de um poder divino.

Assim é que, para elle, as creações poeticas podem ser realisadas independentemente da capacidade mental e affectiva do individuo, sob a simples influencia dos deuses.

Tratando dos poetas, diz Socrates : «Tirando-lhes a razão, tomando-os para ministros, assim como os prophetas e os inspirados divinos, o Deus quer por esse modo ensinar-nos que não é de si mesmos que elles, os poetas, dizem cousas tão maravilhosas, pois que lhes não assiste o bom senso, mas que elles são órgãos do Deus que nos falla por seu intermedio.»

Platão estabeleceu, assim, uma inteira independencia entre o dominio ideal e a phase contempla-

tiva, entre os dados objectivos e a construcção abstracta, de modo que, longe de corrigir os desvios do entendimento, elle os facilita, reduzindo-o a um simples jogo de noções abstractas, sem correctivo algum exterior que o possa manter em seus limites normaes.

No Phedon no dialogo entre Socrates e Simmias, a associação de idéas é tratada com muito criterio e a abstracção é perfeitamente esboçada. (*)

Apezar, porém, de todos os esforços realizados por Platão, o problema ficou ainda a resolver.

Os conhecimentos biologicos achavam-se ainda muito atrasados; não havia nem esboço da theoria cerebral, a intelligencia humana, póde-se dizer, tinha a sua séde no espaço.

Se com uma semelhante localização havia a conveniencia de levar o coração a amar a abstracção como um don da divindade, havia tambem o inconveniente de ser o resultado por demais deficiente e incompleto.

A abstracção com as lutas religiosas e as discussões metaphisicas foi aperfeiçoando-se cada vez mais, permitindo as construcções scientificas, abrindo novos horisontes á actividade cerebral, e desse pequeno canto em que a methaphisica esperava gravar a crença em sua construcção, principiaram a sahir os raios que deviam fulminal-a e substituil-a por um limitado conjuncto de verdades scientificas.

Em seu começo essas lutas fizeram surgir a philosophia escolastica. Aristoteles foi a brilhante estrella que primeiro attrahiu os olhares avidos do mundo

(*) Victor Cousin—Loco. cit.,—v. 1,º pag. 222.

cultivado. Depois d'elle appareceram Roscelin, Abélard, e outros, mas o problema mental só teve uma solução definitiva passados muitos seculos.

Até Malebranche ainda a doutrina de Plutão tentou permanecer na arena, onde tantos annos de luta haviam demonstrado sua incapacidade.

O espirito humano seguiu seu continuo desenvolvimento; a discussão dos erros partidarios exercitou o cerebro, desenvolveu as faculdades e a abstracção tornou-se mais pronunciada e vigorosa.

Foi Gall quem principiou este movimento. Desde o começo de seus trabalhos encontrou elle a hostilidade de Bonaparte e da Academia de Sciencias, e finalmente uma indigna velhacaria tentou reduzir uma renovação scientifica, só comparavel á de Galliléo, ao conhecimento do estado interior do cerebro pela simples determinação da fórma e dimensões do craneo.

Esta opposição ofuscou-se com as descobertas de Gall, que de mais teve o cuidado de vulgarisal-as por meio de cursos e publicações, das quaes a mais importante foi por elle reproduzida, com menores desenvolvimentos anatomicos, de 1822 a 1825 em seu tratado sobre as funcções do cerebro.

Gall estabeleceu scientificamente estes dous principios :

1º A alma é uma noção abstracta que representa um conjuncto de funcções multiplas moraes, intellectuaes, irreductiveis umas na outras, 2º Cada uma destas funcções occupa um local particular em uma porção determinavel da substancia cinzenta do cerebro.

Esta ultima concepção era decisiva, porque a moral era assim dotada de um processo logico impor-

tante, pois que seu ponto de partida era irrevogavelmente estabelecido na natureza humana.

Desde então o cerebro foi considerado não como mais um órgão simples mas como um conjuncto de órgãos cujos tres grupos principaes correspondem á intelligencia, ao character e ao coração, que governa todo o apparelho.

O problema da decomposição da alma foi estabelecido por Gall, mas exceptuando-se a analyse dos bons sentimentos, elle foi, sobre tudo, incompleto no que diz respeito á decomposição das faculdades intellectuaes; demais elle isolou exageradamente o cerebro dos órgãos vegetativos e do systema nervoso.

Este insuccesso foi, principalmente, devido a insufficiencia do methodo. Gall como todos os seus precursores tinha estudado o homem abstrahindo da humanidade.

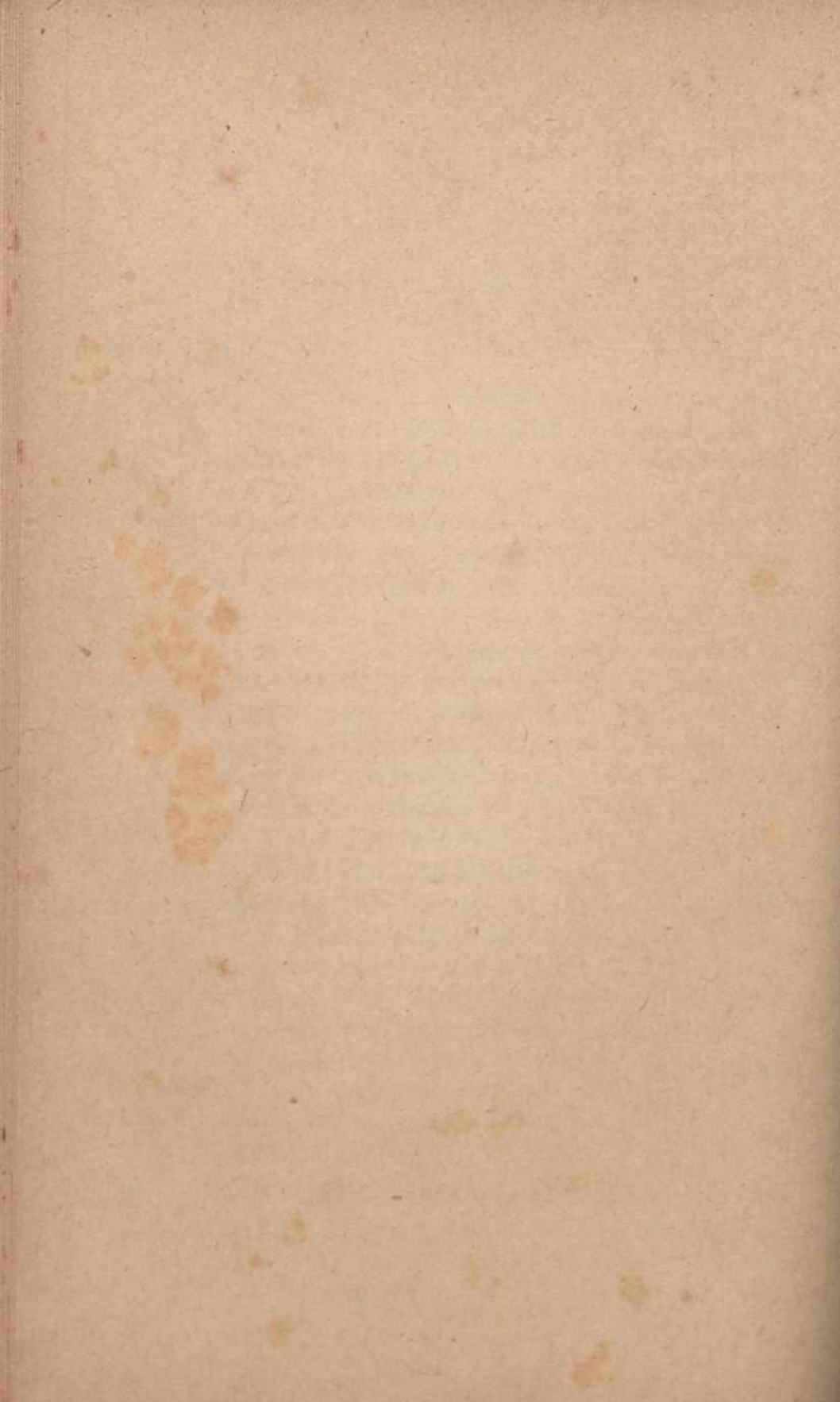
A resolução do problema final pertence a A. Comte. Depois de haver creado a sociologia elle pôde construir a theoria cerebral e sobre esta base systematica fundou a sciencia moral.

Por elle foi a concepção positiva da alma reduzida com precisão a theoria abstracta e geral das funcções simples e compostas do cerebro, tanto interiores como exteriores, sendo estas ultimas consideradas em seu duplo modo activo e passivo.

Desde então deve-se considerar o cerebro como o apparelho que liga o corpo ao mundo e por intermedio do qual produzem-se suas acções e reacções quaesquer.» (1)

(1) Lafttte—De la moral e positive pag. 78.

Elaborada a sociologia, tornado positivo o dominio da biologia pôde, desde então, ser scientificamente assignalado á razão abstracta um local definido de modo que ella podesse ao mesmo tempo despertar a imaginação e o sentimento, ficando assim plenamente resolvido o problema fundamental da moral.



CLASSIFICAÇÃO DAS SCIENCIAS

O homem recebendo por intermedio dos sentidos as impressões que lhe são causadas pelo mundo exterior constroe theorias abstractas, geraes, que fornecendo-lhe um conhecimento sufficientemente exacto dos factos que o cercam, permitem-lhe previsões racionais, rigorosas, inteiramente indispensaveis á acção diffinitiva de sua actividade.

Por este modo fica compensada a defficiencia de nossos meios de acção naturaes e directos, sobre os corpos que nos cercam, pela energia da acção que nos permite exercer o conhecimento das leis, facultando-nos a introdução de agentes determinados, cuja intervenção no conjuncto de circumstancias em que se realisa o phenomeno considerado, basta para tornar em proveito nosso os resultados effectivos proprios á cada caso.

Na applicação das theorias assim concebidas ou se tem em vista o estudo da existencia propria aos corpos organicos ou inorganicos, ou se pretende modificar de conformidade com idéas sobre elles concebidas, e de harmonia com as nossas necessidades, o meio em que vivemos e então intervêm factores cuja exacta apreciação nos foi impossivel e outros cuja consideração não houve necessidade para a con-

strucção theorica, os quaes modificando as leis abstractas nos levam a estabelecer uma serie de processos desde então destinados a dirigirem a acção de nossa actividade sobre o meio terrestre.

D'ahi a decomposição de nossos conhecimentos em theoricos e praticos. O grupo theorico decompõe-se em dous outros distinctos: um comprehende as sciencias geraes abstractas, verdadeiramente fundamentaes, que estudam as leis geraes proprias a cada classe distincta de phenomenos; o outro comprehende as sciencias particulares, essencialmente discriptivas, secundarias, ordinariamente classificadas de sciencias naturaes.

Os conhecimentos praticos constituem as artes.

Nas sciencias geraes abstractas, as leis são formuladas sobre os elementos que a abstracção permite separar de cada facto, são leis geraes estabelecidas sem ter-se em conta da influencia de certos factores, cuja intervenção mascarava o facto constante e cujo estudo entra no dominio das sciencias concretas. As leis, por exemplo de physica e chimica, que regem a existencia vegetal, foram estabelecidas sem se levar em conta as influencias atmosphericas sobre estes corpos, facto que á botanica compete estudar; as leis da refração foram estabelecidas sem a consideração do estudo das modificações que lhe pode resultar da constituição propria a cada crystal, estudo este que faz parte do dominio de mineralogia. Finalmente, nas sciencias abstractas estuda-se de um modo geral o modo de ser proprio a cada grupo de phenomenos distinctos, em quanto que nas sciencias particulares tem-se em vista estudar o modo de ser proprio a cada corpo em si, sua constituição especial.

As artes tem por fim melhorar e encantar a existencia humana e estão subordinadas ás sciencias, que fornecem a base subjectiva do suas construções.

As *bellas artes*, as artes estheticas, idealizando a existencia, exaltando o sentimento, subordinando os seus ideaes ás diferentes verdades estabelecidas no dominio scientifico, concorrem para o aperfeiçoamento do nosso instincto de perfeição, para o desenvolvimento de nossos sentimentos *sympathicos*; as artes technicas, industriaes realisam os aperfeiçoamentos assim idealizados, por uma conveniente modificação do meio em que vivemos, e garantem o melhoramento successivo de nossa situação material sobre o planeta.

Para executar, pois, é necessario primeiramente imaginar, tendo antes contemplado.

Sciencia, d'onde previsão; arte d'onde acção, tal é a fórmula em que se traduz a relação geral entre a sciencia e a arte.

Além de constituirem a base indispensavel ás artes, as sciencias se nos apresentam como destinadas a satisfazer uma necessidade intellectual propria á especie humana e vem a ser: a satisfação que sentimos quando ficamos conhecendo o modo por que se realisa um facto qualquer. E' tal a intensidade d'este sentimento, que sempre que nós observamos um phenomeno qualquer, que não nos é conhecido, ou que se apresenta de encontro as leis estudadas, a emoção que nos resulta é de admiração, espanto, medo e até mesmo de terror. Assim é que na antiguidade os cometas, quando appareciam, espalhavam o terror, inspiravam as superstições as mais extravagantes, eram excommungados, timidos, emquanto

que hoje depois que Ticho-Brahé, Newton, Laplace, Clairaut e outros tantos espiritos eminentes, demonstraram que esses corpos estão sujeitos a mesma lei geral que rege o nosso systema planetario, hoje os cometas são recebidos com curiosidade, alegria e satisfação, pelo impõente espetaculo que nos offercem.

A mais importante talvez, diz Condorcet, das vantagens do estudo das sciencias, é de ter destruido os preconceitos, e ter bem encaminhado a intelligencia humana, obrigada a seguir as falsas direcções que lhe imprimiam as crenças absurdas, transmittidas á infancia de cada geração com os terrores da superstição e o temor da tyrannia.

« Todos os erros em politica, em moral, têm por base erros philosophicos, que por sua vez são devidos a erros physicos.

Não existe nem um systema religioso, nem uma extravagancia sobre natural que não sejam fundados sobre a ignorancia das leis da natureza. Os inventores e defensores d'esses absurdos não podiam prever o aperfeiçoamento successivo do espirito humano. Persuadidos de que os homens, jámais poderiam saber de seu tempo mais do que elles sabiam, e que acreditariam sempre no que então acreditavam, elles apoiavam com confiança suas phantasias sobre as opiniões geraes de seu paiz e de seu seculo.

Os progressos dos conhecimentos physicos são tão funestos a esses erros, que muitas vezes elles os destroem sem parecer os atacar, atirando sobre aquelles que se obstinam em defendel-os, o ridiculo aviltante da ignorancia.

Ao mesmo tempo o habito de raciocinar com jus-

tesa sobre o objecto dessas sciencias, as ideias precisas que dão os seus methodos, os meios de reconhecer ou provar uma verdade, deve conduzir a comparar o sentimento que nos força a adherir á opinião fundada sobre essas causas reaes de credulidade e aquelle que nos prende á nossos preconceitos e habitos, ou que nos força a ceder á auctoridade; e esta comparação basta para ensinar a desconfiar d'estas ultimas opiniões, para fazer sentir que não as acreditamos realmente mesmo quando nos ufanemos credital-as, e as profiramos com a mais pura sinceridade. Ora, este segredo uma vez descoberto torna sua destruição prompta e certa. » (1)

Vejamos agora qual a classificação que convem adoptar para as sciencias abstractas, unicas de que nos occuparemos.

A idéa de uma classificação dos conhecimentos humanos data de longo tempo. Comprehende-se, porém, que o estado incompleto em que se achava o estudo dos dominios scientificos mais elevados, a imperfeição da elaboração nos dominios inferiores, a influencia predominante de um regimen philosophico pouco disciplinado, a tendencia exclusiva para um especialismo nocivo, deviam ter sido por muitos seculos invenciveis obstaculos á todos os esforços que visassem semelhante resultado. Além disto o facto de se querer fazer entrar na classificação as artes e os ramos concretos, junctamente com as sciencias abstractas, complicou sempre de um modo notavel a empreza, e por tal fórma que dos espiritos mais elevados

(1) Condorcet, *Essais sur les progrès de l'esprit humain*, vol. 2º., pag. 44.

que a ella se atiraram nem um só chegou a resultado satisfactorio.

Entre as classificações imperfeitas e falsas de alguma importancia nota-se a de Bacon. Bacon baseou a sua classificação em uma divisão de nossas faculdades, e, o que era natural, aceitando para isto as idéas biologicas de seu tempo, assentou uma base fragil, que mais tarde os trabalhos de Gall e outros deviam destruir inteiramente.

Tambem, diz Ampère, nessa época não existia em nenhuma sciencia classificação fundada sobre as verdadeiras relações de seus objectos, não havia mesmo idéa do que hoje se chama uma nova classificação. Como Bacon o havia feito, aquelles que vieram depois d'elle não procurarão classificar *senão os grupos de verdades* aos quaes o arbitrio do uso havia dado denominações, não sentindo a dupla necessidade de grupar primeiramente todas as verdades de uma maneira racional e de dar nomes a cada grupo assim formado, e até então sem denominação; finalmente partia-se de um principio arbitrariamente escolhido segundo o qual se suppunha que ellas se deviam manifestar. (1)

A classificação de Bacon foi mais tarde modificada por D'Alembert, que além de nenhum valor lhe accressentar, manteve ainda a base primitiva de todo falsa, que estabelecia a divisão de nossas faculdades em intelligencia, razão e memoria, o que a torna de nenhuma importancia scientifica.

Ampère tambem tentou uma classificação; apezar, porém da grande justesa de muitas de suas obser-

(1) Ampère—Philophie des sciences—V 1º pag. 14.

vações geraes, sua tentativa nenhuma vantagem sensível apresenta sobre as anteriores. A nomenclatura é toda grega: o grande abuso das divisões binarias, a excessiva multiplicidade dos grupos, tornam sua classificação muito confusa e por demais obscura.

Finalmente temos como classificações mais importantes e modernas a de A. Comte, Spencer e Bourdeau. A de Spencer, a que não se pode negar alto merito, não é superior a de A. Comte, quer em simplicidade, quer quanto ao ponto de vista philosophico que a instituiu. Não querendo citar a um tal respeito o juizo de Littré, quem primeiro elucidou a questão, que pode ser taxado de parcial, nós vamos dar o juizo de Stuart Mill, a quem é impossivel negar imparcialidade.

«Porem, diz elle, depois de haver dado ás suas censuras a attenção respeitosa devida a tudo o que produz M. Spencér nos é impossivel comprehender que elle tenha provado alguma cousa. E' sempre facil achar algum defeito em uma classificação. Existe muitas maneiras possiveis de dispor um grupo qualquer de objectos; ha quasi sempre alguma cousa a dizer contra a melhor disposição, assim como alguma cousa em favor da peor. Porém o merito de uma classificação depende dos fins aos quaes ella se destina. Nós mostramos qual o fim a que se destina a classificação de A. Comte. M. Spencer não provou que ella não satisfaz a esse fim, e nós consideramos que a sua classificação não corresponde a um fim de igual importancia» (1).

(1) Stuart—Mill—Auguste Comte et le positivisme—Trad. do inglez pelo Dr. Clemenceau—pag. 43.

A classificação de Bourdeau também não traz vantagem alguma. (1)

A classificação de nossos conhecimentos abstractos é tarefa de superior difficuldade, e como bem diz Ampère, aquelle que a emprender deve de algum modo pairar acima desse vasto conjuncto, deve distinguir perfeitamente as partes, assignalar a todas a sua ordem e seus verdadeiros limittes. Se elle é feliz, se se acha á altura de uma tal empresa produzirá um trabalho verdadeiramente util, onde o leitor poderá ver claramente o objecto e a importancia relativa de cada sciencia e o auxilio que ellas se prestam mutuamente. Comte e Spencer forão os dois homens que mais condicções reuniram para levar ao termo e com vantagem semelhante tentativa. A sociologia, esboçada por Condorcet, foi posteriormente definitivamente constituida, a moral adquerio bases scientificas bastante solidas e dispondo de taes elementos quelles dois espiritos eminentes nos apresentarão duas classificações admiraveis, unicas que actualmente se podem disputar a primasia.

Como a classificação de Comte nos parece mais simples e mais racional nós a daremos de preferencia.

A classificação das sciencias pode ser feita seguindo-se a ordem historica ou a ordem dogmatica.

O primeiro modo Comte considerou de uma maneira bastante original, elevada e profundamente philosophica. Para estabelecê-lo elle apreciou com raro criterio philosophico o desenvolvimento continuo das producções do espirito humano em seu conjuncto, attendeu ás suas influencias mutuas e as influencias

(1) Bourdeau—Theorie des sciences—V. 1.

do meio social em que ellas se deram, de modo que o ensino que até elle era constituido por uma esteril enumeração de factos e especulações, tomou outra dignidade, outra elevação, e desde então passou a constituir a verdadeira historia da humanidade. O segundo modo, unico de que nos occuparemos, consiste em apresentar as sciencias segundo seu encadeiamento racional, sua dependencia mutua de modo a poder com facilidade disciplinar cada um dos dominios, limitando-o ao necessario para preparar o estudo do dominio seguinte.

Comte não teve a pretensão de suppor livre de qualquer objecção a sua classificação; elle é o primeiro a reconhecer a impossibilidade de constituir-se uma classificação verdadeiramente rigorosa.

« Vê-se, com effeito, diz elle, que por mais perfeita que se possa suppor esta classificação, jamais poderia ella ser conforme com o encadeiamento historico das sciencias. Faça-se o que se fizer é impossivel evitar inteiramente apresentar-se como anterior tal sciencia, que terá, entretanto, sob algumas relações particulares mais ou menos importantes, de servir-se de noções proprias a uma outra sciencia classificada em uma ordem posterior. E' necessario procurarmos sómente que um tal inconveniente não se dê, relativamente ás concepções caracteristicas de cada sciencia, porque então a classificação seria inteiramente viciosa.

Assim, por exemplo, parece-me que no systema geral das sciencias a astronomia deve ser collocada antes da physica propriamente dita e entretanto alguns ramos d'esta sciencia, sobretudo a optica, são indispensaveis á exposição completa da primeira.

Taes defeitos secundarios, que são estrictamente inevitaveis, não poderiam prevalecer contra uma classificação, que preenchesse, aliás convenientemente as condições principaes.

Taes defeitos representam o que ha de necessariamente artificial em nossa divisão do trabalho intellectual. »

Para fazer comprehender ainda melhor os difficuldades da questão, para melhor fazer sobresahir a existencia de uma parte da questão inteiramente arbitraria, o eminente philosopho, considerando que é seis o numero de sciencias distinctas que possuímos, nos faz notar que, assim como seis objectos comportam 720 disposições differentes, assim tambem as seis sciencias podem dar lugar a 720 classificações differentes, cada uma das quaes pôde sempre, sob um ponto particular, apresentar vantagens sobre todas as outras.

Esta verdade já d' Alembert mostrára muito claramente quando prefaciou a immortal Encyclopedia de Diderot.

« O mesmo não acontece, diz elle, na ordem encyclopedica de nossos conhecimentos. Esta consiste em reunil-os no menor espaço possivel, collocando-se, por bem dizer o philosopho d'este vasto labyrintho em um ponto de vista muito elevado d'onde elle possa perceber ao mesmo tempo as sciencias e as artes principaes, apanhar de um só golpe de vista os objectos de suas especulações e as operações que elle pôde fazer sobre estes objectos, distinguir os ramos geraes dos conhecimentos humanos, os pontos que os separam, os pontos que os ligam e entrever mesmo algumas vezes os caminhos secretos que os relacionam.

E' uma especie de mappa-mundo, que deve mostrar os principaes paizes, suas posições, suas dependencias mutuas, o caminho em linha recta que vae de um a outro, caminho muitas vezes cortado por mil obstaculos, que não podem ser conhecidos sobre cada paiz senão pelos habitantes ou viajantes, e que não poderiam ser mostrados senão em cartas particulares muito detalhadas.

« Mas como nas cartas geraes do globo que nós habitamos os objectos nos são mais ou menos aproximados e nos apresentam aspectos mais ou menos differentes segundo o ponto de vista em que o observador é collocado pelo geographo, que constroe a carta, do mesmo modo a arvore encyclopedica dependerá do ponto de vista em que nos colloquemos para apreciar o universo litterario. Pode-se, pois, imaginar tantos systemas differentes dos conhecimentos humanos quantos mappas mundo de differentes projecções, e cada um d'estes systemas poderá mesmo ter com exclusão dos outros alguma vantagem particular. » (1)

A questão, pois, consiste em escolher dentre todas as classificações possiveis a mais em harmonia com os factos observados, a mais natural a mais clara e, são estas as condições que nenhuma das classificações estabelecidas satisfaz tão plenamente como satisfaz a classificação do philopho francez.

Como dissemos, as impressões que nos causão os objectos exteriores sendo recebidas pelo nosso cerebroahi se transformão em idéas que constituem os elementos fundamentaes de nossas theorias.

(1) D' Alembert, *Discours sur l' Encyclopedie*, pag. 55.

Ora, sendo-nos impossivel considerar ao mesmo tempo a multiplicidade de idéas assim emanadas do conjuncto exterior, torna-se indispensavel separarmos por meio da abstracção essas idéas em grupos constituídos por idéas de especies distinctas, de modo a podermos com facilidade e methodo apreciar a existencia real, assim reduzida ao estudo desses grupos, que traduzem modos de ser inherentes a materia apenas della separados por nosso espirito para permittir uma exacta apreciação, só assim possivel.

O estudo dos sêres fica, pois, substituido pelo estudo directo e subjectivo de seus differentes modos de existencia, de suas propriedades, que a observação nos leva a conceber.

Entre estas propriedades umas são geraes, isto é, são communs a um maior numero de corpos, e como taes mais independentes.

Assim, por exemplo, o peso, a extensão, a impenetrabilidade, são propriedades communs a todos os corpos, emquanto que a vida, a intelligencia, o amor, são propriedades communs a um numero relativamente muito limitado de corpos. Tambem, a côr, o peso, a extensão são propriedades que nós podemos conceber existindo independentemente da vida, da intelligencia e do amor, emquanto que estas jámais se nos apresentam isoladas d'aquellas. D'isto resulta a conclusão de que os factos os mais simples são sempre mais geraes e mais independentes do que os factos particulares mais complexos, porque emquanto os primeiros podem por si só subsistir, os segundos suppoem sempre a existencia desses factos mais simples, cuja concorrência torna-se indispensavel á sua realisação. Assim, é que o phenomeno da extensão é

um phnomeno mais simples e mais geral que a memoria, a qual exige sempre um cerebro com certa fórma, certa consistencia, certa extensão e uma constituição toda particular.

As sciencias estudando os differentes modos de existencia dos sêres, nós podemos desde já avançar com segurança que a lei a mais racional que deve presidir a classificaçãõ, e que emana da mais superficial observaçãõ, é a seguinte, estabelecida por Comte:—Toda classificaçãõ positiva deve ser feita segundo a ordem de generalidade decrescente e complicaçãõ crescente dos phenomenos considerados.

Por este modo as leis estabelecidas e estudadas em um dominio qualquer, servirão de base ao dominio seguinte, que lhe será subordinado, segundo o modo real de ser dos factos estudados em cada um delles.

Esta lei, como veremos, nem só se acha de conformidade com os nossos conhecimentos scientificos considerados geralmente, como tambem realisa-se espontaneamente no dominio particular á cada sciencia.

Nós podemos agora passar a estabelecer a classificaçãõ geral das sciencias abstractas, tal como a formulou o incomparavel legislador mathematico.

A simples observaçãõ do conjuncto exterior, que nos cerca, mostra-nos duas classes de corpos profundamente distinctos—uns inertes, não podendo modificar suas dimensões senão por justa posiçãõ de novas camadas sobre as já existentes, sem que para isto intervenha acçãõ alguma do nucleo já constituido, manifestando uma existencia, póde-se dizer, illimitada, inteira independencia entre suas partes; outros, pelo contrario, variando de fórma e dimensões d'entro

de certos limites, caracterizados por um duplo movimento interior de assimilação e desassimilação, dotados de um movimento espontaneo, constituindo uma individualidade perfeitamente unificada, apresentando uma existencia de duração limitada e variavel: os primeiros classificão-se de corpos brutos ou inorganicos e os segundos de corpos viventes ou organizados.

Cada um d'estes grupos se nos apresenta como caracterizado por um certo numero de propriedades, em cada um d'elles se manifestão certos factos ou phenomenos, intimamente relacionados entre si, embora perfeitamente distinctos, cujo estudo constitue os dominios respectivos da *cosmologia geral* ou *phisica inorganica* e da *sociologia* ou *phisica organica*, segundo referem-se ao primeiro ou segundo grupo que consideramos.

Entre os phenomenos que apresentam os corpos brutos, a observação nos mostra que uns se achão ao alcance de nossa intervenção e podem assim ser mais ou menos modificados segundo as exigencias de nossas necessidades reaes, emquanto que outros pela grande distancia em que de nós se manifestão achão-se absolutamente fóra da acção modificadora de nossa actividade.

Assim, por exemplo, nós podemos fazer com que um corpo caia com mais ou menos rapidez, augmentando-lhe ou diminuindo-lhe o peso, collocando sobre planos com inclinações differentes; podemos fazer com que um pedaço de madeira queime com mais ou menos facilidade secando-o ou humedecendo-o convenientemente; podemos modificar o estado liquido da agua sugeitando-a a um calor conveniente

ou a um grande resfriamento; isto, porém, limitado á superfície do planeta em que habitamos. O mesmo não se dá para os phenomenos que observamos n'essa parte do mundo vulgarmente denominada céo, pois que a grande distancia que d'elles nos separa, nos impossibilita inteiramente de poder modificar os factos correspondentes, que assim ficão só podendo ser explorados pela observação directa, desde então tornada sufficientemente rigorosa com o emprego de instrumentos destinados a tornarem mais energico o nosso poder visual.

Não nos é dado, por exemplo, fazer accellerar ou retardar o movimento de um planeta, modificar sua fórma, estudar sua constituição intima, etc.

Esta differença fundamental determina na cosmologia geral a divisão puramente subjectiva, mas emanada da observação, em *cosmologia terrestre* e *cosmologia celeste*.

Relativamente aos corpos organicos a observação mostra-nos que ha phenomenos communs a todos elles, tanto aos vegetaes como aos animaes, e que ha phenomenos particulares aos animaes taes como a intelligencia, o sentimento, a memoria etc.

Os primeiros constituem a vida em geral e os segundos representam a existencia animal no que ella possui de mais digno. Estes phenomenos caracteristico dos seres animaes pódem ainda ser considerados ou manifestando-se em cada individuo isoladamente considerado, ou nos individuos considerados em sua existencia collectiva, tão acentuada na especie humana. D'isto resulta para a sociologia a divisão ternaria, subjectiva, em *biologia* ou estado geral da ordem vital, *sociologia propriamente dicta* ou estudo di-

recto da ordem humana collectiva e finalmente *moral* ou estudo directo da ordem humana individual.

Os phenomenos que constituem estes tres ramos podem, como os da cosmologia terrestre, ser modificados, dentro de limittes determinados, pela intervenção humana. Para notar isto basta lembrar o effeito que em nós produzem o alcool, o café, o fumo e essa serie de medicamentos empregados pelos medicos diariamente. Isto quanto a biologia.

Quanto a sociologia e a moral, basta-nos comparar o estado actual da nossa sociedade com um seu estado sufficientemente remoto, ou o estado do individuo em sua infancia com o que elle é depois de convenientemente educado.

«As leis cosmologicas são essencialmente independentes das leis biologicas, que n'ellas só podem determinar modificações secundarias, quasi sempre dispensaveis para com o meio inerte, ainda que indispensaveis ao ser vivente. A existencia organica, pelo contrario, acha-se inteiramente subordinada á existencia inorganica, mesmo planetaria, e de modo que algumas alterações muito simples na constituição de um astro impede de ahi conceber-se a vida.

A generalidade superior das leis cosmologicas é ainda mais evidente pois que os corpos que ellas regem exclusivamente predominão, por tal forma que a vitalidade como que fica reduzida á uma especie de excepção. Sobre nosso planeta, unico em que nós podemos conhecer as leis biologicas, a vida não é possivel senão nas camadas superficiaes, e mesmo ahi a massa total dos seres correspondentes não constitue senão uma pequena fracção da massa inerte.

Assim, pois, sob o aspecto scientifico o estudo po-

sitivo da biologia exige um conhecimento geral da cosmologia, cujas leis principaes dominão sempre as diversas funcções vitaes. A subordinação logica é ainda menos contestavel pois que a simplicidade dos phenomenos inorganicos, consequencia de sua generalidade, os apresenta como unicos proprios á elaboração fundamental do methodo universal.» (1)

Apreciados os motivos que nos levão a estudar a cosmologia antes da sociologia, nós passamos a apreciar cada um d'estes dois grandes ramos scientificos em particular.

As duas grandes sciencias em que dividimos a cosmologia tem como objecto commum a Terra. A primeira, a cosmologia celeste,—estuda as relações reaes e geraes do nosso planeta com todos os outros do nosso systema ; a segunda, a cosmologia terrestre,—aprecia a sua natura particular.

Esta deve ser classificada depois d'aquella como abrangendo phenomenos menos geraes, menos independentes e portanto menos simples.

Com effeito, os factos que se realisam no nosso planeta nenhuma influencia têm sobre os phenomenos celestes. As sociedades modificam-se, os individuos nascem e desaparecem, a superficie da terra transforma-se sob a influencia da actividade humana, sem que de tudo isso resulte a minima alteração para a harmonia planetaria. E no emtanto basta-nos considerar a acção profunda que exercem os climas, a successão periodica do dia e da noite, sobre a existencia vital, para immediatamente avaliar-mos

(1) Comte—Système de politique positive—V 1, pag. 444

do quanto nos achamos subordinados ao conjuncto celeste.

«Na Europa, diz Hypocrates, os homens differem muito pelo tamanho e pelas fórmas, por causa das grandes e frequentes mutações do tempo no correr do anno. Calores intensos, invernos rijosos, chuvas abundantes, seccas pertinazes, ventos impetuosos, em summa, todos as temperaturas, ahí reinam successivamente e se substituem constantemente. Eis porque a apparencia exterior do europeu differe de uma cidade á outra.

Os effeitos do clima fazem-se igualmente sentir sobre os costumes, sobre o character, sobre o coração e mesmo sobre a intelligencia.

Isto vem ainda mais justificar o que deixamos dito sobre a subordinação do conjuncto vivente ao meio inorganico, ou por outra das leis sociologicas ás leis cosmologicas, pois que a palavra *clima* é empregada por Hypocrates como representando as circumstancias physicas proprias á cada lugar. (1)

Os corpos celestes só podendo ser explorados pela observação directa, as nossas indagações a este respeito ficaram sempre limitadas ao estudo dos phenomenos de extensão e movimento, que constituem o modo mais simples de existencia dos seres.

Se nós, porém, considerar-mos os corpos na superficie de nosso planeta, a questão complica-se evidentemente, pois que, n'este caso, os corpos além de nos manifestarem aquellas propriedades, exigem para que sejam perfeitamente conhecidos e conve-

(1) Hypocrates, citado por Cabanis—Rappports du physic et du moral de l'homme, pag. 421.

nientemente aproveitados, o estudo da constituição propria a cada um d'elles, o estudo do meio em que vivem, das propriedades particulares que d'ahi resultam; complicações estas que se tornam inapreciaveis para com o conjuncto celeste, visto a immensa distancia que d'elle nos separa e a extraordinaria rarefação do meio que os cerca.

A cosmologia celeste deve, assim, ser classificada e estudada antes da cosmologia terrestre, como abrangendo um modo de existencia mais geral, mais independente e portanto mais simples.

Estas duas sciencias se nos apresentam distinctas, quer consideradas sob o ponto de vista logico, quer sob o aspecto philosophico.

No dominio da cosmologia celeste os phenomenos estudados são por tal modo simples que a deducção quasi que ahi póde ser exclusivamente empregada, no dominio, porém, da cosmologia terrestre a maior complicação e variedade dos casos correspondentes estabelece como predominante a logica inductiva, que só ahi póde ser definitivamente constituida.

Os factos celestes pela razão de não poderem ser por nós modificados, trazem-nos ao espirito a noção preciosa de uma ordem systematica; por elles nós começamos a nos conformar com as leis que nos dominam, a conter o nosso orgulho pela subordinação continua a que nos sujeita uma necessidade irresistivel; elles tornam mais solidaria a sociabilidade humana, como constituindo uma fatalidade commum a todas as gerações existentes.

O sentimento do progresso, porém, só se nos manifesta quando consideramos os phenomenos terrestres. São elles que nos dão a primeira idéa do

modo porque com uma intervenção convenientemente dirigida, nós podemos melhorar as condições de nossa existencia.

Se os factos celestes nos dispoem a aceitar a fatalidade *systhematica*, inspirando-nos uma sugeição inteiramente passiva á uma ordem absolutamente inacessivel ás nossas modificações, os factos terrestres, pelo contrario, nos estimulam a actividade, inspirando-nos ao coração o sentimento de um melhor futuro e dispondo-nos o espirito a não aceitar o dominio absoluto das fatalidades celestes.

Taes são as differenças essenciaes entre os dois ramos da cosmologia os quaes nós vamos apreciar em seus respectivos dominios particulares.

A extensão e o movimento, unicás propriedades que estuda a cosmologia celeste, podem ser consideradas, ou como um modo de existencia particular aos corpos celestes, que só por ellas se nos podem tornar conhecidos, ou como um modo de ser geral proprio nem só a estes corpos, como a todos os outros que existem na superficie da Terra.

D'isto resulta a divisão objectiva da cosmologia celeste em *mathematica* ou *cosmologia abstracta* e *astronomia* ou *cosmologia concreta*.

Considerada objectivamente, como acabamos de o fazer, esta divisão parece não ser muito rigorosa visto que os dois ramos estudam os mesmos phenomenos apenas considerados sob pontos de vista diversos, mas uma tal supposição, perde de toda a importancia desde que consideramos a distincção subjectivamente, o que logo nos faz evidente a impossibilidade completa de estudar os phenomenos celestes sem uma previa elaboração *mathematica*.

Com effeito, os movimentos celestes sendo muito complicados pela influencia que os astros exercem uns sobre os outros, torna-se necessario ao espirito humano para chegar ao conhecimento de um facto tão complexo, partir de factos mais simples, em que as alterações, determinadas pela concurrencia dos corpos, não se manifestem e cujo estudo faz parte do dominio mathematico.

O mesmo dá-se para com a figura dos astros, cuja apreciação só é feita com vantagem depois de uma preparação mathematica, constituida pelo estudo de figuras, muitas vezes ideaes, muito mais simples, melhor deffinidas, permittindo assim deducções mais faceis.

Esta distincção no dominio da cosmologia celeste póde ser considerada como tendo sido a causa principal do desenvolvimento da positividade racional no dominio cosmologico, pela separação diffinitiva que estabeleceu entre a mathematica, base fundamental de nossos mais eminentes theorias e typo espontaneo do verdadeiro espirito philosophico, e a astronomia, cujas verdades sob a influencia de um regimen retrogado, tantos dissabores custaram ao venerando Galiléo, por afirmar que o sol era o centro do systema planetario, e tantas perseguições ao illustre Anaxagoras por ter avançado que o sol podia ser maior que o Peleponeso.

Separada da tutella religiosa, a cultura mathematica desenvolveu-se immediatamente, e mais tarde foi um poderoso auxilio para garantir a estabilidade das verdadeiras noções scientificas.

Quando Copernico apresentou as suas idéas sobre o systema do mundo, a opinião religiosa foi um dos

mais serios obstaculos que elle teve a vencer ; e certamente este teria prevalecido se não fossem os progressos rapidos então realisados no dominio mathematico : (1)

«A mathematica fica assim constituindo o termo o mais afastado, onde nos possa conduzir á contemplação das propriedades da materia ; e nós não poderemos ir além sem sairmos inteiramente do universo material. Porém, é tal a marcha do espirito humano em suas indagações, que depois de haver generalizado suas percepções até o ponto de não poder mais decompor-as, elle volta d'ahi sobre seus passos, recompõe novamente essas percepções e fórma pouco a pouco e gradativamente os sêres reaes que são objecto immediato e directo de suas sensações. Estes sêres immediatamente relativos ás nossas necessidades, são tambem aquelles que mais importa estudar. As abstracções mathematicas facilitam-nos o seu conhecimento, mas só nos são uteis uma vez que a ellas não nos limitemos.» (2)

Considerando sufficientes estas ligeiras considerações sobre a mathematica, cuja apreciação completa mais adiante a faremos, nós passamos a tratar da astronomia, que embora logicamente possa ser considerada como uma especie de mathematica concreta, scientificamente merecerá sempre um lugar distincto na classificação das sciencias preliminares, como representando, na phrase de d'Alembert, o monumento o mais incontestavel do successo a que se póde elevar por seus esforços o espirito humano.

(1) Laplace, Syst. du monde.

(2) D'Alembert,—Discour sur l'Encyclopedie—pag. 21.

O estudo das leis astronomicas livrou a humanidade das superstições e terrores que inspiravam notaveis phenomenos celestes ; por elle nós nos iniciamos no conhecimento da ordem natural que nos rege, ordem que embora pressentila no dominio mathematico, só se nos apresenta verdadeiramente consistente quando considerada em relação aos imponentes phenomenos celestes diurnos.

«A convicção, diz Humboldt, da regularidade que preside ao movimento dos planetas, foi o que sob todos os climas, mais contribuiu para fazer indagar-se a ordem e a lei das ondas do mar atmospherico, das oscillações do oceano, da marcha periodica da agulha imantada e da distribuição dos seres organizados sobre a superficie da terra.» O facto de nós não podermos modificar os phenomenos celestes levou o espirito humano a estudal-os, para melhor poder se conformar com elles e fazer com que da fatalidade de sua acção pudesse resultar o maximo proveito para a existencia collectiva. E é isto o que hoje nós vemos. O nosso calendario, por exemplo, é baseado no conhecimento perfeito dos movimentos da terra ; muitas festas religiosos são reguladas pelo movimento da lua, que entre os musulmanos constitue a base do calendario ; a nossa navegação é baseada em observações astronomicas ; o dia é, geralmente destinado ao trabalho, aproveitando-se assim a luz solar, superior á qualquer outra, e á melhor disposição do corpo ; a noite é destinada ao descânço, á vida da familia. Conformados, pois, com os factos celestes, nós os estudamos e tiramos d'ells o maior proveito possivel, ou nos preparamos para supportar do melhor modo sua influencia sobre as condições de nossa existencia.

Os movimentos e as figuras dos astros, como dissemos, são estudados pela applicação das theorias geraes anteriormente estabelecidas no dominio mathematico aos casos celestes.

A efficacia d'esta applicação, porém, exige uma exploração directa da existencia d'aquelles corpos, exploração cujas difficuldades para serem vencidas exigem no methodo universal aperfeiçoamentos, que a simplicidade dos phenomenos mathematicos apenas deixa esboçados.

Assim é que no dominio astronomico a arte de observação começa a ser systematicamente desenvolvida e o methodo inductivo, cuja natureza esboça-se imperfeitamente no dominio mathematico, fica diffinitivamente estabelecido.

Como não póde haver, observação sem raciocinio, toda observação puramente objectiva, é sempre acompanhada de uma certa elaboração intellectual, que lhe é indispensavel.

Este facto é evidente em astronomia, onde a observação de direcções simultaneas ou successivas é sempre acompanhada de uma certa theoria, que o espirito estabelece para construir movimentos ou fórmas, que a vista por si só não póde abranger. Esta simultaneidade da previsão e da inspecção, como observa Comte, affectando as operações preliminares, apresenta-nos uma falta de precisão, que determina a instituição das hypotheses scientificas, uma das propriedades logicas importantes da astronomia, em cujo dominio, melhor que em nenhum outro pode ser apreciado um semelhante processo.

Por este modo apreciada em sua importancia logica e scientifica, a astronomia constituirá sempre a base

objectiva de nossos conhecimentos systematicos, fornecerá ao nosso espirito a verdadeira natureza de suas especulações, fazendo-nos profundamente sentir que todas as nossas explicações reaes reduzem-se a ligar os diversos phenomenos pela semelhança ou successão, de modo a podermos por meio de uns prever os outros, e finalmente nos levará inevitavelmente a substituir as concepções absolutas pelas noções relativas.

Taes são os motivos logicos e scientificos que nos levão a considerar a astronomia como um elemento distincto na serie de estudos preliminares, e como caracterisando essencialmente o primeiro grupo das sciencias cosmologicas.

Vejamos agora a segunda divisão da cosmologia, que completa o estudo da existencia inorganica — a *physica terrestre*.

Quando se considera os phenomenos relativos á existencia inorganica sobre a superficie da terra, convem distinguir dois casos perfeitamente distinctos e inteiramente relacionados: um em que constituição intima dos corpos não é alterada, outro em que se manifesta uma alteração mais ou menos profunda nesta constituição. Assim, por exemplo, a queda de uma bola metalica, o aquecimento ou resfriamento d'agua, sua evaporação, o som produzido por um instrumento de musica, etc., são phenomenos que se manifestão sem que disso resulte modificação alguma na natureza intima do metal ou do liquido, que continua a sêr a mesma.

O mesmo, porém, não acontece com a combustão da madeira, do papel, com o enferrujamento, phenomenos que desde que se manifestão determinão nos

corpos uma alteração profunda, tornando-os muito diferentes do seu estado primitivo.

Esta distinção capital determina a divisão da physica t rrestre em dois ramos, respectivamente relativos a cada um dos dois casos que consideramos — *a physica propriamente dita e a chimica*.

Como facilmente observa-se os factos physicos s o mais geraes, mais simples e mais independentes do que os factos chimicos, a elles sempre subordinados. De facto, no primeiro caso os agentes s o estudados em si mesmos, independentemente de qualquer reac o mollecular especifica e no gr o normal em que elles s o modificam a constitui o exterior dos corpos, em quanto que no segundo caso essa modifica o sendo interior, intima, seu estado acha-se necessariamente subordinado ao dos agentes physicos que concorrem para produzi-la.

A physica assim considerada, liga-se pelo estudo dos phenomenos de calor, luz, gravita o ao dominio astronomico, ao qual fica subordinada; em quanto que pelo estudo das leis electricas estabelece espontaneamente suas rela es com a chimica della dependente, e finalmente, pelo estudo das propriedades da materia, ella estabelece, independentemente da chimica, a introdu o indispensavel ao estudo da existencia organica, permitindo a aprecia o material da conjunto humano.

Fica assim a unidade philosophica em parte estabelecida pela uni o da astronomia com a biologia, por intermedio da physica e da chimica.

Esta liga o entre a biologia e a astronomia foi muito vagamente esbo ada pela antiguidade. Pythagoras ensinava que o mundo era um grande animal,

um ser harmonico, no centro do qual achava-se o sol, principio de todo movimento, que era sua alma e de cujas emanções se constituíam os outros astros; os astrologos subordinavam os differentes acontecimentos da vida aos movimentos celestes, e pretendiam explicar o futuro dos povos pelo curso dos astros; os cometas eram amaldiçoados, como foi o de 1759, pelo papa Calisto, como portadores da peste, guerras e toda sorte de males.

Todas estas extravagancias nos deixam claramente ver o presentimento que já então havia da subordinação da existencia organica para com o conjuncto celeste. A falta de um cabedal sufficiente de noções scientificas com que então se podesse estabelecer positivamente esta subordinação, era preenchida por um systema de noções as mais extravagantes e assim eram satisfeitas as exigencias da epocha até que necessidades mais importantes determinassem a elaboração de noções mais exactas, que podessem substituir as primitivas theorias.

Esta renovação começa na idade media com o desenvolvimento da alchimia, que embora ainda muito afastada da astronomia, pela imperfeição dos estudos physicos, as suas relações intimas com os phenomenos biologicos, permitiram desde então o ensaio de uma concepção encyclopedica.

Semelhante construcção, porém, como era de esperar, foi puramente provisoria, pela necessidade que houve em preencher com as ideias chimericas da astrologia o grande intervallo determinado pela falta de estudos physicos, unicos que podiam estabelecer a passagem racional da astronomia para a chimica.

« A sciencia celeste, que os antigos haviam estabe-

lecido sobre nma base mathematica, ligava-se familiarmente ao estudo dos corpos viventes por intermedio da chimica. Este esboço de hirarchia encyclopedica foi certamente, como estado duravel, preferivel á anarchia scientifica que hoje prevalece. Mas, depois de havel-o dignamente apreciado convém reconhecer que um ultimo elemento tornava-se indispensavel para permittir a constituição final da verdadeira escala elementar de nossas concepções abstractas. Entre a astronomia e a chimica faltava uma sciencia fundamental propria a fornecer-lhes uma ligação natural que evitasse toda a aproximação chimerica. Esta necessidade que já Roger Bacon presentira, só foi dignamente satisfeita tres seculos mais tarde, depois do desenvolvimento decisivo da physica propriamente dita, sob a impulsão de Galileo, a qual ligando-se ao estudo da astronomia e da chimica tornava desde então apreciavel a unidade scientifica. A verdadeira concepção encyclopedica tornou-se d'ahi por diante tanto mais demorada, quanto maior foi a preponderancia simultanea do espirito de detalhe, que desviava os sabios da apreciação do conjuncto.

Assim, pois, a evolução historica do espirito humano confirma precisamente em dois casos essenciaes a grande lei que colloca a constituição de toda doutrina intermediaria de conformidade com os dois termos extremos de que ella deve constituir a ligação final.» (Comte, *Politique positive*.)

Pelo lado logico, a physica se nos apresenta como eminentemente propria ao desenvolvimento o mais completo do espirito inductivo, que só ahi fica precisamente apreciado quanto á sua natureza e destinação, como desenvolvendo e aperfeiçoando a

observação expontanea com o emprego essencial do methodo experimental, o qual inapplicavel em astronomia, vai-se tornando de applicação mais difficil á proporção que se considera dominios superiores como o da biologia, sociologia e moral.

Falta-nos, para completar o estudo da existencia inorganica, apreciar a chimica, cujo dominio refere-se, como vimos, aos differentes phenomenos de decomposição, que representão o modo mais complicado porque se nos tornam conhecidos os corpos brutos.

Considerada pelo lado scientifico, a chimica completa o estudo da cosmologia geral e elabora as bases definitivas da biologia; considerada sob o aspecto logico, ella não nos apresenta aquisição alguma nova para o methodo positivo e apenas limita-se a esboçar o methodo comparativo proprio á biologia, a estabelecer as nomenclaturas systematicas e a desenvolver a logica inductiva, constituida na physica, ahi melhor caracterisada em virtude da fraca influencia do espirito deductivo inteiramente livre da influencia mathematica.

« Os phenomenos chimicos, diz Comte, são caracterisados por uma actividade verdadeiramente intermediaria entre a que nos manifestam os astros e a que é propria aos corpos viventes. Só a chimica póde permittir um estudo racional da existencia vegetativa, sobre a qual repousa a animalidade e mesmo a humanidade. Sua intervenção torna-se ahi duplamente necessaria para apreciar o meio conforme as leis geraes das diversas combinações.

Ainda mais, a influencia encyclopedica da chimica prepara logo o espirito positivo para os habitos bio

logicos, fazendo surgir o primeiro sentimento systematico da hierarchia das existencias naturaes, tendencia esta que ahi se manifesta immediatamente quando se considera seu conjuncto como succedendo aos da astronomia e o da physica. Uma tal successão indica, com effeito, na actividade puramente inorganica uma progressão analoga, a que depois caracteriza a expontaneidade vital, primeiramente vegetativa ou de nutrição, depois animal ou de relação e finalmente humana ou social.

Sem duvida a serie cosmologica não comporta de nenhum modo os numerosos intermediarios que pertencem a cada modo fundamental da existencia superior, mas limitando-se aos tres gráus essenciaes da existencia inferior: primeiramente mathematica, depois physica, finalmente chimica, não é possivel deixar-se de reconhecer uma gradação hierarchica analoga á da vida, pois que cada um d'elles modifica o precedente a elle se subordinando, semelhantemente ao que se dá nos diversos estados organicos.

A' todos os titulos, pois, a chimica constitue um estudo mais elevado do que a physica, cuja destinação principal consiste, no fundo, a fornecer-lhe uma indispensavel introducção, ficando assim a chimica subordinada á physica.

A difficuldade hoje muito esquecida em separar dois estudos tão visinhos, constitue a principal causa historica da longa demora que experimentou a evolução das theorias chemicas, desde seu nascimento escolastico; pois que sua racionalidade não podia surgir mesmo no estado metaphysico senão depois da organização distincta das principaes doutrinas physicas, a qual permaneceu insufficiente até o seculoultimo.^o

Nos factos physicos a constituição intima dos corpos não se altera, nos factos chimicos, pelo contrario, o phenomeno caracteristico são notaveis modificações que apresenta essa constituição, manifestando uma actividade especial tão semelhante á espontaneidade vital que foram precisos muitos annos para que o espirito humano chegasse a separal-os deffinivamente.

Sob o aspecto physico os corpos só se differença pelo maior ou menor gráo em que elles possuem as propriedades correspondentes, sob o aspecto chimico elles se differença por ter cada um uma constituição especial, que lhes dá propriedades chimicas diversas. A prata, por exemplo, pelo lado physico, distingue-se do ouro por ser um metal menos denso, ductil e maleavel, etc., emquanto que chimicamente estes dois metaes apresentam constituição muito diversa e propriedades profundamente distinctas. — Assim é que o sal commum que nenhuma acção exerce sobre o ouro, immediatamente ataca a prata, modificando-lhe a natureza. Com a chimica fica assim completado o estudo do conjuncto inorganico.

Resumindo nós vemos que a existencia fundamental do meio terrestre é primeiramente estudada em seu modo mais simples constituído pelos phenomenos de extenção e movimento, que a abstracção nos permite considerar isolados de todos os outros: — é o dominio da mathematica, onde a simplicidade e generalidade dos casos correspondentes permitem o desenvolvimento o mais amplo da logica deductiva. Estudadas as leis mathematicas, a sua applicação aos casos celestes nos fornece as relações geraes e reaes do nosso planeta com todos os outros do sys-

tema solar : é o dominio da astronomia, onde começa a ser constituido o methodo inductivo, e onde abstracção directa fica plenamente systematisada. Depois d'isto a existencia inorganica passa a ser apreciada de um modo muito mais especial, em suas propriedades mais particulares, e nas modificações que não acarretam alterações na structura dos corpos : é o dominio da physica propriamente dita, onde fica a logica inductiva completamente desenvolvida, a experimentação diffinitivamente instituida ; finalmente no dominio da chimica a existencia inorganica é estudada em seu modo de ser mais complicado e particular, ficando ahi estabelecido o emprego das nomenclaturas systematicas e esboçado o methodo comparativo.

Consideremos agora a existencia organica.

Aqui a questão complica-se de um modo extraordinario. Todos os phenomenos estudados nos dominios anteriores concorrem agora para complicar os phenomenos vitaes, sujeitos a leis que podem variar de uma maneira notavel.

« Consideradas sob este ponto de vista (do estudo das existencias) as leis vitaes, a primeira cousa que ellas nos offerecem é a notavel differença para com as leis physicas. As primeiras constantemente variaveis em sua intensidade, sua energia, seu desenvolvimento, passam muitas vezes com rapidez, do ultimo gráo de prostracção ao ponto mais elevado de exaltação ; accumulam-se, enfraquecem-se alternadamente nos orgãos e tomam sob a influencia das menores causas mil modificações diversas. O somno, a vigilia, o exercicio, o repouso, a digestão, a fome, as paixões, a acção dos corpos que cercam o animal, tudo o

expõe a cada momento a numerosas revoluções. As segundas, pelo contrario, fixas, invariaveis, constantemente as mesmas em todos os tempos, são a origem de uma serie de phenomenos sempre uniformes. Comparai a faculdade vital de sentir, á faculdade physica de attrahir e vereis a attração ser sempre na rasão da massa do corpo bruto em que se observa, emquanto que a sensibilidade muda constantemente de proporção na mesma parte organica e na mesma massa de materia.

A invariabilidade das leis que presidem aos phenomenos physicos, permite submeter ao calculo todas as sciencias de que são objecto, emquanto que applicada aos actos da vida, a mathematica não póde jamás offerecer fórmulas geraes. Calcula-se a volta de um comêta, a resistencia de um fluido percorrendo um canal inerte, a velocidade de um projectil; mas calcular com Borelli a força de um musculo, com Keil a velocidade do sangue, com Jurine, Lavoisier a quantidade de ar que entra nos pulmões, é construir sobre areia movediça um edificio solido por si mesmo, mas que tem de cahir por falta de uma base estavel.

Esta instabilidade das forças vitaes, esta facilidade que ellas teem de variar a cada instante, para mais ou menos, imprime a todos os phenomenos vitaes um character de irregularidade, que os distingue dos phenomenos physicos, notaveis por sua uniformidade. Tomemos para exemplo os fluidos viventes e os inertes. Estes, sempre os mesmos, são conhecidos logo que sejam analysados uma vez com exactidão; mas quem poderá dizer conhecer os outros por uma só ou mesmo muitas analyses feitas nas mesmas cir-

cumstancias? Analisa-se a urina, a saliva, a bilis etc. tomadas indifferentemente em tal ou qual sujeito e de seu exame resulta a chimica animal. Seja; mas não é a chimica physiologica. E' se me permit, tem dizer, a anatomia cadaverica do fluido. Sua physiologia compõe-se do conhecimento das innumeradas variações que elles experimentam, segundo o estudo de seus órgãos respectivos. A urina, depois das refeições, não é a mesma que depois do somno; ella contem no inverno principios que lhe são estranhos no estio, quando as excreções fazem-se pela pelle. A simples passagem do quente para o frio póde, suprimindo o suor, enfraquecendo a exalação pulmonar, fazer variar sua composição

O mesmo dá-se para com os outros fluidos: o estudo das forças vitales nos órgãos donde ellas se originam muda a cada instante. Estes órgãos devem tambem experimentar alterações continuas em seu modo de acção, e por consequente fazer variar as substancias que elles separam do sangue. » (1)

Estas considerações de autoridade tão eminente, como é Bichat, vêm consolidar poderosamente a necessidade de estabelecer o estudo da cosmologia anterior ao estudo do conjuncto vivente.

Os seres viventes nos apresentam tres ordens de phenomenos distinctos: uns geraes, communs a animalidade e vegetalidade, taes como a nutrição, o desenvolvimento, existencia limitada, reprodução, outros só proprios aos animaes, taes são, por exemplo, o sentimento, a intelligencia, a sociabilidade, e finalmente outros que caracterisam a especie hu-

(1) Bichat, *De la vie et de la mort*, pag. 56.

mana, taes como o aperfeiçoamento *systematico* do sentimento e da intelligencia, tendo em vista um completo aperfeiçoamento da existencia *collectiva*. O estudo dos primeiros, isto é, da vida em geral, constitue a *Biologia*, o dos segundos, isto é, da ordem *collectiva*, constitue a *sociologia propriamente dita* e finalmente o estudo dos terceiros, ou da ordem humana individual, constitue a *moral*.

Os phenomenos biologicos sendo mais simples e mais geraes do que os phenomenos sociologicos, e estes menos particulares e complicados que os factos moraes, segue-se que a biologia deve ser classificada e estudada antes da sociologia, do mesmo modo que esta deve ser antes da moral.

E' impossivel, com effeito, conceber a existencia social sem primeiro suppor os individuos que a compõe em condições normaes para o exercicio de seus tres elementos essenciaes: sentimento, intelligencia e actividade, os quaes se achão subordinados á vida de nutrição; por outro lado emquanto a funcção que caracteriza a vida vegetativa é commum aos animaes e vegetaes, os phenomenos sociaes só se manifestão nos animaes e sobretudo na especie humana—A vida, pois, como nos mostram os vegetaes, póde existir sem a sociabilidade, emquanto que é impossivel conceber sociedade por mais rudimentar, sem ter supposto préviamente a vida.

Identicamente o desenvolvimento e aperfeiçoamento de nossas faculdades, considerados objectivamente, suppõem sempre a existencia social, unico modo de ser por que nós podemos fazer predominar em nós os sentimentos *sympathicos*, sobre os sentimentos puramente pessoaes.

E' erro, pois, querer-se corrigir criminosos pelo isolamento. Scientificamente devia o procedimento ser contrario, isto é, devia-se dar ao criminoso uma existencia mais intima com os seus semelhantes. Se por este modo não se obtivesse a regeneração, muito menos se a obteria pelo primeiro e então só ha um remedio e perfeitamente humano e social, em que pese aos metaphysicos, esse remedio é eliminar o individuo pela morte.

Com a biologia fica estabelecida a passagem natural do estudo inorganico para o estudo do conjuncto vivente, em seu modo de ser o mais elevado, o mais especial, cuja apreciação deve resumir o verdadeiro fim de nossas especulações.

No dominio biologico o methodo comparativo torna-se dominante e perfeitamente caracterizado. A comparação é ahi feita entre os differentes individuos da grande escala subjectiva dos seres viventes, entre os sexos, entre as diversas partes de um mesmo organismo, entre as diversas phases que apresenta o seu desenvolvimento e finalmente entre as differentes raças ou variedades de cada especie.

A complicação e solidariedade dos phenomenos vitaes, sobre tudo quando considerados relativamente ao homem, objecto essencial dos estudos biologicos, nos impõe o methodo comparativo como o mais racional, mais proprio e efficaz para as indagações vitaes.

« Assim, pois, diz Cabanis, quando se estuda o homem é necessario sem duvida consideral-o sob um ponto de vista geral, que abranja em um só todo o conjuncto das propriedades e operações que constituem sua existencia, afim de apanhar suas relações mutuas e a acção simultanea de que resulta cada

phenomeno que se procura submeter á observação. Ainda mais, depois desta primeira apreciação que fixa o objecto em seu todo, em sua disposição geral, o estudo detalhado de cada ordem de phenomenos, sem o qual o do conjuncto *systhematico* ficaria necessariamente imperfecto, exige que a observação o isole e o considere a parte. A severidade dos processos *analyticos* é sobretudo necessaria no estudo de objectos, tão variados, tão instaveis e tão delicados.» (1)

Se considerada objectivamente a sociologia está subordinada á biologia, é incontestavel que subjectivamente os phenomenos biologicos, devem ser considerados como profundamente influenciados pelas leis sociologicas, cujo conhecimento torna-se assim indispensavel ao seu estudo completo.

Estando, ainda mais, a biologia subordinada á cosmologia, é claro que o seu estudo deve ser preparado por uma instrucção dos dominios anteriores, de modo a não ficar a cargo dos puros cosmologistas a applicação das theorias cosmologicas aos factos biologicos, só perfeitamente apreciaveis depois de um sufficiente conhecimento da existencia inorganica e da existencia social a qual elles achão-se subjectivamente subordinados. Assim é que Descartes pretendia submeter toda a natureza simplesmente ás leis geraes da *physica* e do movimento. A circulação do sangue, a digestão, os movimentos musculares, elles os explicava por meio de uma materia subtil; comparava as palpitações do coração a uma fermentação. Os animaes erão para elle, simples machinas, o que de-

(1) Cabanis—Loc. cit. pag. 341.

terminou, mais tarde, a observação do incomparavel Fontenelle, dizendo que da união de uma machina cachorro, com uma machina cadella nascia uma machinasinha semelhante, emquanto que dois relogios unidos nunca se haviam reproduzido.

Todas as especulações positivas, diz Comte, re-pousam, pois, em ultima analyse, sobre um concurso continuo entre a fatalidade e a expontaneidade, causas respectivas da constancia e da variação. O dogma fundamental do positivismo consiste, assim, na harmonia fundamental entre duas sortes de leis, ao mesmo tempo antagonistas e solidarias: umas exteriores ou physicas, outras interiores ou logicas; em termos mais geraes e portanto melhor definidos, a constancia das relações naturaes resulta da conciliação permanente das leis biologicas com as leis cosmologicas.

Atravez as nuvens metaphysicas, os verdadeiros pensadores sempre presentiram mais ou menos confusamente este grande dualismo, base necessaria de todos os nossos conhecimentos. Desde Kant principalmente, tem-se comprehendido que as leis physicas suppoem as leis logicas e inversamente. Porém só a pura philosophia biologica podia proporcionar uma verdadeira consistencia a estas construcções preliminares, nas quaes em começo, as funcções intellectuaes achavão-se irracionalmente isoladas das outras funcções vitaes. Desde então reconheceu-se que uma tal harmonia, de modo algum absoluta, é sempre duplamente relativa á natureza do organismo e á natureza do meio. Ella varia, pois, mesmo sobre o nosso planeta entre os diversos modos ou grãos de animalidade ainda que suas variações

não possam ser arbitrárias. As especulações humanas apresentam-se assim como consistindo principalmente em conceber esta ordem relativa, tanto quanto comportar nossa natureza e exigir nossa situação. Este dogma fundamental, porém, só pôde ser plenamente compreendido e mesmo purificado de toda tendência para o absoluto, quando a noção das leis biológicas propriamente ditas foi completada e systematisada pela noção das leis sociológicas.»

Antes de entrarmos na apreciação da moral, convem-nos esboçar ligeiramente o dominio da sociologia propriamente dita. A sociedade composta de seres humanos, apresenta como elles certos órgãos, funções, uma certa disposição statica, cuja constituição e desenvolvimento acham-se subordinados a um conjuncto de leis, que constituem o verdadeiro objecto da sociologia. E' necessario, pois, distinguir na sociologia uma parte statica, em que são estudados os elementos constituintes da sociedade, taes como : a Familia, o Governo, o Poder temporal, a linguagem, a propriedade; e uma parte dynamica em que se aprecia o desenvolvimento da ordem assim constituida, as modificações correlativas porque passam os elementos que a compõem. A primeira nos dá a doutrina da ordem; a segunda apresenta a theoria do progresso, assim considerado como sendo o desenvolvimento da ordem correspondente.

O methodo predominante na sociologia é o methodo ou a filiação historica, que consiste essencialmente no uso racional de uma serie historica, isto é, de uma successão de acontecimentos, onde cada estado procede de um estado anterior e prepara o seguinte, de modo a permittir verdadeiras previsões.

Vejamos agora a moral, ultima das sciencias abstractas e a que estuda os phenomenos mais complexos e particulares. A individualidade humana scientificamente considerada compõe-se de tres elementos essenciaes: o sentimento, a intelligencia e actividade. O conjuncto d'estes tres elementos representa a *alma*, cujo local proprio é o cerebro. Estes elementos, uma vez estudados, resulta para nós o conhecimento das condições a que elles devem satisfazer, para que estabelecida a convivencia social, esta seja a melhor possivel. Este conhecimento nos fornece certas prescripções, que nos permitem fazer com que os individuos já incorporados a vida publica e os que começam a desenvolver-se, por um systema determinado de educação, se achem convenientemente aptos a voluntariamente respeitarem e seguir essas prescripções, baseadas essencialmente na noção do dever.

A moral, diz Cabanis, é muito necessaria aos homens. Ella constitue para elles uma necessidade quotidiana e de todos os instantes, para que elles a deixem assim entregue ao joguete d'essas opiniões theoricas (metaphysicas e theologicas), cuja incerteza e diversidade deviam por si só bastar para fazer sentir aos homens, os mais obstinados na crença d'aquelles a quem elles seguiam, o quanto era absurdo e perigoso estabelecer sobre uma base tão moveel principios que devem ser eternos. Elles procuravam longe de si o que lhes estava perto, e n'elles mesmo. As regras da moral derivam-se das relações mutuas que estabelecem entre os homens, suas necessidades e suas faculdades. Estas relações são constantes e universaes, pois que a organização humana é fixa,

ou, pelo menos, as modificações de que ella é susceptivel não podem de modo algum influir sobre ellas. E quanto aos motivos que levaram a praticar as regras da moral, elles estam na utilidade geral, que verdadeiramente as determina e constitue, nas vantagens particulares, ligadas ao habito de subordinar suas acções e mesmo suas inclinações a esse bem estar geral.

• Tal é, com effeito, a base eterna, tal é a sanção da virtude, cuja pratica é tão conforme á natureza humana, a quem ella proporciona um contentamento interior, independente de todo o calculo, e, que pela agradável necessidade das sympathias, de que ella desenvolve e aperfeiçoa todos os movimentos, dá ao coração uma satisfação constante e acaba por tornar os proprios sacrificios uma fonte de felicidades. A necessidade, porem, da moral deve fazer perdoar aos sabios da antiguidade o haverem querido dar-lhe todo o apoio possivel, apresentando-a aos homens como sendo a vontade de autoridades invisiveis, e mesmo de terem imaginado outra recompensa para aquelles que lhe ficavam fieis e outras punições para os que a ultrajavam, differentes dos da consciencia, da ordem immutavel das cousas e das leis sociaes. »

O estudo da natureza humana forma o verdadeiro dominio da sciencia moral.

Este problema complicadissimo, cuja elaboração decisiva está subordinada a um estudo completo das leis sociologicas, foi por longo tempo entregue aos metaphysicos e theologos.

S. Paulo esboçou-o quando estabeleceu a lucta permanente entre os bons e maus sentimentos: *homo duplex*.

Mas a verdadeira base scientifica do problema só ficou assentada quando o eminente genio de Gall elaborou a sua theoria cerebral, cujas imperfeições são justificadas se se attender ás condições do meio em que elle viveu, e o estado de atrazo em que se achavam as leis sociologicos, que tão profundamente influem sobre a evolução individual.

Gall estabelecendo a pluralidade das funcções da alma e localisando-as no cerebro, substituiu a lucta entre a *natureza* e a *graça*, imaginada por S. Paulo, pela opposição real entre as partes do cerebro onde se acham localisados os nossos instinctos menos nobres e mais pessoas, e a parte anterior onde se acha o que nós possuímos de mais nobre e elevado : o amor e a intelligencia. Por esta forma fica definitivamente estabelecido no terreno puramente scientifico, o magno problema, rebelde a tantos esforços e cuja solução só foi plenamente estabelecida muito mais tarde depois de constituido a elaboração sociologica, apenas delineada pelo eminente Condorcet.

Partindo, pois, da consideração do mundo apreciado sob o aspecto mais simples, nós chegamos gradativamente á consideração do homem em o seu modo de ser mais mais complicado e mais nobre : a existencia moral.

No dominio mathematico nós consideramos os phenomenos de extensão e movimento, abstrahindo dos phenomenos physicos, chimicos, etc. Por conseguinte se objectivamente estes ultimos se acham subordinados aos primeiros, subjectivamente os primeiros acham-se comprehendidos nos segundos dos quaes foram separados pela abstracção simplesmente para facilitar a apreciação. Do mesmo modo, quando con-

sideramos os phenomenos physicos abstrahimos dos factos chimicos, biologicos, etc.

Se, pois, estes ultimos factos são objectivamente subordinados aos primeiros, subjectivamente os factos physicos estam incluidos nos factos chimicos, biologicos, etc. dos quaes foram separados pela abstracção. Racionando de um modo identico nós chegamos á concluir que, se objectivamente os phenomenos mathematicos são os mais geraes por serem os mais simples, subjectivamente as noções moraes são as mais geraes por comprehenderem todas as outras, generalidade que decresce até ao dominio mathematico, onde é a menor possivel.

Tambem esta última sciencia é de todas a que nos fornece um conhecimento mais imperfeito dos seres, pois os aprecia em sua existencia mais grosseira e menos intima.

D'isto conclue-se, que assim como na classificação que acabamos de fazer nós partimos do mundo para o homem, seguindo objectivamente a lei de generalidade decrescente e dependencia crescente, do mesmo modo nós podiamos partir da consideração do homem para o mundo, e então a lei nos seria dada subjectivamente.

O conjuncto d'estas sete sciencias constitue a systematisacção do dogma positivo, cuja constituição synthetica póde ser dividida por dois modos distinctos, um mais objectivo e mais dogmatico, consistindo em separar o estudo do mundo inorganico do estudo do mundo organico, a cosmologia da sociologia, a apreciação da Terra, da apreciação homem; outro mais historico, e mais subjectivo, consistindo na distincção entre a ordem exterior e a ordem interior humana

ou moral. D'aqui resulta, que na primeira divisão a biologia constitue o preambulo da sociologia e na segunda representa o complemento da cosmologia. Sob o ponto de vista pratico as vantagens que nos offerecem as duas divisões binarias são identicas. A divisão dogmatica caracteriza a actividade da Humanidade, instituindo a reacção total da vitalidade sobre a materialidade, a divisão historica nos leva a considerar o progresso destacando os phenomenos inorganicos, nos quaes primeiramente desenvolveu-se a positividade, dos phenomenos organicos, onde só muito mais tarde veio a ser reconhecida a invariabilidade, cuja descoberta foi sempre difficultada pela facil modificabilidade dos factos correspondentes.

Esta divisão binaria dá lugar a duas constituições ternarias, cada uma das quaes apresenta propriedades essenciaes, que as distingue completamente. A primeira obtem-se considerando a economia universal segundo a progressão normal entre a ordem material, a ordem vital e a ordem humana.

Ella traduz melhor a continuidade, systematisa a invenção abstracta e os progressos concretos. A outra resulta da subordinação entre as leis physicas, intellectuaes e moraes.

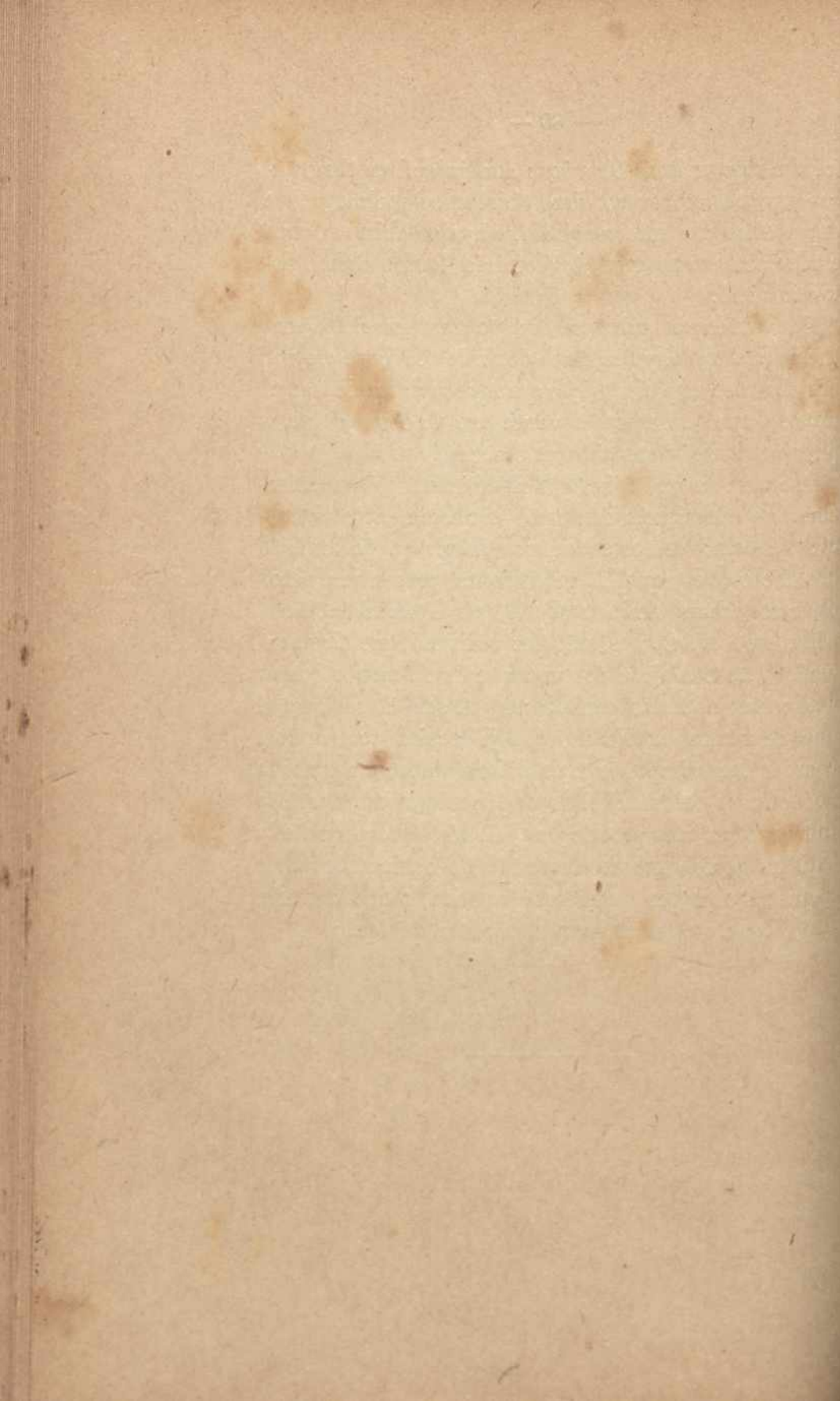
Ella traduz melhor a verdadeira unidade de nossas concepções e de nossos esforços, mostrando-nos claramente o fim social para que elles devem convergir e a inspiração sob que se devem desenvolver.

Estas divisões ternarias combinadas podem dar ainda uma disposição quaternaria constituida pela cosmologia, biologia, socialogia e moral. Ou então póde-se obter a disposição ternaria grupando os termos da escala encyclopedica dois a dois e assim

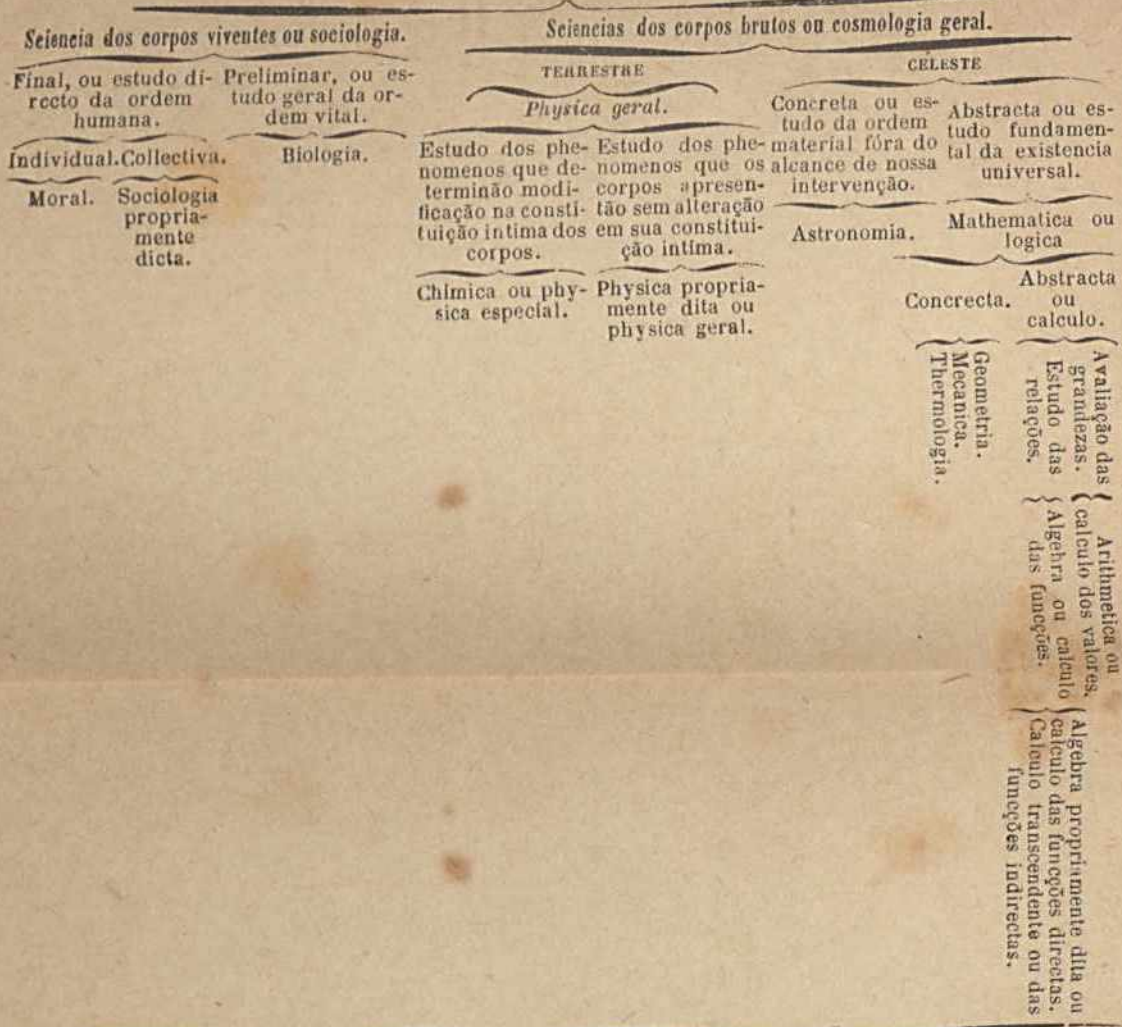
formar tres grupos binarios: um inicial mathematico-astronomico, outro final, biologico-sociologico e entre elles um intermediario, physico-chimico, que estabelece a passagem do dominio logico para o dominio vital.

Separando, na primeira divisão quaternaria, a mathematica da physica, no dominio da cosmologia, nós obtemos uma disposição quinquenaria, unica aceitavel, a qual apresenta a vantagem de começar pelos phenomenos os mais simples e accessiveis.

A ordem em que deixamos classificadas as sete sciencias que constituem os nossos conhecimentos abstractos, é como vemos a que nos inspira a observação dos factos, e aquella geralmente presentida pelos espiritos mais eminentes Bacon, d'Alembert, Ampère, etc. A. Comte, não fez mais do que firmar a elaboração completa das vistas mais ou menos justas d'aquelles notaveis pensadores. A sua classificação, que deixamos explicada, é hoje aceita por muitos como a mais simples e mais philosophica, e regeitada por outros pelos defeitos que necessariamente são inherentes a taes producções. A nós parece que ella satisfaz perfeitamente a questão do ensino, de parte as justas objecções a que está sujeita, o que tambem não falta e em maior numero a outra qualquer.



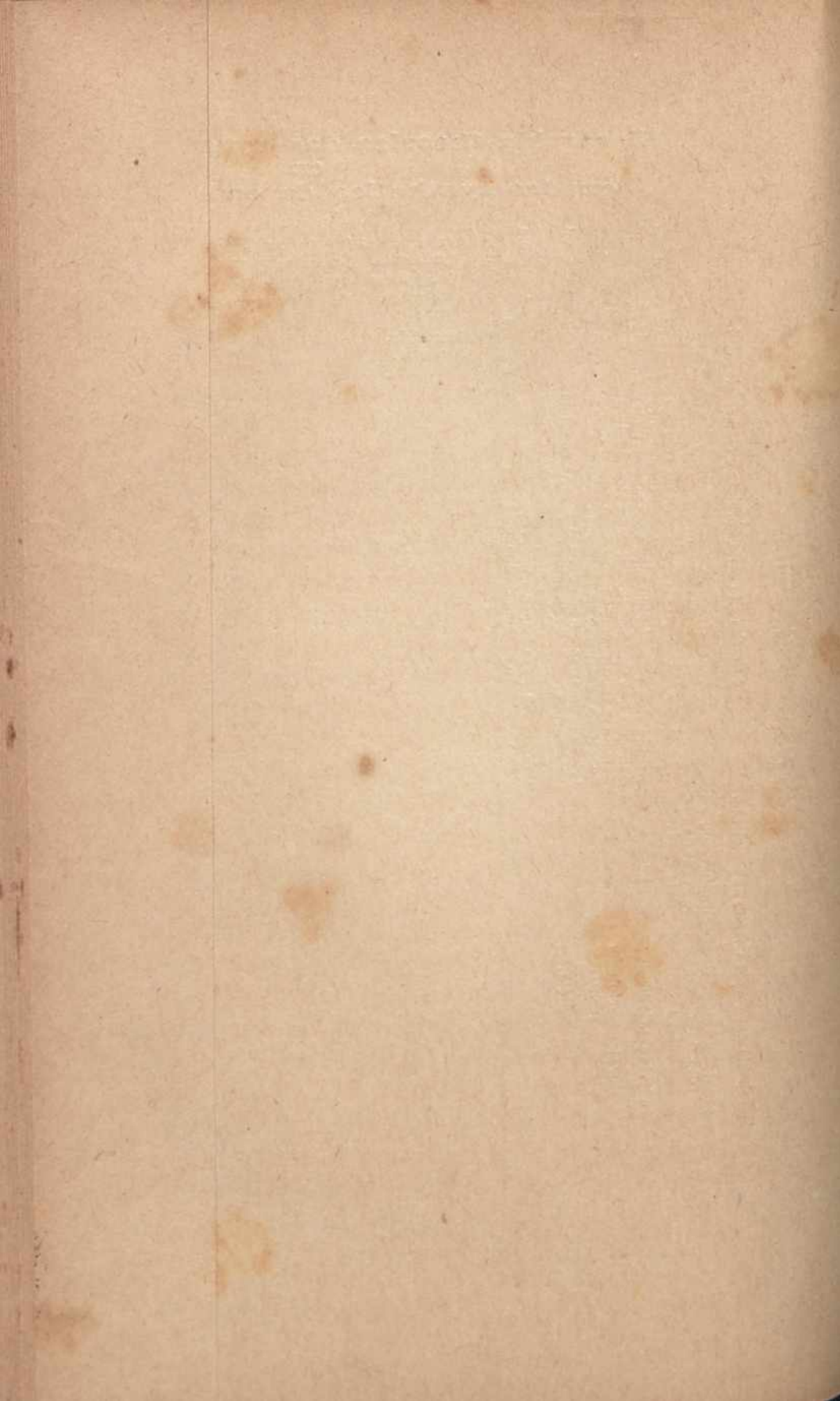
DIVISÃO DOGMÁTICA



Hierarchia theorica das concepções humanas
ou
quadro synthetico da ordem universal.

Sciencia preliminar ou philosophia natural. (Ordem exterior.)
 Sciencia final ou philosophia moral. (Ordem humana.)

DIVISÃO HISTÓRICA



APRECIACÃO DA LOGICA POSITIVA

Todas as nossas concepções são sempre constituídas de uma parte objectiva, que comprehende os materiaes fornecidos pela observação do mundo exterior e de uma parte subjectiva constituída pela construcção que as nossas faculdades intellectuaes formam com esses materiaes devidamente apreciados, Para obter estes elementos o espirito emprega a abstracção de modo a poder considerar os factos geraes independentes das acções particulares proprias a cada caso, e que si se fosse levar em conta jámais permittiriam resultados aproveitaveis. Assim libertados dos elementos perturbadores que a realidade objectiva nos apresenta, comprehende-se perfeitamente que as theorias que chegamos a construir são sempre traducções approximadas e jámais precisamente exactas da ordem exterior. Por conseguinte, desde que quizermos apreciar devidamente a ordem natural, é necessario ás leis theoricas, reunir o dominio das vontades, que serão representadas em sua influencia por essas perturbações que não nos foi possivel avaliar, e uma vez subordinadas ás theorias deduzidas d'essa mesma ordem exterior, simplificada pela abstracção, completará satisfactoriamente a concepção da harmonia universal.

Com as theorias nós temos em vista a descoberta das leis geraes que presidem a cada classe de phenomenos distinctos, ou das que são relativas a todos em geral, independentemente de sua diversidade. Com a pratica nós procuramos melhorar a ordem real levando em conta as influencias que a theoria não considerou por não comportarem uma exacta apreciação. A theoria é, portanto, aperfeiçoada em sua realidade, em sua harmonia com a ordem concreta, com auxilio da pratica e esta por seu lado é guiada em suas indagações pelas indicações theoricas que só podem formular previsões verdadeiramente racionaes, e por este modo determinar os limites possiveis á acção de nossa actividade. Sem o auxilio da pratica que estreita as suas relações com a ordem real, as nossas theorias nada valeriam, nenhuma vantagem nos poderiam proporcionar; seriam chimeras sem importancia alguma apreciavel; sem as indicações da theoria a nossa actividade seria muitas vezes levada a indagações impossiveis, a nossa alma se entregaria a esperanças absurdas, e os melhores esforços seriam inutilizados por trabalhos infructiferos.

Hoje, por exemplo, não ha mais quem procure chegar a determinar o *motu continuo*, quem investigue um modo de poder transformar o chumbo ou o ferro em ouro; já é muito reduzido o numero dos que se entregão a indagação das causas primeiras dos phenomenos que observamos. E isto porque as leis theoricas nos têm levado á conclusão de que todos os nossos esforços a esse respeito serão sempre inuteis e desnecessarios.

Emquanto na ordem abstracta procura-se apreciar

as leis geraes dos differentes modos de existencia, na ordem concreta especialisa-se cada acção pelo conjuncto de circumstancias que tendem a modifical-a. A primeira é, por conseguinte, mais simples, pois que cada facto ahi é considerado isolado de todos os outros; é mais relativa a intelligencia que a construo; a segunda é mais complexa, é mais synthetica, poisque ahi os seres são considerados quanto ao conjuncto total de sua existencia real, ella é mais conforme ao sentimento. A primeira acha-se essencialmente subordinada ás leis cerebraes que garantem o exercicio normal de nossas faculdades; a segunda essencialmente dependente das leis cosmologicas.

E' necessario, pois, distinguirmos a harmonia universal como realisada pela concurrencia de duas ordens distinctas e intimamente relacionadas: uma construida em nosso cerebro, theorica, constituida por um conjuncto de leis que nós concluimos dos materiaes que o mundo nos fornece pelos sentidos; outra exterior percebida em nosso cerebro e a qual embora sufficientemente explicada pelas leis abstractas, exige para sua completa explicação a intervenção das vontades que então predominam, como predominam as leis na ordem subjectiva.

A synthese final, que nós yamos muito ligeiramente esboçar, consiste em unificar essas duas ordens pela sympathia, de modo a que fique normalmente a actividade e a intelligencia subordinadas ao sentimento, e que o individuo fique subordinado á humanidade.

O Fetichismo, essa religião essencialmente sentimental de nossa infancia, suppondo todos os seres

animados das mesmas propriedades que o homem, o unico typo n'essa época, sufficientemente conhecido; apresentando todos os corpos como essencialmente sympathicos, pela similhaça que lhes suppõe como typo humano, esboçou o methodo subjectivo, que só muitos seculos depois pode se rehabilitar dignamente. Em essa synthese primitiva, porém, o dominio das vontades era absoluto; a abstracção ainda não tinha o desenvolvimento necessario para elaborar o estudo das existencias independentes dos seres, embora, segundo a bella observação de Comte, ella já se apresentasse na apreciação do phenomeno da morte. O theologismo desenvolvendo a abstracção pela noção dos deuses, formulou uma nova synthese toda objectiva que devia preparar a instituição da synthese final subjectiva, essencialmente social, na qual se concilia a ordem abstracta com a ordem concreta, por uma digna subordinação da ordem estabelecida pelo fetichismo, em que predominavam as vontades, á ordem legal em que predominam as leis, cuja exacta apreciação só foi possível com o desenvolvimento que recebo a abstracção no dominio theologico. Por esta fórma as leis devem dirigir a razão pratica o empirismo, e este por seu lado corrigirá, completando, as afirmações theo-ricas do dogmatismo.

A admissão das vontades como inteiramente indispensaveis á explicação exacta da ordem concreta, de modo algum póde alterar a positividade de nossos conhecimentos abstractos, visto como o caracter particular da acção porque ellas se nos manifestam, as torna necessariamente subordinadas ás leis geraes que a theoria estabelece. No dominio fetichista esta

subordinação sendo ignorada pela falta de conhecimento das leis geraes, comprehende-se que era muito natural admittir o absoluto dominio das vontades; no regimen actual, porém, essas leis geraes sendo completamente elaboradas, a admissão das vontades a ellas subordinadas, para explicar satisfactoriamente a verdadeira ordem concreta, é tão legitima como todas as hypotheses scientificas que são feitas no dominio da mathematica e da physica, as quaes tão voluntariamente acceitamos sem receio algum de que se altere a precisão de nossas conclusões definitivas.

A incorporação do fetichismo inicial á synthese final, constitue assim uma condição capital, indispensavel ao seu estabelecimento completo.

O meio inorganico era na concepção fetichista dotado de todos os attributos da natureza humana. «O mundo comprehende tudo, diz Times, elle é animado e dotado de razão: é o que tem levado muitos philosophos a dizerem que o mundo era vivente e sabio.

Cliantho que considerava o universo como Deus ou como causa universal e primeira de todos os effeitos, dava uma alma e uma intelligencia ao mundo e era a esta alma intelligente que pertencia propriamente á divindade Deus que, segundo elle, estabelecia sua principal séde na substancia etherea em este elemento subtil e luminoso que circula em abundancia em torno do firmamento e que d'ahi se espalha a todos os astros que por isto mesmo partilham da existencia divina.

Em o segundo livro de Cicero, sobre a natureza dos deuses, um dos interlocutores propõe-se a provar por

muitos argumentos que o universo é necessariamente intelligente e sabio. Uma das principaes razões que elle apresenta é que não é plausivel que o homem, que é uma parte infinitamente pequena do grande Todo, tenha sentidos e intelligencia, emquanto que esse Todo de uma natureza muito superior á do homem não os possue.» (*)

Esta concepção de intelligencia no meio inorganico, fazia com que a sua existencia se podesse modificar em suas condições, do mesmo modo porque a intelligencia do homem modifica as condições de sua vida, esclarecendo á acção de sua actividade as cegas impulsões de seu coração. Uma tal hypothese apresentava como absurda, como inconcebivel a existencia humana em semelhante meio, pois que as condições exigidas como indispensaveis á manutenção de nossa organização exigem uma maior fixidez do que esta é capaz, no meio que a cerca, tal como a nossa athmosphera. E este inconveniente desapparece immediatamente desde que se concebe a hypothese primitiva modificada de harmonia com a concepção scientifica da alma humana, isto é, desde que se conserve aos seres inorganicos ahi considerados affectivos, intelligentes e activos, tão somente o sentimento e a actividade. Isto estabelecido, a actividade do meio, que na concepção fetichica podia ser modificada pela intervenção da sua intelligencia tornando-a assim incompativel com a existencia humana, torna-se nesta hypothese como sendo cega-

(*) Dupuis—Abregé de l'origine de tous les cultes—vol. 1.^o pag. 51.

mente impellida pelo sentimento para a harmonia universal, cujas condições lhes são desconhecidas; apresenta-se como sendo uma fatalidade que a acção humana esclarecida pela intelligencia que lhe será exclusiva, modificará de harmonia com as necessidades reaes de nossa existencia e do nosso desenvolvimento. Para aproveitar ainda melhor a sympathica concepção de nossos antepassados fetiches, nós podemos suppor a Terra como tendo possuido tambem intelligencia, antes da existencia do homem; intelligencia que ella então empregava em derigir seu desenvolvimento de modo a estabelecer-se em condições, quer quanto á sua propria constituição, quer quanto ás suas relações com outros astros as mais favoraveis á existencia do conjuncto humano. O uso prolongado desses esforços intellectuaes foram enfraquecendo, diminuindo a sua intelligencia até que afinal o seu completo desaparecimento garantio ao meio a estabilidade necessaria para permittir a existencia animal. Esta concepção subjectiva estendida á todos os outros astros cujas relações com o nosso são verdadeiramente apreciaveis, completa a systematisação definitiva da admiravel hypothese de nossos avós.

Assim corrigida, a ideia primitiva, nos permittirá as idealisações poeticas de nossa existencia de modo a podermos desenvolver os nossos sentimentos sympathicos e aperfeioar as nossas noções philosophicas, uma vez que esses ideiaes respeitem sempre a ordem legal que as sciencias nos levam a conceber. A poesia terá assim um papel eminente em o regimen fual, como sendo das artes a mais esthetica, e, como tal, a mais propria ao desenvolvimento de nossas bonda-

des Moraes, Passando muito mais rapidamente que a arte politica, da contemplação dos differentes grãos de existencia inferior, a contemplação dos attributos mais nobres e dignos que constituem a nossa existencia moral, a poesia os idealisa, exagera-os apresentando-nos assim modelos, cuja imitação constituirá sempre o character distincto de nosso aperfeiçoamento.

Nenhum escriptor actual é mais realista que Camões ou Petrarca ou Dante; nenhum. Isso que por ahi denominam actualmente de eschola realista, é uma simples manifestação de degradação moral que todos devemos lamentar e procurar extirpar inteiramente. A verdadeira poesia, a arte dos Camões, dos Petrarcas, é pura, nobre, elevada e eminentemente encantadora. A convivencia constante em que nos podemos achar com as ficções poeticas, typos de uma perfeição que devemos sempre aspirar, desenvolve-nos a sympathia, e nos vae tornando cada vez melhor dispostos a subordinar os nossos moveis egoistas aos nossos sentimentos altruistas, de modo a podermos realisar o grande principio base de toda a moral: *viver para outrem*.

Si a poesia fica subordinada á philosophia que lhe fornece as verdades ás quaes ella tem sempre de respeitar subordinando-lhes as suas construcções, por outro lado a arte politica cujo fim é modificar dentro de certos limites a ordem social, fica subordinada a poesia que lhe fornece os idéias, de que ella se tem de approximar por modificações convenientes. As utopias ficam assim, desde que respeitem as verdades scientificas, indispensaveis ao estado normal de nossa existencia, e tão legitimas quanto as utopias geometricas ou mechanicas, taes como um solido invariavel,

uma superficie sem rugosidade alguma, um liquido incompressivel, uma athmosphera com igual densidade em todos os pontos, um movimento perfeitamente uniforme.

Estas considerações deixam bem claro o quanto a incorporação do fetichismo á synthese final é necessaria ao nosso aperfeiçoamento moral, pois que facilitando a contemplação abstracta, permittindo, pela contemplação concreta, obter imagens muito mais vivas por uma melhor apreciação do conjuncto dos seres, fazendo com que todos os outros seres se nos apresentem muito sympathicos, como possuindo os mesmos attributos que nós, desenvolvendo por conseguinte o sentimento, elle fornece um auxiliar poderosissimo ao desenvolvimento das impulsões poeticas, que como vimos trazem sempre como principal consequencia uma salutar influencia ás disposições affectivas de nossa alma.

Constituido na ordem concreta, o dominio das vontades, inspiradas pelo sentimento, é ainda necessario, para que um tal dominio não se torne absoluto como aconteceu no regimen fetichista, que a intelligencia representada nos dignos cidadãos intervenha e apresente como preponderante o dominio das leis, as quaes se devem achar necessariamente subordinadas todas essas actividades especiaes. Ora as leis abstractas que a intelligencia estabelece para explicar a ordem real compõem-se de dois grupos, umas universaes e outras relativas a cada especie distincta de phenomenos, achando-se estas evidentemente como mais particulares, subordinadas áquellas, que d'ellas são inteiramente independentes. Por conseguinte a ordem geral, natural, fica composta de pelo con-

juncto de leis universaes, pelos grupos de leis particulares e finalmente pela concorrência das vontades destinadas a substituirem as leis concretas proprias a cada caso, e que nos são absolutamente desconhecidas, ficando estas subordinadas ás segundas como aquellas subordinadas ás primeiras, que constituem a fatalidade mais geral a que nos achamos sujeitos.

Assim contitue-se a synthese *subjectiva* baseada na *sympathia*, pela consideração de subido valor moral, de que toda a actividade que nos manifesta a ordem material exterior concorre constantemente para o aperfeiçoamento universal ; pela certeza plena de que ha uma ordem geral fatal que nos domina, a qual a devemos respeitar ; pela convicção que nos dá, pelo amor que nos inspira da existencia de um ser superior a quem devemos nossos mais preciosos beneficios moraes, intellectuaes e physicos, e a quem devemos procurar conhecer para melhor amar e servir.

A ideia fetichista como fica estabelecida dispõe-nos na ordem concreta a affeição-nos á Terra, como sendo o meio em que se realisa essa ordem material que nos rege, como sendo o planeta que nos fornece as bases indispensaveis á nossa subsistencia e ao nosso desenvolvimento (1); na ordem abstracta, permite-nos a instituição logica dos meios subjectivos, que nos fornecerão o local ao qual podemos referir todos os phenomenos e que anteriormente erão exclusivamente destinados aos usos mathematicos; instituição

(1) Este facto todos podemos verifical-o em nós mesmos pelo amor que nos prende ao paiz em que nascemos, ao lugar onde passam a nossa mocidade. Os verdadeiros poetas têm descripto este sentimento de um modo sublime e real.

dependente de uma perfeita distincção entre o concreto e o abstracto, e que só poderia ser obtida com a regeneração scientifica, por estudos baseados em uma exacta apreciação da ordem exterior cuja immutabilidade era primitivamente reconhecida e attribuida aos astros.

« Primeiramente o céu, a terra, os mares, o globo brilhante da lua, os astros Titanicos, são animados por um espirito divino, que espalha-se por todos os membros do mundo, e esta alma que anima sua massa mistura-se a esse grande corpo. D'ahi emana a vida dos homens, dos rebanhos, das raças diversas, dos passaros aérios, dos monstros que vivem no seio dos mares. Esse fogo originado de principios celestes entretem o vigor d'essas almas desde que ellas não são retidas por corpos grosseiros ou alteradas por ligações terrenas e membros perciveis. Em este estado ellas temem, ellas desejam, se affligem ou se divertem». (1)

A nova synthese estabelece a immutabilidade nas leis e nos impõe a submissão á ordem assim considerada como indispensavel ao nosso aperfeiçoamento moral.

A nossa submissão voluntaria á ordem universal fazendo com que o altruismo predomine sobre o egoismo, dá logar a uma reacção benefica que nos vae tornando a alma cada vez mais disposta a dar á vida collectiva os encantos, os prazeres, as alegrias e consolos que resultam da solidariedade nos sentimentos, da participação de cada um nas afflicções

(1) Virg.—Eneida—Tradu. franceza de Pongerville—pag. 212.

dos outros, dos sacrificios mutuamente prestados, das abnegações sinceras e desinteressadas ; vae preparando-a a melhor apreciar as vantagens preciosas que nos resultão, os trabalhos fatigantes que nos são poupados, pela continuidade completa e dignamente acceita com as gerações passadas.

«Antes que a existencia, diz Comte, dos instinctos altruistas fosse systematicamente apreciavel, a submissão parecia ordinariamente degradante. Em todas as religiões locaes e temporarias que preparam a religiões universal e perpetua, o homem adorava deuses cuja felicidade consistia sobretudo em satisfazer seus desejos quaesquer sem soffrer nenhum jugo. Não se podia então conceber que a felicidade devesse resultar da obediencia, que parecia jámais poder tornar-se voluntaria. A veneração entre os inferiores não era enobrecida pelo devotamento dos superiores, cujas ordens ficavam arbitrarias segundo os typos divinos. Philosophicamente julgado, o desenvolvimento scientifico tende a fazer gradualmente surgir uma maravilhosa apreciação, collocando a grandeza intellectual em uma exacta submissão do interior para com o exterior.

Hesitação ou divagação, taes eram por um contraste decisivo as consequencias habituaes da anarchica liberdade das abstracções metaphysicas. Ellas levavam a sentir por toda parte a necessidade de fundar a systematisação final do theologismo, sobre uma submissão continua da razão á fé. (1)

Primitivamente as leis dos phenomenos sendo des-

(1) Comte—Synthese—pag. 16.

conhecidas, a sujeição á ordem immutavel era inspirada pelo terror; mais tarde imaginaram-se vontades superiores, existindo independentemente dos corpos, dirigindo a actividade d'estes; podendo modificar a ordem natural; tornando-se essas vontades caprichosas e deixando-se levar por meio de rogos, promessas e sacrificios, affastando-se assim inteiramente essa submissão inicial á ordem immutavel, a qual só pôde ser mais tarde dignamente rehabilitada no regimen scientifico, que apreciando as vontades preciosas que d'ella resultam, estabeleceu como o traço mais caracteristico de nossa verdadeira regeneração a subordinação voluntaria ao conjuncto de fatalidades que nos rege; a acceitação de coração, da submissão á ordem universal, como unico meio de podermos chegar á nossa completa rehabilitação moral.

Unificadas pela synthese subjectiva as fatalidades que nos dominam, o regimen final completa-as com a concepção subjectiva eminentemente philosophica do espaço, que até o seu apparecimento só havia sido instituida para os usos exclusivos do dominio mathematico. Esta concepção apresenta-se como absolutamente necessaria para tornar perfeita a contemplação intima do mundo, que sómente apreciado pelo lado puramente scientifico, deixaria de exercer a benefica influencia sobre o sentimento, cujo aperfeiçoamento deve constituir sua principal destinação. O espaço serve como sabemos, no dominio mathematico para nos representar as formas ou os movimentos dos corpos independente de sua observação directa; com estas imagens nós podemos abandonar completamente as forças interiores, a constituição particular

a cada um d'elles, e suppor essa fórma abrangendo uma certa porção d'esse meio denominado espaço, ou percorrendo n'elle uma certa extensão. Esta noção exacta deve ser scientificamente generalisada suppondo-se o espaço como proprio a representar o mesmo papel para com os phenomenos physicos, taes como a côr, o cheiro, o som e as fórmas das vegetaes e animaes, ou por outra como proprio a representar o estado estatico dos seres viventes. Esta profunda concepção subjectiva do espaço representa um complemento indispensavel á noção do mundo, como permittindo a instituição decisiva e o uso geral das imagens dos seres considerados. A importancia que tem este auxiliar poderoso de nosso sentimento acha-se perfeitamente esboçada pela civilisação chinesa na adoração ao céu, cuja noção o desenvolvimento muito imperfeito da abstracção não permittio separar definitivamente do conjuncto celeste, com o qual o haviam confundido as indicações astrolaticas. « Os chinezes, diz Dupuis, situados na extremidade oriental da Asia, adoram o céu sob o nome de *Tien*, e este nome designa segundo uns o espirito do céu, segundo outros o céu material. O céu supremo ou *Chang-Tien* percebe tudo, segundo elles, e tudo comprehende. .

« Os chinezes têm construido um templo ao grande —ser composto da reunião do céu, da terra e dos elementos, ser que corresponde ao nosso mundo e que elles chamam *Tay-ki*. E' nos dois solsticios que os chinezes vão render culto ao céu. » (Dupuis—loco —cit—pag. 29.

Modernamente a concepção embora obscurecida pela anarchia scientifica, que caracteriza a época

actual, foi estabelecida como inteiramente necessaria á unificação das noções abstractas completamente dispersas. O ether universal com que grande numero de sabios eminentes pretendem explicar todos os phenomenos physicos, da luz, do calor e da côr; este gaz tenue, imponderavel, elastico, penetrando por todos os póros da materia é a prova mais evidente de que o espirito hamano ha muito que presentio a necessidade da concepção de uma séde para os phenomenos que nos fornecem as leis abstractas. Esta hypothese para ser caracterisada segundo a sua verdadeira destinação, basta ser concebida como sendo uma concepção subjectiva instituida para fundar a synthese final. Assim apreciadas, a adoração dos chinezes e a ideia moderna do ether universal, devem ser consideradas como tendo preparado a instituição do meio subjectivo instituido pela sciencia moderna.

A synthese subjectiva fica, pois, constituida pela unificação beseada na sympathia, dos tres elementos cujo conjuncto deve constituir sempre o objecto da convergencia de nossos mais elevados esforços, o alvo capital de nossas mais aturadas e constantes locubrações — a Humanidade, constituida por todos os seres convergentes, passados, presentes e futuros, inspirada em sua actividade pelo sentimento, esclarecida pela intelligencia, que lhe é exclusiva—; a Terra, dotada de sentimento e actividade e os outros astros com os quaes as suas relações sejam verdadeiramente apreciaveis, e finalmente temos o Espaço passivo em sua constituição, mas dotado de sentimento que nos permite a construcção das imagens e formulas. Nós passamos agora a apreciar a logica

que melhor convém a uma synthese como a que acabamos de caracterisar.

As nossas funcções cerebraes dividem-se em especulativas e affectivas; as primeiras constituem a intelligencia, o espirito, e as segundas o coração, o sentimento. Toda especulação está sempre dependente de uma impulsão affectiva que a coordena e a justifica. Sem um desejo anterior toda especulação seria, necessariamente disparatada, sem ordem, sem destino, emfim. Para pensar é preciso que antes tenha sido indicado pelo sentimento uma direcção qualquer que nos forneça os materiaes.

Esta subordinação do espirito para com o coração é sancionada pelos principios da moral a mais antiga de que possamos ter conhecimento. Já a Igreja Catholica ha muito ensinava que os desvios do espirito provêm de um vicio no coração. Entre as nossas faculdades affectivas convem fazer uma distincção fundamental e essencial: umas são affectivas propriamente ditas e outras são praticas. As primeiras formam o coração, as segundas o character ou a actividade. Dada a impulsão pelo coração, a intelligencia esclarece a conducta, e só então é que a actividade intervem para executar. Toda acção qualquer fica assim sendo determinada por um sentimento e preparada por uma observação. Sem o auxilio da intelligencia o sentimento seria completamente cego, como desde a mais remota antiguidade o fez sentir a sabedoria vulgar. Assim é que sempre que uma emoção qualquer nos deixa em estado de não podermos pensar, os actos que em taes circumstancias praticamos são considerados como verdadeiros actos de loucura e nós dizemos: a paixão cegou-me, eu não sei o que fiz.

Este facto justificado pela observação quotidiana leva-nos a considerar subjectivamente a região cerebral affectiva inteiramente alheia á toda communição directa com o mundo exterior, sendo-nos este conhecido directamente pela região especulativa e activa com elle communicadas por intermedio dos nervos sensitivos e motores.

A região especulativa recebendo pelos nervos que lhe são correspondentes as impressões causadas pelo meio exterior, leva-as á massa affectiva que recebendo a emoção reage sobre a parte activa que transmite pelos nervos motores as contrações destinadas a excitar o movimento nos orgãos para esse fim destinados.

As regiões especulativa e activa podem ter espontaneidade, isto é, actividade independentemente da emulação da região affectiva. A acção d'esta porém torna-se de absoluta necessidade para coordenar, para dar direcção á acção das duas primeiras, que sem este coordenador affectivo tornar-se-hia desordenada e inteiramente infructifera.

Para fazer qualquer cousa e pensar na melhor maneira de fazel-a é necessario, sem duvida alguma, ter antes sentido o desejo de realisal-a. Esta verdade traduz-se na fórmula seguinte: *agir por affeição, pensar para agir.*

Uma pessoa, por exemplo, se acha na janella do do segundo andar de uma casa, vê uma linda flôr no jardim, e deseja possuil-a, para enfeitar-se: está ahí a estimulação dada pelo sentimento. Si ha falta de uma intelligencia que esclareça, levando a pensar no meio mais conveniente de satisfazer esse desejo, a actividade será tão sómente impellida pelo senti-

mento, que é cego em suas impulsões, e então o procedimento da pessoa será atirar-se directamente da janella ao jardim onde está o objecto desejado. Si porem, existe a intelligencia, ella intervem logo depois, mostra que a quédia da janella é fatal, porque a gravidade actua sobre os corpos, o que póde determinar a morte ou fractura, e que o meio mais conveniente é descer por escadas interiores que conduzem seguramente ao logar observado. Este esclarecimento dado, a actividade tem uma direcção definida, coordenada, á qual ella deve satisfazer.

Os nossos sentimentos ou são pessoas ou collectivos: no primeiro caso, constituem o egoismo, que comprehende os nossos instinctos mais energicos, mas tambem menos dignos taes como o instincto nutritivo e sexual, os segundos constituem o altruismo que abrange o que nós possuimos de mais elevado, de menos individual, de mais nobre, taes como: o apego, a veneração e a bondade. Os primeiros são mais energicos que os segundos e por este facto são indispensaveis ás nossas estimulações intellectuaes que por elles são sempre determinadas, os segundos, porem, são inteiramente indispensaveis á coordenação e unificação de nossas disposições moraes e intellectuaes, que seriam absolutamente impossiveis sob o dominio exclusivo dos moveis egoistas, cuja opposição mutua tenderia a inutilisar inteiramente os esforços da actividade.

As faculdades especulativas são de duas sortes: umas destinadas á concepção, outras á expressão. A expressão traduzindo as concepções, permite-nos transmittil-as aos nossos semelhantes, com os quaes convivemos, poupando-lhes assim trabalhos que se

tornariam desnecessarios, e ainda mais permite-nos conservar-as de modo a que possamos avaliar o seu gráo de adiantamento, aperfeiçoal-as e medital-as com justeza e perseverança, finalmente, com ella fica plenamente estabelecida a solidariedade humana que leva as gerações presentes a melhorar e augmentar os elementos elaborados pelas gerações passadas, constituindo assim maior cabedal que deve servir de base á existencia das gerações que hão de vir.

Estas duas funcções só se caracterisam perfeitamente quando o ser existente possui já um certo sentimento, que o leva á vida de familia e mesmo a convivencia social. A concepção apresenta então duas phases distinctas e inteiramente relacionadas, inseparaveis: uma em que o espirito colhe do mundo exterior os materiaes objectivos de que necessita, outra em que estes materiaes são elaborados de modo a constituirem as theorias. Na primeira as impressões causadas pelos seres que nos cercam sendo recebidas, levam á construcção das imagens; na segunda as ideias que d'ahi resultam sendo combinadas, constituem os pensamentos; a primeira phase constitue a contemplação e a segunda a meditação. A contemplação póde ser relativa aos seres ou aos acontecimentos. Assim as impressões que nos vem pelos sentidos são essencialmente relativas ás propriedades.

Pelos ouvidos, por exemplo, nós só podemos ter conhecimento das qualidades sonoras dos objectos; pelos olhos, da côr, da fórma, da grandeza, da situação. Estas propriedades, porem, se nos apresentam conglobadas, embora unidas por sentidos differentes. Logo que nós contemplamos o ser, a noção que d'ahi

resulta ficará confusa e vaga sempre que a attenção determinada por uma impulsão affectiva não nos leve a firmar mais certas propriedades e abandonar outras que não nos interessem, cuja intervenção só poderá trazer uma complicação inutil.

Este trabalho exige um órgão especial passivo em si, que excitado de um lado por uma impressão e coordenado por outro lado por uma impulsão affectiva, nos permita desprezar, entre todas as impressões que se nos apresentam simultaneamente aos sentidos, todas aquellas que nos são indicadas pelo movel affectivo, e só apreciar aquellas que nos possam fornecer a imagem do ser contemplado : a contemplação é n'este caso synthetica, concreta. Si a concentração da attenção fôr ainda mais energica, mais particular ; si limitar-se á simples apreciação das propriedades, cada uma de per si, a contemplação diz-se abstracta, e os rgãos cerebraes correspondent's a cada uma d'ellas são inteiramente distinctos.

Elaborada a construcção sob a impulsão do sentimento, a expressão é o estado final porque ella se manifesta. Esta funcção traduz sempre em o ser um estado interior da alma. Nos seres inferiores ella limita-se aos proprios actos, emquanto que nos seres já sociaes ella póde adquirir uma admiravel perfeição, como acontece com a especie humana.

A região especulativa, como dissemos, recebendo pelos nervos sensitivos as impressões exteriores, actua sobre a parte affectiva, e esta transformando-as em emoções reage sobre a parte activa, que actuando sobre os nervos motores produz contracções determinadas, que correspondem ao estado particular da região affectiva. Por esta fórma as contracções

por si só são sufficientes para fazer espontaneamente conhecer o estado intimo d'alma; são verdadeiros signaes de indicação de nossas emoções interiores espontaneas ou resentidas.

Para exprimir os pensamentos e sentimentos bastanos, por conseguinte, tornar voluntaria e usual a relação entre as sensações e as contrações correspondentes.

O signal será, pois, a *relação constante que liga uma sensação e uma contração, de modo que a sensação lembre sempre a contração e reciprocamente.*

As nossas concepções quaesquer são, pois, constituídas do seguinte modo: 1.º, o sentimento e depois o espirito formam as imagens que nos permitem, independentemente da presença dos corpos, consideral-os em o conjuncto de sua existencia; 2.º, o sentimento actuando sobre a parte activa traduz por meio de signaes a elaboração a elle assim subordinada.

Nós difiniremos, pois, a Logica como sendo o *curso normal dos sentimentos, das imagens e dos signaes para nos inspirar as concepções que convêm ás nossas necessidades, moraes, intellectuaes e praticas.*

Reduzidas só ao sentimento, nossas concepções podiam, é verdade, ser complexas, por uma elaboração dos pensamentos, considerados relativamente ás emoções correspondentes, mas um tal modo de operar não só traria trabalhos muito penosos e conclusões confusas, como tambem seria pouco voluntario. As imagens sendo intimamente ligadas ás emoções que ellas produzem na parte affectiva, e sua lembrança e representação sendo-nos perfeitamente voluntarias, permitem-nos um regimen logico muito

mais preciso e mais rapido que o primeiro, porém tambem menos seguro e rigoroso, no qual em logar da comparação directa das emoções devidas aos pensamentos, comparam-se ás imagens obtidas pela contemplação correcta.

Ora, sendo-nos facultativo lembrarmo-nos em um instante qualquer que desejarmos, de imagens de objectos observados em épocas passadas, comprehende-se facilmente o quanto este modo logico de proceder é proprio á facilitar por sua propria espontaneidade todas as nossas concepções. Porém, tambem convém notar que taes qualidades o apresentam como pouco apto a dar ás nossas construcções a precisão e promptidão que ellas exigem para que nos possam permittir faceis deducções e inducções completas.

Para obter um tal resultado intervém então os signaes que fixando as imagens, as tornam muito mais proprias á facil comparação, á apreciação detalhada, sem confusão, facilitando assim profundamente os raciocinios. Nós vamos apresentar um exemplo muito simples, que nos fornece um phisiologista francez, para apreciarmos a marcha geral da operação cerebral.

Supponhamos que um individuo apoiando-se á uma pedra experimenta uma certa resistencia, um certo peso, e que depois contempla-a. O corpo actuando sobre os olhos produz nos nervos sensitivos vizuaes uma certa impressão, que será complexa porque o modo de existencia que a vista pôde apresentar é composto da côr, da fórma, da grandesa, da situação.

Esta impressão combinada com a da resistencia

que o sentido do tacto havia antes recebido, ligados sob a assistencia do sentimento, que dá a impulsão primitiva, formam uma imagem, que actuando sobre a região affectiva produz uma determinada emoção a ella desde então intimamente ligada. A região affectiva assim estimulada reage sobre a massa activa, que actuando sobre os nervos motores do órgão vocal, por exemplo, produz certas contrações que levam o homem a pronunciar a palavra *pedra*.

Supponhamos agora que o mesmo individuo vê depois esta pedra a cahir de uma certa altura. A vista é immediatamente impressionada pelo corpo, esta impressão determina a recordação da imagem que anteriormente já o mesmo objecto havia fornecido ao cerebro, a imagem uma vez despertada achando-se como dissemos intimamente relacionada com a emoção que ella a primeira vez produziu, actua sobre a parte affectiva, que por intermedio da região activa traduz o seu estado pela palavra *pedra*.

A segunda cousa que impressiona a vista do observador é a mudança de situação que a pedra experimenta. Este facto levado ao cerebro pelo órgão vizual segue a mesma marcha que já descrevemos e os nervos motores actuando, por exemplo, sobre os musculos dos braços os leva a acompanharem por um movimento descencional a quêda do corpo observado. Supponhamos que a pedra chega ao terreno e produz um fracasso. Este facto levado ao cerebro pelo órgão auditivo seguindo uma marcha identica, dá como resultado uma contracção no órgão vocal e o homem pronuncia: *pedra cahe*.

Tal é de um modo geral, a marcha convergente que normalmente seguem as regiões cerebraes para

produzirem as construcções logicas de nossas concepções. No regimen fetichista a logica do sentimento foi sempre dominante. Um estado em que todos os seres nos eram assemelhados, um estado por conseguinte muito proprio ao desenvolvimento da sympathia, devia necessariamente favorecer todo o dominio relativo ao sentimento. Os signaes limitavam-se a contrações: a mimica, directamente derivada da reacção affectiva sobre a parte activa.

A abstracção desenvolvendo-se no regimen polytheico, as imagens pareceram dominar; a substituição das vontades directas dos deuses fetichistas, pelas vontades indirectas dos deuses polytheicos, levou a imaginação a construir novos typos que pudessem satisfazer ás necessidades do novo regimen.

«Se se nota que todas as nossas concepções são determinadas por um sentimento preponderante, vêr-se-ha o quanto a synthese fetichica deveu mostrar-se mais favoravel que nenhum outro regimen ulterior ao espirito constructivo. Ella indica directamente o movel e o fim de todos os nossos esforços especulativos. O polytheismo menos synthetico os secundou muito activamente pela instituição das imagens. Incitando o desenvolvimento de nossas faculdades deductivas pelo emprego dos signaes, o monotheismo assegurou a sua cultura final.» (1)

A doutrina moderna, como se vê, apreciando devidamente as vantagens dos tres modos logicos desenvolvidos em cada phase da evolução social fal-os concorrer junctamente, de modo a poder, baseada

(1) Audiffrent—Du cerveau e de l'innervation d'après A. Comte—pag. 37.

sobre a theoria scientifica da alma humana, fundar definitivamente a logica final.

O verdadeiro espirito da sã logica, que estabelece como condição fundamental de qualquer construcção a subordinação dos elementos intellectuaes e activos ao elemento affectivo, foi plenamente presentido e consagrado pelo fetichismo inicial que, quer sob o ponto de vista de doutrina, quer quanto ás questões de methodo, é incontestavelmente muito superior ao regimen posterior.

Attribuindo a todos os corpos materiaes as affeições proprias ao typo humano, essa synthese primitiva constitue o esboço mais bem delineado, o complemento indispensavel da logica positiva.

Com ella ficou definitivamente reconhecida a necessidade da subordinação do homem ao mundo; com ella estabeleceu-se a preponderancia tão necessaria do coração, de onde foram tirados todos os seus principios theoricos, e a cujas impulsões foram devidas todas as suas contemplações sobre a ordem exterior.

As nossas construcções, como dissemos, são sempre traducções approximadas da ordem material que nos rege. Deste modo nos fica sempre uma parte que nossa intelligencia póde livremente elaborar, completando, de modo, a satisfazer da melhor maneira que for possivel a nossa verdadeira destinação, a favorecer o uso das hypotheses, simplificando-as, embelesando-as, purificando cada vez mais o seu caracter moral.

Tal é o meio mais seguro de fazer convergir os

sentimentos, as imagens e os signaes á elaboração de nossas construcções quaesquer.

Esta observação por si só basta-nos para deixar bem claro o quanto é racional e perfeitamente legitimo considerar os fetichistas que suppunham ao mundo exterior a perfeição moral, sem a qual o embellesamento esthetico e a explicação scientifica seriam insufficientes, ás nossas necessidades especulativas, como os verdadeiros fundadores da verdadeira logica.

• A todos os titulos a influencia philosophica do fetichismo acha se admiravelmente conforme com os melhores preceitos do positivismo, o que justifica o seu successo.

A preponderancia fundamental do coração sobre o espirito, que a systematisação final estabelece penosamente em um meio viciado pela theologia e pela metaphysica emanou sem esforço da espontaneidade primitiva.

Este unico principio da synthese humana conduziu desde o conecço a constituir instinctivamente a verdadeira logica, sempre popular, apesar das aberrações doctoraes, aquella que faz dignamente concorrer os sentimentos, as imagens e os signaes á elaboração dos pensamentos. (1)

Estes preceitos logicos, desconhecidos pela progressão accidental que estabeleceu o ascendente extremamente nocivo do uso dos signaes, só foram convenientemente attendidos na incomparavel tentativa da idade media, que, embora sem resultados, procu-

(1) Comte—Syst. de Politique vol. 3º pag. 120.

rou novamente ensaiar o dogma da subordinação do espirito ao coração.

A instituição do culto da mulher, ahí tão dignamente tentada, é a noção sociologica d'essa subordinação tão indispensavel á organização da verdadeira logica scientifica. A logica positiva é por conseguinte composta de tres elementos inseparaveis : o sentimento, que inspira e coordena ; a imagem, que considerada activa ou passivamente constitue o objecto capital do dominio mental, e finalmente os signaes que nos permitem transmittir aos outros membros da communiidade de que fazemos parte, os nossos sentimentos, as nossas construcções, estabelecendo por esta fórma, as nossas relações, a nossa harmonia collectiva, de modo a permitir-nos o uso completo dos materiaes elaborados pelos esforços de nossos antepassados e facultar, por conseguinte, a instituição completa e indispensavel da solidariedade humana. Assim constituida a logica nem só facilita as especulações abstractas, como aperfeiçoa a meditação concreta, tornando-a mais precisa, mais vasta e mais consistente.

Na apreciação anterior que fizemos da synthese subjectiva estes preceitos se nos apresentam completamente satisfeitos. Assim é que o sentimento foi considerado como preponderante na humanidade, como animando a terra e finalmente como vivificando espaço.

E' elle, por conseguinte, dos tres elementos o que domina no triumvirato que constitue o regimen final. As imagens se nos apresentam na assimilação estabelecida entre estes dois ultimos seres e o typo humano, conservando-se-lhes todavia a sua natureza

propria ; os signaes, emfim, cuja influencia intellectual a instituição do meio subjectivo, como o consideramos, tornaria poderosa, se nos apresentam como representados na propria constituição do espaço, cuja natureza generalisada torna-se apta á representação de formulas quaesquer ; é isto precisamente o que os dispõe á sua verdadeira destinação.

Tendo por fim inspirar-nos as construcções que melhor convém ás nossas necessidades reaes, a logica se nos apresenta como só podendo ser difinitivamente constituída com a construcção essencialmente social da nova doutrina scientifica.

Reconhecendo a dignidade na subordinação voluntaria, a nova synthese corrige o espirito da perniciosa e esteril independencia que lhe havia attribuido a logica methaphysica, querendo regular o mundo sem primeiro ter apreciado a natureza humana e comprehendendo a sua verdadeira destinação social, restringindo o papel da intelligencia a esclarecer as impulsões do sentimento a construir, respeitando sempre a ordem exterior, resolve completamente o magno problema cuja solução havia sido frustrada aos esforços dos dignos espiritos da idade media : a subordinação normal da intelligencia e da actividade ao coração. A synthese preliminar elaborada no regimen metaphysico, suppondo a existencia dos seres inanimados como subordinadas á acção de seres ideaes, d'elles completamente independentes, estabelecia entre o homem e o mundo um intermediario subjectivo, que relacionava e subordinava o primeiro ao ultimo ; a synthese final elevando a concepção social do conjuncto humano, substitue esses intermediarios pela noção altamente philosophica da

humanidade, e á qual ella subordina os dois primeiros elementos, unicos considerados no regimen monotheico.

Entre o homem e o mundo deve estar a humanidade; tal é a fórmula *systematica* em que se resume o regimen normal.

O homem fica assim ligado ao mundo por intermedio da Humanidade, e a ellá subordinado em o seu aperfeçoamento.

Por este modo completamente purgada do character absoluto de individualismo que lhe haviam dado as doutrinas *metaphysicas*. a logica tornada social, apresenta-se como muito propria ao desenvolvimento da *sympathia*, proporcionando e facilitando assim o ascendente dos sentimentos altruistas sobre os moveis egoistas, pelo encanto das condições de nossa existencia, pela idealisação das bondades de nossa alma e pela subordinação voluntaria e digna á ordem imutavel que nos rege, e a qual nos cumpre conhecer para podermos sabiamente modificar de harmonia com as exigencias reaes de nossa situação.

Como dissemos, a *synthese final* concebe a intelligencia só propria á humanidade, como sendo uma das condições fundamentaes e indispensaveis á existencia da ordem, inteiramente incompativel com a existencia desse attributo no mundo e no espaço, como haviam supposto as crenças primitivas.

Bazeada na *sympathia*, a *synthese final* deve necessariamente considerar como mais valioso o regimen *sympathico* estabelecido pelo fetichismo do que a construcção *methaphysica*, que separando a intelligencia de toda subordinação para com o sentimento e abandonando completamente o ponto de vista social,

tendeu sobretudo a fazer prevalecer os sentimentos egoistas, a desviar o espirito para as divagações inuteis e inspirar-lhe as mais anarchicas pretensões. Recebendo do mundo que o cerca por intermedio dos sentidos, as impressões exteriores, o nosso cerebro elabora, subordinando ao sentimento, as nossas theorias e estão como representações approximadas da ordem real são completadas ainda sob a impulsão do coração, que institue, subordinando-lhe, o dominio das vontades. Essencialmente synthetico, o sentimento nos leva em primeiro logar a considerar a humanidade para depois apreciar a economia universal sobre a qual se funda a sua existencia; o espirito, reconhecendo primeiramente a ordem exterior, mais simples e mais geral, a ella submete-se e depois gradativamente passando a phenomenos mais elevados, mais particulares, a existencia mais complexas, mais solidarias, em seu conjuncto, nos conduz á concepção da ordem humana; nos dois casos porém, o ponto de vista é sempre o mesmo; é a existencia collectiva, e o bem estar do conjuncto humano; de modo que estas duas marchas, completamente distinctas de nossas indagações convergem sempre para o mesmo ponto. Este duplo modo de proceder se nos apresenta como sendo respectivamente proprio ao desenvolvimento da poesia e da philosophia. Idealizando a nossa existencia, sobretudo moral, a arte poetica constróe idéias, que permittindo o nosso aperfeiçoamento affectivo, devem, tanto quanto as verdadeiras noções scientificas, ser incorporados ao regimen final em que o fetichismo deve predominar.

Desenvolvido assim pelas construcções da imagi-

nação, o sentimento torna-se, em um tal regimen, preponderante, e, corrigindo a insubordinação intellectual por uma disciplina sympathica, permite o estabelecimento da completa unidade geral que deve caracterisar o regimen scientifico. Esta consideração equivale a estabelecer a educação artistica anterior á iniciação scientifica, de modo que desenvolvendo-se a sympathia, e as idealisações concorrendo para o aperfeiçoamento de nosso instincto de perfeição façam com que o espirito a começar a elaboração theorica, vá já preparado pela subordinação ao coração, a acceitar facilmente a sujeição voluntaria, indispensavel á verdadeira coordenação.

Essencialmente sentimental a logica final, tendo por principio o amor, comprime o elemento cuja preponderancia é a mais nociva, a mais incompativel com a ordem, a mais impropria para permittir a sythematisação final, pela sujeição voluntaria a ordem natural que nos rege, nos dispõe ao ascendente do altruismo sobre o egoismo, condição decisiva de nossa regeneração. Caracterisada a logica positiva nós passamos á completal-a apreciando a instituição do methodo universal com que o espirito humano tem obtido todas as suas acquisições. A existencia inorganica, como fizemos ver, é muito mais simples, mais geral e mais independente que a existencia organica; na primeira cada modo de ser póde ser apreciado independentemente de todos os outros: a extensão, por exemplo, póde ser considerada independentemente do movimento; a côr póde ser considerada deixando de parte a situação e a fôrma, porém tambem as reacções nos são sempre desconhecidas, como nos mostra o conjuncto de nosso

systema planetario, no qual, embora o movimento, as dimensões dos astros sejam separadamente conhecidas com precisão, a reacção total que resulta da existencia simultanea só nós conhecemos por approximação; na atmosphaera os elementos componentes nos são conhecidos, mas as leis que regem o facto geral que resulta da sua concurrencia nós desconhecemos; na existencia organica é precisamente o contrario que se dá, tudo ahi é solidario, concorre; os elementos além de apresentarem uma variação muito rapida não comportam uma separação do todo sem que se deixem de alterar; tambem em taes phenomenos só o conjuncto nos é satisfactoriamente conhecido, emquanto que os elementos nos serão sempre desconhecidos. No primeiro caso, facilmente comprehendendo-se, o espirito separando idealmente os elementos que concorrem para produzir o facto observado, estuda-os isoladamente e depois passa a consideração sobre a sua existencia: a marcha é pois, do simples para o composto é uma marcha abstracta; no segundo caso o espirito da apreciação do conjuncto, tal como elle se lhe apresenta, passa a apreciação das partes concorrentes: a marcha é concreta; em qualquer d'estes dois casos, porém, elle segue precisamente a regra fundamental e evidente da logica que nos manda em nossas indagações passar sempre do que nos é conhecido para estudar o que ignoramos.

Esta diversidade fundamental, que estabelece a natureza propria aos phenomenos respectivos, entre o estudo do mundo e do homem determina nos methodos correspondentes differenças capitais, que os torna profundamente distinctos. Emquanto no estudo

inorganico as nossas hypotheses são geralmente constituídas por simples inducções, destinadas a mostrar a successão dos phenomenes, no dominio vital ellas sendo relativas ao conjuncto, em que cada parte concorre solidariamente com todas as outras, ellas se nos apresentam com uma complicação muito superior elevando-se a verdadeiras construcções, nas quaes deve estar bem clara a influencia que cada um dos elementos concorrentes exercia sobre a harmonia do todo, a ligação e a subordinação d'elles entre si e para com o todo; no primeiro caso o emprego da indução predomina, no segundo elle é inseparavel do da deducção, e o seu uso apresenta outras difficuldades.

Considerado o ser vivente em seu conjuncto, a hypothese final sobre sua existencia depende sempre da verdade e precisão de duas operações preliminares; uma consiste em *uma apreciação do todo essencialmente synthetica, destinada a determinar as condições geraes exteriores ou interiores de toda a existencia*; outra *reduz-se a uma exploração das partes, exploração necessariamente limitada, visto a multiplicidade e a complexidade dessas partes.*

A difficuldade capital está sempre na construcção da hypothese final. Observar o corpo, apreciar o seu conjuncto, depois as partes e com esses elementos pensar sobre o modo porque elles se devem harmonisar para produzir o que se observa, taes são as duas partes da indagação; na segunda está toda a complicação. é n'ella que se elabora a construcção definitiva que deve explicar o conjuncto observado.

A operação cerebral é, n'este caso, mais energica

que no primeiro; a meditação é mais forte e mais importante que a contemplação.

No estudo inorganico a exploração é toda objectiva; observa-se o corpo, abstrahem-se das propriedades que não nos interessam, consideram-se as que se tem em vista estudar, e aprecia-se o modo por que ellas se estão realisando; a construcção reduz-se a hypotheses geralmente simples.

A contemplação é, pois, neste caso muito mais energica que a meditação.

O primeiro methodo, isto é, aquelle que o espirito humano segue quando estuda os factos do dominio organico é dito *subjectivo*; o segundo denomina-se *objectivo*. O methodo subjectivo foi instituido pelo fetichismo. Impellidos pelo sentimento e só conhecendo o typo humano, os fetichistas foram levados a considerar todos os seres como identicos a elle, de modo que assim suppriam pela meditação o que a observação não podia fazer conhecer, e eram naturalmente levados a partir dos phenomenos os mais complicados da exploração do todo para a consideração dos detalhes.

Empregado primitivamente na indagação das causas, este methodo póde ser judiciosamente usado na indagação das leis, pois que com uma parte objectiva constituida pelos materiaes exteriores, todas as nossas concepções apresentam sempre uma parte subjectiva que comprehende as construcções.

Substituido o regimen fitichico pelo regimen metaphysico imposto pelas condições intellectuaes, e sociaes, foram os fetiches substituidos por entidades representadas por vontades exteriores aos seres e governando-os. Esta mudança determinou a conver-

gencia da observação para os phenomenos cujo conhecimento tornava-se necessario ao sacerdocio afim de que elle podesse explicar convenientemente as vontades das diversas entidades. Tal foi a fonte em que se originou o estabelecimento do methodo objectivo, cujo emprego exclusivo é uma das mais lamentaveis aberrações da anarchia moderna.

Convenientemente apreciado, o antigo methodo subjectivo, se nos apresenta como sendo o unico capaz de dirigir com proveito as investigações relativas aos phenomenos vitaes, nos quaes as decomposições que exige o methodo objectivo, tão proprias ao estudo do mundo, são irrationaes e absurdas.

Feitas estas observações, nós vamos considerar o methodo universal como systematicamente composto de tres phases distinctas: a deducção, a inducção e a construcção. A deducção muito facil, muito vantajosa nos dominios mais simples, mais geraes, taes como o da mathematica e da astronomia, vae-se tornando difficil a proporção que os factos se vão complicando, que o estabelecimento dos principios difficulta-se, como acontece no dominio da physica propriamente dita, e mesmo no dominio astronomico, no qual já a deducção é mais complicada do que no campo da pura mathematica. Nesta phase do methodo universal é preponderante o uso dos signaes como sendo eminentemente proprios a permittirem e facilitar o emprego de um tal processo.

A inducção apparece logo que a complicação dos phenomenos é sufficiente para tornar menos vantajoso e facil o emprego da deducção. Verdadeiramente esboçado no dominio astronomico, este processo torna-se perfeitamente caracterisado no dominio

physico, onde a difficuldade em estabelecer os principios torna o seu uso muito mais extenso que o da deducção.

Elle constitue o traço de passagem do methodo objectivo para o methodo subjectivo, perfeitamente delineado nas investigações biologicas. A construcção apresenta-se finalmente nas construcções sociologicas, que, na synthese final, devem coordenar todos os materias elaborados nos diversos dominios anteriores; n'elle deve por conseguinte predominar o sentimento como unico elemento capaz de realizar a unificação geral do dominio positivo.

A ordem que segue nosso espirito na marcha que acabamos de traçar, isto é, partindo da consideração da ordem exterior e elevando-se depois á ordem moral, é a ordem philosophica; ella tem por fim a explicação dos dogmas. A ordem inversa, isto é, aquella em que nós partimos da consideração dos factos moraes para apreciar depois a existencia inorganica, desde o seu modo de ser mais complicado até o mais simples e mais geral, é mais synthetica, n'ella domina sempre o sentimento e como tal é melhor destinada á poesia; ella completa o culto pela idealisação dos caros objectos de nossa affeição.

Considerando os diferentes gráus em que o emprego de inducção póde ser vantajosamente utilizado, como no dominio astronomico, que o institue, no dominio physico, chimico e biologico, nós podemos facilmente perceber a grande analogia que existe entre a disposição das tres phases do methodo universal e a da serie encyclopedica das sciencias abstractas.

A lei que presidiu á instituição d'esta é a mesma

que nos apresenta a constituição do methodo universal; assim é que a deducção é mais simples que a inducção e esta por sua vez é mais simples que a construcção que exige o concurso dos dois modos anteriores. O mesmo se dá tambem quando consideramos os phenomenos nos quaes esses diferentes processos são predominantemente.

Assim é que a deducção muito desenvolvida no dominio mathematico, cujos phenomenos são bastante simples para permittirem uma tal operação e cujos principios são facilmente estabelecidos para que a inducção tenha qualquer desenvolvimento sensivel; a deducção dizemos torna-se successivamente complicada a proporção que se vai apreciando os phenomenos mais elevados e mais particulares, emquanto que o modo inductivo vai-se tornando melhor destinado ás soluções das questões no dominio physico principalmente a proporção que as consequencias são tiradas com mais facilidade e os principios estabelecidos com mais difficuldade; e, finalmente os dois methodos concorrem no dominio biologico e sociologico onde o seu mutuo auxilio é indispensavel ao estabelecimento das construcções. Assim, de accordo com os phenomenos observados, segundo sua successão na ordem crescente de dignidade e decrescente de generalidade a constituição do methodo universal acha-se em plena concordancia com a nossa disposição encyclopedica das sciencias, estatuida sob dependencia de uma lei colhida da observação dos factos e inteiramente identica áquella que acabamos de enunciar como subordinando-o.

Resultando da observação dos phenomenos, o methodo universal devia, como aconteceu, começar a

desenvolver-se por aquella de suas partes relativa ao facto mais simples. Assim é que sendo os factos mathematicos de todos os mais simples e geraes a dedução foi que desenvolveu-se em primeiro lugar e predominou por muito tempo, dando lugar a uma influencia profunda e lamentavel dos signaes, cuja importancia exagerada ainda se faz sentir mesmo no espirito do incomparavel fundador da synthese final, o immortal Descartes, com quem as imagens começaram a ter um uso systematico. e a indução ficou definitivamente iniciada. Este ultimo processo porém só recebeu a sua verdadeira destinação com Bacon cujas vistas elevadas completaram as apreciações precisas de seu digno contemporaneo.

«Para estabelecer as leis geraes, diz elle, é necessario procurar uma outra fórmula de *inducção* diversa d'aquella que até hoje se tem empregado e que não serve nem só para deduzir os principios, como os chamam, como tambem as leis menos geraes, as intermediarias, e todas as outras finalmente. A indução que procede por uma simples enumeração é uma cousa pueril, que vae ter a uma conclusão precaria, que uma experiencia contradictoria póde destruir e que refere-se as mais das vezes a um numero de factos muito limitado e a aquelles sómente que se apresentam por si mesmo á observação. Mas a indução que será util para a descoberta e a demonstração das sciencias e das artes, deve dividir a natureza fazendo rejeições e exclusões legitimas; e depois de ter excluido todos os factos que lhe convem abandonar concluir em virtude d'aquelles que ella admite; o que ninguem até hoje tem feito ou ensaiado a não ser Piatão que serve-se algumas vezes d'esta fórmula de

inducção para tirar suas definições e suas ideias. Mas, para constituir completamente e legitimamente esta indução ou demonstração, é necessario applicar-lhe uma porção de regras, que até hoje não passaram pelo espirito de homem algum, de modo que é preciso para com ella uma occupação mais aturada do que a que tem sempre sido destinada ao sylogismo; e devemos nos servir d'esta indução nem só para descobrir as leis da natureza mas ainda para determinar as noções». (1)

Assim elaborado em suas duas phases, o methodo universal completou-se definitivamente pelo positivismo, que instituindo novamente e apreciando devidamente a racionalidade e vantagens do methodo subjectivo dos antigos, no estudo dos phenomenos os mais complicados de nossa existencia individual e collectiva, constituiu a synthese final, essencialmente poetica, collocando assim acima da deducção e da indução, a construcção.

Emquanto o genio poetico fazia sobresahir o papel eminente das construcções pela idealisação das condições de nossa existencia, pela organisação das utopias sentimentaes, resultantes d'essa idealisação, a actividade pratica, inspirada nas produções poeticas, elaborava no dominio das artes especiaes os materiaes que deviam fundar a base monumental do methodo universal. já subjectivamente osboçado sob a assistencia das impulsões poeticas.

Mesmo para com os phenomenos os mais simples, é sempre necessario uma certa indução para obter-se

(1) Bacon. Novum organum pag. 56.

os principios dos quaes se devem concluir as consequencias, isto realisa-se nos dominios os mais geraes, em que os factos considerados são os mais simples, como acontece no dominio da mathematica, no qual as inducções, embora sejam muito elementares, pela facilidade com que os principios ali são estabelecidos, já se manifestam. A inducção é sempre a base de que se parte quer para deduzir quer para construir: *induzir para deduzir afim de construir*; tal é a formula geral em que se resume a marcha normal do espirito scientifico. As verdadeiras construcções constituindo-se na filiação sociologica, comprehende-se que a instituição da sociologia era indispensavel á organização definitiva da logica final, cujos elementos desorganizados, ora pelo dominio da inducção, ora pelo ascendente exagerado da deducção, só poderam tornar-se perfeitamente coexistentes e convergentes com a fundação definitiva d'aquella sciencia, unica que podia unifical-os subordinando-os ao sentimento, pela incorporação digna e eminentemente moral da poesia á philosophia. Para bem se apreciar as más consequencias que traz sempre a insubordinação do espirito para com o coração, e se poder assim avaliar da necessidade do novo regimen baseado no amor, basta-nos considerar o que aconteceu com Voltaire. Espirito eminente, sagaz, perseverante, poeta elevado, essa bella intelligencia estava, como faz notar A. Comte, muito acima da missão essencialmente demolidora de que elle se tornou o principal chefe; mas o desenvolvimento insignificante dos sentimentos altruistas, sobretudo da veneração, unicos cuja preponderancia lhe podia deixar perceber a verdadeira destinação social, não lhe permittio

as construcções, ficando os esforços d'esse genio admiravel empregados a effectuar um desmoronamento completo nas construcções realisadas por seus antecessores e contemporaneos.

Na logica, pois, como na synthese final, o sentimento deve normalmente ser preponderante de modo a regular o emprego das imagens e impedir as lastimaveis divagações a que póde conduzir o abuso dos signaes. Estes são auxiliares poderosos não ha duvida, mas o seu valor deve ser sempre devidamente apreciado para que o espirito não seja levado a attribuir-lhe, como acontece no domínio mathematico, qualidades que na realidade elles não possuem. Para mais clareza e precisão sobre este ponto nós vamos ouvir a este respeito um dos mais eminentes pensadores britannicos. « Mas uma inferencia de natureza inductiva bem que possivel sem o uso dos signaes, não poderia jámais sem elles estender-se além dos casos muito simples de que acabamos de fallar e aos quaes limitam-se muito provavelmente os raciocinios dos animaes privados de toda linguagem convencional. Sem a linguagem ou alguma cousa de equivalente os raciocinios da experiencia se reduziriam áquelles que não exigem proposições geraes. Ora, ainda que rigorosamente nós possamos concluir da experiencia passada a um novo caso particular sem o intermediario de uma proposição geral, nós só raramente poderíamos sem esse soccorro nos lembrar a nossa experiencia passada e quasi nunca as conclusões que ella póde garantir. A divisão do processo inductivo em duas partes a primeira verificando o que é o signal do facto dado, a segunda verificando a presença ou ausencia d'este signal no novo caso, é

natural e scientificamente indispensavel. As mais das vezes mesmo o intervallo de tempos a torna necessaria. A experiencia que deve dirigir os nossos julgamentos póde ser a experiencia dos outros homens, da qual uma pequena parte não póde nos ser communicada de outro modo a não ser pela linguagem; e quanto á nossa experiencia propria ella é geralmente muito antiga, de sorte que si ella não nos fosse lembrada por meio de signaes artificiaes, nós não poderiamos (a não ser por nossas sensações e emoções mais vivas ou pelos factos de uma observação quotidiana e de toda hora) reter senão muito pouco em nossa memoria.

Convém porém notar que quando a inferencia inductiva não é das mais directas e das mais manifestas, quando ella exige muitas observações ou experiencias em condições diversas e sem comparação, é impossivel dar um passo sem a memoria artificial das palavras. Sem palavras nós poderiamos bem, si tivéssemos muitas vezes notado entre A e B uma ligação immediata e evidente, esperar determinar B em toda parte em que o ligassemos a A. Mas quando a ligação não é manifesta, descobrir e determinar se ella é realmente constante ou puramente accidental, si nós temos alguma razão para contar sobre sua persistencia em uma mudança dada de circumstancias: é um trabalho muito complicado para ser executado sem algum artificio proprio a fixar exactamente a linguagem de nossas operações mentaes. Ora, a linguagem é um artificio d'este genero, a difficuldade está em guardar a lembrança da significação das palavras. Esta condição satisfeita nós podemos nos lembrar exactamente de toda a marcha de nossos pensamentos.

tos, exprimindo-os por palavras que confiamos ao papel ou a memoria.» (1)

Para tornar mais inteira ainda a semelhança entre a constituição da logica e a da synthese final nós podemos referir cada um dos tres auxiliares do pensamento a cada um dos elementos componentes da synthese subjectiva. Os signaes mais proprios á dedução referem-se especialmente ao espaço, cuja constituição, concebida como é pelo espirito positivo permite nem só a representação dos factos mathematicos, como tambem a de todos os outros phenomenos; as imagens essencialmente destinadas a permittir a inducção, cujo desenvolvimento só por seu intermedio torna-se apreciavel são relativas á Terra, que fornece ao nosso cerebro os materiaes objectivos necessarios as suas construcções e finalmente, o sentimento refere-se á Humanidade na qual a subordinação do egoismo ao altruismo permite regularisar o emprego dos outros dois auxiliares.

Estas combinações binarias entre os elementos respectivos da logica e taes series que resumem a nova synthese, nos leva á divisão que a antiguidade havia concebido na sciencia, em logica, physica e moral.

Para melhor comprehender a verdade de um tal resultado, basta-nos considerar que esta divisão ternaria equivale inteiramente á classificação septenaria deduzida da observação dos factos que nos apresenta o spectaculo exterior.

Com effeito, a redução ternaria da serie scienti-

(1) Stuart—Mill—Systeme de Logique—V. 2.º pag. 211.

fica, obtem-se facilmente considerando a moral como comprehendendo a titulo de introduccão á biologia e á sociologia, cujo estudo torna-se absolutamente indispensavel á sua exacta elaboraçãõ; a physica como comprehendendo pela mesma razão a astronomia, a physica propriamente dita e a chimica, e finalmente a mathematica pela simplicidade de seus phenomenos que lhe permite desde o começo da iniciação encyclopedica e apreciar as leis intellectuaes e mesmo moraes, caberá muito naturalmente a denominaçãõ de logica.

Em cada uma d'estas tres partes predominará o elemento que lhe fôr correspondente na constituição da logica. Assim na moral, onde as construcções são mais numerosas, o sentimento é preponderante para poder regularisar o uso dos signaes e imagens, que concorrem a um tal resultado; na physica as inducções são muito mais importantes e frequentes e as imagens predominam, embora sempre regularisadas pela assistencia affectiva, e, finalmente, na logica as deducções têm um desenvolvimento muito superior a qualquer dos outros processos e os signaes são por este facto muito mais convenientemente empregados que os outros dous auxiliares do pensamento.

Em qualquer dominio, porém, a operação cerebral só é perfeita com a justa concorrência d'estes tres meios, indispensaveis á constituição definitiva de nossas construcções quaesquer.

Os signaes alem de nos facilitar a deducção, nos auxiliam poderosamente o pensamento lembrando-nos as imagens. Feita uma observação qualquer, construida a imagem que d'ella resulta e representada esta pelo signal conveniente, este sempre que se nos

apresentar e fôr percebido por nosso cerebro, despertará a imagem que o determinou, a qual actuando sobre a região affectiva, determinará a producção, embora mais enfraquecida, do sentimento que nos dominou por occasião em que observamos o facto que ella representa.

Os signaes podem directamente corresponder-se com o sentimento, mas a intervenção da imagem torna-se indispensavel para que as manifestações affectivas sejam mais energicas e menos confusas. Assim, por exemplo, assistindo morrer uma pessoa, a quem dedicamos sincera affeição, nós sentimos emoções de dor que ligadas aos differentes factos que nós observamos, tornam-se intimamente relacionadas com a imagem que a observação do spectaculo doloroso nos apresenta; esta imagem traduz-se por um signal determinado produzido pela acção da região affectiva sobre a massa activa do cerebro, e nós pronunciamos a phrase: *Fulano morreo*.

Mais tarde, depois de decorrido um certo tempo, se nós ouvirmos pronunciar esta phrase, a impressão levada pelo orgão auditivo ao cerebro póde immediatamente despertar uma certa emoção de pesar, mas esta será fraca e indistincta; se, porém, o som actuando sobre a região affectiva esta reagir sobre a massa especulativa e despertar a imagem que nos representa o facto passado, apresentando-nos os rostos angustiosos, os lamentos, o conjuncto emfim do quadro doloroso que nos foi presente, esta imagem excitando a região affectiva muito mais energicamente pela sua intima ligação com as emoções que o facto real nos produziu quando directamente contemplado, torna as nossas emoções muito mais intensas, muito

mais distinctas e traduz melhor o sentimento primitivo que elle nos inspirou.

Esta intima relação entre a imagem e a emoção que experimentamos contemplando o objecto que nol-a forneceo, torna-se ainda melhor apreciada quando, considerando que muitas vezes embora um objecto qualquer nos cause uma certa impressão desagradavel basta para que esta seja poderosamente enfraquecida que nós comecemos a notar nos objectos considerados semelhança com um outro que nos é affeioado, e cuja imagem uma vez assim lembrada nos desperta a emoção sympathica que lhe corresponde.

« Quando uma cousa, diz Spinoza, nos affecta habitualmente de uma impressão de tristeza, se nós chegamos a imaginar que ella tem alguma semelhança com um objecto que nos affecta habitualmente de uma impressão de alegria da mesma força, nós teremos odio e ao mesmo tempo amor por essa cousa. Este estado de fluctuação é para a paixão o que a duvida é para a imaginação.

« O homem póde ser affectado de uma impressão de alegria ou de tristeza pela imagem de uma cousa passada ou futura como pela de uma presente.

« Porque, desde que o homem é affectado pela imagem de uma certa cousa, elle a vê como presente, mesmo que ella já não exista, e elle só a imaginará como passada ou como futura, quando a sua imagem fôr reunida a de um tempo decorrido ou para vir.

« Aquelle que representa a si a destruição do que elle ama é dominado pela tristeza; se representa a conservação elle experimenta a alegria. Porque as imagens das cousas que impliquem a existencia do

objecto amado favorecem o esforço da alma para imaginar este objecto, em outros termos, alegram a alma; ao contrario, as imagens das cousas que excluem a existencia do objecto amado, impedem este esforço da alma, isto é a entristecem. Aquelle que representa a si a destruição do que elle odeia sentirá alegria; porque a alma se esforça por imaginar tudo o que exclue a existencia das cousas capazes de diminuir ou impedir a potencia de acção dos corpos, em outros termos, esforça-se em imaginar tudo o que exclue a existencia das cousas que ella detesta.

Aquelle que representa a si o objecto amado como triste ou alegre experimenta essas mesmas affeições; porque as imagens das cousas que implicam a existencia do objecto amado favorecem o esforço que faz a alma para representar este objecto amado. Ora a alegria exprime a existencia daquelle que a experimenta; ella é relativamente a elle a passagem a uma maior perfeição, e em relação á existencia do objecto amado uma affirmação.

Se nós representarmos a nosso espirito uma pessoa como causando alegria ao objecto amado, nós experimentaremos amor por ella; se, ao contrario, nós a figuramos como causando tristeza ao objecto amado, nós experimentaremos por ella, o odio: *aprovação indignação.* (1)

Estas exactas considerações deixam bem clara a importancia eminente que devem sempre ter as imagens na efficacia de todas as nossas construcções.

(1) Spinoza—cit. por Müller—Manual de Physiologia—vol. II. pag. 527.

Para bem avaliar, para bem comparar, é necessario antes ter bem sentido; para que as nossas especulações nos sejam uteis é necessario que antes de tudo o coração nos tenha indicado uma necessidade, nos tenha inspirado por uma impulsão, a indagar tal ou tal facto, e ainda mais é necessario que a concorrencia dos dois elementos logicos, as imagens e os signaes seja por elle assistida de modo a ficarem prevenidos os desvios que o ascendente exagerado de qualquer d'elles possa produzir. A harmonia humana é, pois, sempre constituida do seguinte modo: o sentimento nos inspira e impelle; a intelligencia intervindo nos esclarece sobre o melhor meio de chegar ao ponto indicado; fica assim contida uma imagem intimamente relaccionada com o sentimento que a determinou, finalmente, a actividade excitada pelo estado que determinou a imagem na região affectiva, o traduz por signaes de modo a tornar exteriores as construcções que possam resultar. O cerebro liga assim o exterior com o interior, recebendo d'aquelles os materiaes necessarios ás nossas construcções, e liga o interior ao exterior traduzindo por meio de signaes as construcções elaboradas pela região intellectual sob a assistencia indispensavel da parte affectiva. Para completar a comparação que anteriormente fizemos entre a constituição da logica e a disposição do grupo ternario da synthese subjectiva nós vamos estender além a apreciação da harmonia que acabámos de considerar.

O espaço, como dissemos, é ali considerado como tendo uma natureza inteiramente passiva e simplesmente dotado de sentimento que o torna proprio a prestar-se do melhor modo a representar as leis cuja

exacta apreciação exigia uma séde conveniente ; sua assimilação ao typo humano fica assim reduzida ao elemento affectivo. Para melhor, porém, tornar esta apreciação nós podemos considerar, como fizemos para a Terra, o espaço como tendo sido antes da existencia humana, dotado de intelligencia a qual desapparece por um uzo prolongado, ficando d'esta fórma o meio reduzido tão sómente ás disposições affectivas, porem tambem com a fixidez necessaria e indispensavel á existencia do conjuncto vivente, e incompativel com toda supposição de existencia intellectual no meio exterior correspondente. Temos depois a Terra dotada de sentimento e actividade, e cujas differenças para com a Humanidade reduzem-se a que na Humanidade os elementos renovam-se continuamente pela intervenção da intelligencia, emquanto que na Terra os elementos são perpetuos.

Para firmar esta apreciação basta-nos considerar que as leis geraes da existencia material são universaes e que as propriedades essenciaes do Mundo são verdadeiramente relativas ás molleculas de sua constituição, cuja disposição pôde nem só influir quanto á intensidade como tambem quanto á realisação dos phenomenos correspondentes ; a primeira consideração faz com que nós sejamos levados a considerar a existencia da Terra tão complexa como o é a da Humanidade, que sobre este ponto parecia differir profundamente do planeta em que vive ; a segunda nos permite conceber a sua existencia como podendo, semelhantemente a da Humanidade ser representada por órgãos indivisiveis subordinados ao conjuncto, representado pelas leis universaes, e unicas verdadeiramente reaes. A comparação entre o dominio lo-

gico e a constituição da synthese final fica assim inteiramente completa e apreciada.

A synthese final systematisando a vida subjectiva iniciada pelo fetichismo, estabelecendo o ascendente affectivo, construindo como typos principaes, com os quaes devemos continuamente conviver, os nossos antepassados, as gerações presentes e futuras, o planeta em que vivemos e aquelles que com elle se relacionam, e o meio no qual se movem, a synthese final, diziamos, nos indica como condição capital para a harmonia, a submissão voluntaria e como unico elemento capaz de garantir a completa unidade: o amor. O espaço, a terra e a humanidade, taes são os elementos capitaes de nossas especulações; a elles referem-se os signaes, as imagens e o sentimento, elementos da logica que permitem e inspiram as nossas construcções, as quaes são destinadas a facilitar o mais possivel a dedução, a indução e a construção, que constituem as tres phases do methodo universal, cuja constituição systematica póde traduzir-se na classificação ternaria dos nossos conhecimentos em, logica, physica e moral.

A denominação de logica em substituição á de mathematica, palavra esta inspirada pela lamentavel pretensão á supremacia que aspirou o methodo deductivo, e cuja pluralidade em si, já Condorcet achava tão impropria, satisfaz plenamente á legitima aspiração dessa sciencia quanto ao methodo, e ao mesmo tempo tem a vantagem de affastar qualquer pretensão quanto a doutrina.

A reacção inversa, diz Comte, desta substituição purifica o estudo systematico do methodo, tornando-o inseparavel do de uma doutrina capaz de manifestar

todas as partes essenciaes que só podem surgir após exeroicios decisivos, os quas só poderiam offerecer a simplicidade scientifica, unica que convém ás apreciações logicas, desde que sempre limitados á existencia plenmente universal, reduzida a seus tres elementos necessarios : numero, extensão e movimento.

Esta nação só tem necessidade de que uma sabedoria systematica ahi venha artificialmente logar uma sufficiente manifestação das partes superiores do methodo que em principio não foram cacacterisadas senão de conformidade com estudos menos geraes e mais complicados. (1)

(1) Synthese subjective—pag. 55.

COORDENAÇÃO DA PHILOSOPHIA MATHEMATICA

Considerando as sete sciencias de nossa classificação seriaria condensadas nos tres ramos instituidos pelos antigos—logica, physica e moral, nós nem só nos collocamos em harmonia com o ponto de vista historico, como tambem satisfazemos do melhor modo as exigencias dogmaticas.

Estudando em primeiro lugar a logica, depois a physica e por ultimo a moral, nosso espirito segue naturalmente a marcha normal, partindo dos factos mais simples, mais abstractos e mais geraes, para os factos mais particulares e mais complicados. Por este modo ficam logo elaboradas as leis geraes que regem a existencia material e nós reconhecendo a invariabilidade da ordem exterior, a ella nos sujeitamos voluntariamente, a modificamos na intensidade de seus elementos, e assim disciplinado póde nosso espirito considerar convenientemente a ordem humana, que baseada e subordinada á ordem material, exige necessariamente o conhecimento d'esta para ser devidamente apreciada.

No dominio abstracto onde se tem em vista generalisar para poder systematisar, é este o modo mais natural e que melhor se presta ao estudo dos phenomenos correspondentes a cada sciencia fundamental.

Esta marcha de proceder é de tal importancia didactica que nós a mantemos, embora ella se ache em desaccordo nem só com o desenvolvimento do espirito positivo, que se nos apresenta em primeiro lugar nas indagações praticas e depois nas especulações theoricas, como tambem com a constituição normal da sociedade. De facto, na sociedade normalmente constituida o sacerdocio, que representa a intelligencia e que corresponde á logica no nosso triunvirato scientifico, acha-se intermediario entre o proletariado, que corresponde á physica, e as mulheres ou a classe affectiva, que corresponde á moral.

Se, pois, a constituição final da sociedade está em harmonia com o desenvolvimento da positividade, apresentando em primeiro lugar a *pratica*, e depois os elementos theoricos, por outro lado acha-se em desarmonia com a nossa serie terciaria, onde em primeiro lugar está a logica ou mathematica, depois a physica e finalmente a moral. Esta inversão entre a logica e a physica, que nos apresenta a marcha da positividade comparada com a disposição seriaria, é tanto mais importante quanto ella nos deixa immediatamente conceber a destinação essencialmente didactica de uma tal modificação.

O desenvolvimento encyclopedico póde ainda achar-se em discordancia com o estudo historico da evolução do espirito humano, porém taes divergencias serão plenamente justificadas attendendo-se ao contraste que sempre se apresentou entre as nações abstractas e concretas, cuja conciliação só foi definitivamente realisada pelo positivismo incorporando a poesia á philosophia.

Elaborando as leis scientificas, a philosophia pro-

porciona ao genio poetico, essencialmente synthetico e social, as bases de suas construcções ; e este por seu lado favorecendo e activando a elevação do sentimento, coordena os elementos philosophicos, aperfeiçoa as noções scientificas e assim intimamente ligados caminham a philosophia e a poesia, tendo sempre como ponto de convergencia o aperfeiçoamento physico, intellectual e moral do homem.

Esta intima conciliação permite a elaboração completa e systematisação definitiva do methodo universal, que desenvolvido em sua parte deductiva no dominio da logica, essencialmente destinada á apreciação do espaço, fica plenamente instituido em sua parte inductiva na physica com o desenvolvimento systematico da observação, da experiencia e das nomenclaturas, e finalmente em sua parte constructiva começando pelas hypotheses biologicas e a instituição da filiação historica em sociologia, até a moral onde predomina o methodo subjectivo, essencialmente relativo ao sentimento, e ao qual devemos nossas mais elevadas acquisições.

A preponderancia do sentimento no methodo universal fazendo concorrer a inducção e a deducção, nos apresenta a construcção como sendo uma deducção elevada, realisada depois de uma serie de inducções convenientes, a qual estabelece a sythese subjectiva de harmonia com a elaboração analytica, realisada com os materiaes fornecidos pelo mundo exterior.

Assim considerado, o terceiro modo do methodo universal, dispensa contrariamente aos dous outros, um órgão cerebral especial, e nos apresenta a synthese como subordinada á analyse, a qual é inteiramente

desenvolvida nos dominios inferiores, onde a natureza dos phenomenos permite ao espirito, por meio da abstracção, estudar as differentes propriedades isoladamente.

Uma tal subordinação leva a considerar a formula encyclopedica como traduzindo a marcha seguida pelo espirito humano para synthetisar o conjunto de seus conhecimentos, pela conciliação entre a poesia e a philosophia, cujo dominio por demais abstracto e essencialmente analytico, só lhe permite após longas preparações as dignas apreciações syntheticas emminantemente proprias ao genio poetico.

Para exemplificar a superioridade sob o ponto de vista synthetico da poesia sobre a philosophia basta citar a immortal obra de Cervantes, onde a theoria da loucura é esboçada de um modo incomparavel no tipo do cavalleiro de La Mancha.

O problema humano resume-se na subordinação do egoismo ao altruismo, do progresso á ordem. e da analyse á synthese. A primeira parte começa a se esboçar em nossa infancia individual ou collectiva, e se desenvolve com a continuação da convivencia social; durante a adolescencia o desenvolvimento continuo do espirito conduz á subordinação da analyse á synthese, por uma elevação continua da consideração dos phenomenos mais simples aos mais complicados attributos moraes, e, finalmente, a actividade impellida pelo elemento affectivo já aperfeiçoado, já esclarecido pela anterior elaboração especulativa, completa e uníca a nossa existencia subordinando o progresso á ordem correspondente. Baseados sob uma synthese puramente subjetiva, nós devemos banir como futeis as actuaes pretenções ao estabe-

lecimento da synthese objectiva phantasiada pela anarchia academica, cuja influencia vae felizmente se nullificando com o ascendente continuo do novo regimen, unico capaz de obter a completa regeneração humana. Subordinando a intelligencia e a actividade ao sentimento, a verdadeira sciencia permite á abstracção o seu desenvolvimento normal, ao mesmo tempo que a mantem nos limites de sua verdadeira destinação social.

Essencialmente sentimental o estado final da existencia humana previne qualquer insubordinação do espirito para com o coração, naturalmente incompativel com a harmonia moral, e exige o amor como unico elemento que deve presidir a systematisação final de nossos materias scinetificos, cuja elaboração constitue o dominio proprio ás investigações intellectuaes.

O sentimento sendo o movel de todas as nossas acções e sendo seu apefeiçoamento o verdadeiro alvo para que devem convergir os nossos esforços, comprehende-se que o seu ascendente deve necessariamente fazer desaparecer como futeis certas distincções improprias e injustificaveis actualmente, estabelecendo a synthese subjectiva, onde o dominio phylosophico acha-se dignamente incorporado ao conjuncto poetico.

Referidas á moral, a logica e a physica acham-se assim harmonisadas no dominio scientifico com a biologia e sociologia, que, mais de perto relacionadas ao elemento affectivo, não necessitam como as primeiras de uma grande vigilancia para impedir as divagações dispersivas e esforços estereis.

A moral instituindo a vida collectiva como o estado

para cujo aperfeiçoamento devem concorrer nossos sentimentos, coordena os materiaes elaborados pelas sciencias anteriores, e estabelece os limites dentro dos quaes devem manter suas investigações.

Subordinada á moral, a mathematica ou logica deve limitar-se *systematicamente* ás investigações que exige a preparação normal para o estudo da sciencia final, e ás elaborações capazes de comportarem uma applicação na *physica*, cujas noções devem basear-se em suas leis. Só assim é possível libertar-mo-nos d'essas divagações inúteis e pedantescas, dignos fructos da lamentavel insubordinação do espirito para com o oração ensinuada e mantida por falsas doutrinas *metaphysicas*.

Esta dupla destinação da mathematica explica o motivo porque torna-se necessario no dominio particular d'esta sciencia manter certas theorias, que embora não apresentem applicação alguma *physica*, são todavia proprias ao aperfeiçoamento de uma questão de *methodo*. Denominada de logica, a mathematica fará immediatamente perceber sua digna missão social, e disporá o espirito a só acceitar as indagações tendentes a um tal fim, isto é, as indagações que lhe forem impostas pela sua ordem na serie scientifica.

Limitada por longo tempo aos factos mais adequados ao uso do calculo, a logica apresentou mais tarde verdadeiras profanações scientificas, que levando-a a esquecer sua destinação moral e sua applicação *physica*, fizeram-na pretender o primeiro lugar na escala das sciencias, procurando explicar todos os factos possiveis, por factos puramente numericos, por leis que lhe fornecia o estudo do seu proprio do-

minio. Estas pretensões injustificaveis, trouxeram como consequencia uma completa anarchia, que se estenceu até ás diffinições, em geral vagas, obscuras e muitas vezes inexactas. Subordinada, porém, á moral, a logica será purificada pela influencia da doutrina positivista, que sempre lhe lembrará sua destinação moral e o seu character verdadeiramente logico.

A incorporação que o regimen final estabelece entre a poesia e a philosophia, nos leva a considerar tanto as sciencias como as artes como concorrendo para a solução completa do problema humano. A sciencia apreciando a ordem exterior e depois a ordem interior, procede dos phenomenos mais simples, mais geraes e mais abstractos, e que nos apresentam um espectáculo mais fixo e mais regular, para os phenomenos mais elevados, mais nobres, mais complicados e variaveis.

A mathematica, primeira das sciencias no estudo da ordem exterior, tem por objecto a construcção dos typos mais simples, mais fixos e mais regulares cujo estudo além da sua efficacia logica, concorre indirectamente para o aperfeiçoamento de todos os outros.

Convenientemente disciplinada, ella educará o espirito pela evidencia plena de seus resultados, e assim concorrerá para o nosso aperfeiçoamento moral, facilitando a subordinação do interior para com o exterior pela fé, e tambem facilitando o estabelecimento da unidade da alma pela preponderancia do amor; desenvolverá as leis intellectuaes permittindo a elaboracão das leis physicas, e desde então fará

sentir que as leis moraes são as unicas capazes de realizar uma completa systematisação.

A definição que demos para a logica comprehende um problema cuja solução é impossivel obter com os recursos de que ella dispõe.

Um tal problema pôde ser considerado como sendo susceptivel de duas soluções: uma concreta, synthetica, porém empirica, emanada directamente do culto, onde o sentimento adquire mais desenvolvimento que outro qualquer dos nossos attributos: outra abstracta, analytica e systematica, emanada do dogma, onde a intelligencia tem mais desenvolvimento e nos permite obter construcções abstractas formuladas por um estudo gradual dos factos simples e geraes a factos mais ou menos complicados.

Estas duas soluções só podem ser definitivamente estabelecidas pela moral, unica sciencia em que o ponto de vista social acha-se plenamente apreciado, o sentimento convenientemente desenvolvido e a intelligencia sufficientemente disciplinada, para que seja possivel a solução do problema humano, a que se reduzem as duas soluções do problema geral da logica.

Nós devemos, pois, considerar a definição que demos desta sciencia como exprimindo o resultado final de que ella constitue uma simples phase preparatoria, e assim formulada somente com o fim de prevenir divagações inuteis e nocivas.

Attendendo agora ao problema geral que ella tem por fim resolver em o seu dominio particular, nós vamos dar-lhe uma outra definição, que se completará com a definição systematica já estabelecida.

que lhe lembrará sempre a sua verdadeira destinação moral.

Estas noções elementares convem que fiquem perfeitamente formuladas, pois que na maioria dos compendios são ellas apresentadas de um modo vago, obscuro e por vezes infelizmente falso.

No estado rudimentar de civilisação das sociedades humanas as occupações do homem deviam ter sido muito limitadas: — a caça, pesca, alguma cultura de terrenos, o fabrico de instrumentos destinados para isto, taes deviam ser as operações que lhe garantiam a existencia e permittiram a evolução das pequenas sociedades até o ponto de elevado aperfeiçoamento em que hoje as observamos. As especulações theoreticas, muito mais que os trabalhos praticos, deviam ter sido limitadas: as primeiras noções numericas, inspiradas pela contemplação directa do mundo exterior, algumas noções geometricas, determinadas pela necessidade de medir os terrenos pertencentes a cada grupo e alguma noções astronomicas.

A medida, porém, que a situação sobre o planeta se foi complicando, pela maior sociabilidade, consequencia do continuo ascendente dos sentimentos sympathicos, a medida que as necessidades se foram multiplicando e tornando-se mais variadas, e que a esphera da actividade apresentou-se mais extensa, a dependencia dos differentes grupos, foi se tornando successivamente mais complexa e mais pronunciada para com o meio exterior; as grandezas cujo conhecimento mais de perto interessava a existencia collectiva apresentaram-se mais compostas, em situações mais variadas, o que exigio para sua determinação, esforços cerebraes até ali limitados as operações

elementares relativas ao processo da avaliação directa.

Mostremos com alguns exemplos o modo porque a situação das grandezas e suas dimensões podem dificultar sua avaliação directa.

Supponhamos que se quer medir uma distancia em linha recta de trinta metros situada sobre um terreno perfeitamente horisontal. A primeira condição que exige a medida directa é que a distancia a medir possa ser percorrida de uma á outra extremidade pela pessoa que mede, isto satisfeito, a operação consiste em fazer coincidir, a partir de uma das extremidades da linha, a grandeza tomada para a unidade com linha dada, e repetir esta operação até que a coincidência se realise no extremo opposto, ou então até que a pôrção restante com a ultima coincidência, da grandeza a medir, seja menor que a medida adoptada. Como vemos, a questão em taes condições não apresenta difficuldades, mas se nós supposermos a recta tendo grande comprimento e interrompida por um rio, uma montanha ou um bosque, já a medida directa torna-se impossivel. A mudança de situação complica ainda mais rapidamente a questão: uma recta de trinta metros sobre um terreno horisontal não apresenta, como vimos, difficuldades á medida directa, mas se em vez de a concebermos situada no plano a considerarmos na posição vertical a questão torna-se muito difficil, pois que alem de tudo exige um meio que permitta a pessoa que mede, elevar-se gradualmente segundo a vertical afim de poder realisar a coincidência da unidade com a recta a medir. Si nós considerarmos agora a infinidade de obstaculos e irregularidades que nos offerece a super-

fiça da terra, a grandeza e a posição das distancias em que de nós se achão os corpos que mais interessão nossa existencia collectiva, taes como os outros do nosso systema planetario, facilmente poderemos comprehender o quanto é limitadissimo o numero de casos em que a medida directa torna-se possivel e vantajosamente applicavel, relativamente áquelles em que não convem ou é completamente impossivel um tal processo.

Este accessimo notavel de difficuldades em relação aos factos cujo conhecimento mais influencia exerce sobre o conjuncto humano, levou o homem a meditações mais aturadas, a contemplações mais minuciosas, convergindo para a determinação de um modo por que podesse fazer depender a determinação das grandesas, que não comportavão uma medida directa, do conhecimento d'aquellas em que fosse possivel semelhante maneira de determinação. O modo por que se estabelecem indirectamente as relações entre os differentes membros de uma commuidade por intermedio de outros, devia naturalmente servir de origem ao processo indirecto da avaliação das grandesas.

Supponhamos que um individuo *A* tem necessidade de conhecer ao individuo *G*. Pode acontecer que entre as pessoas relacionadas com *A* haja uma *F* conhecida de *G*; neste caso *A* pode conhecer *G* por intermedio de *F*. Pode dar-se, porém, que *A* não conheça *F*, mas conheça *E* com quem *F* tem relações e então *A* conhecerá *G* por intermedio de *E* e de *F*, e finalmente *A* pode não conhecer *E* mas dar-se com *B*, que elle sabe ter relações com *C* que por sua parte é relacionado a *D* que mantem relações com *E*, e então

A virá a conhecer G por intermedio de B, C, D, E, e F cujas relações mutuas elle conhece e lhe são indispensaveis.

Tal foi naturalmente o facto social commum que inspirou a construção do processo indirecto no dominio abstracto.

De posse do facto philosophico, que a observação social lhe apresentava, o espirito humano não teve mais do que com a abstracção determinar as relações entre os elementos de cada facto com aquelles que a medida directa lhe fazia conhecer, e d'ahi essa grande e incomparavel construcção abstracta, que medeia entre os valores directamente obtidos e as grandezas a determinar, e que constitue o nosso mais poderoso auxiliar e a base essencial da logica—o calculo.

As difficuldades que podem comportar a avaliações indirectas, a complicação e complexidade da grande construcção que liga os dois extremos da investigação mathematica, torna-se clara se attender-mos a que assim como o elemento que se busca póde achar-se immediatamente ligado a um outro cujo valor nós podemos directamente obter, e cujas relações com elle nós podemos determinar com precisão, póde tambem acontecer que este segundo elemento, que mantém relações com o que se procura, não seja susceptivel de avaliação directa, mas esteja relacionado a um outro que comporte esta avaliação, e assim por diante de modo que o numero de elementos intermediarios póde ser mais ou menos numeroso e as relações mais ou menos complicadas.

Para esclarecer ainda melhor esta noção fundamental nós vamos considerar um exemplo muito

simples e que comporta uma applicação logica : a quéda de um corpo.

Supponhamos que uma pedra cahe do alto de uma torre cuja altura nós queremos conhecer. E' claro que a medida directa é impossivel em taes condições, ou, pelo menos exigiria trabalhos penosissimos e traria difficuldades que impediriam inteiramente a precisão do resultado. E' necessario, pois, adoptar a avaliação indirecta e procurar fazer depender a altura de um elemento cujas relações com ella nos sejam conhecidas e que possa ser obtido directamente.

Assim esclarecidos, nós começamos a observar a quéda da pedra e notamos que o espaço que esta percorre na direcção vertical da torre varia com o tempo, isto é, que quanto mais demorar-mos a observação tanto maior será o espaço percorrido ; quando a pedra chega ao terreno o espaço percorrido será sensivelmente igual á altura procurada, e terá se passado um certo tempo a elle correspondente. O relógio nos dando directamente o valor do tempo decorrido, fica a questão reduzida a determinar pela experiencia e observação a lei que liga o espaço percorrido ao tempo, na quéda dos corpos, e esta obtida e traduzida abstractamente, isto é, convertida em relação puramente numerica, introduz-se na formula correspondente o valor do tempo dado pelo relógio e determina-se o valor procurado do espaço, ou a altura pedida.

Considerado por esta fórma o problema é simples, pois o elemento directamente considerado acha-se immediatamente ligado ao espaço por uma lei simples; mas se quizermos abordar a questão em toda a generalidade, isto é, levando em conta a variação da

gravidade, a resistencia do ar, suppondo a quóda obliqua, os elementos tornam-se mais numerosos, as relações complicam-se e por tal fórma que a solução completa de semelhante questão ainda está por fazer-se.

Portanto, quer o processo por comparação directa, quer o processo indirecto fazem parte do dominio mathematico, este ultimo, porém, é preponderante, é o que verdadeiramente o caracteriza. O primeiro emprega-se em um numero limitadissimo de casos, e constitue a face mais simples, mais elementar do dominio geral, enquanto o segundo nos leva immediatamente a perceber o character normal e as difficuldades inherentes ás suas investigações.

Definindo-se a Logica como a sciencia que tem por fim a medida das grandezas, é impossivel conduzir o espirito a fazer uma idéa falsa d'esta sciencia, pois que rigorosamente uma tal definição abrange os dois processos de avaliação: mas a idéa suggerida é muito vaga, muito obscura e difficilmente deixa comprehender ao alumno que a recebe o alcance e a complicação que podem comportar as investigações logicas.

A palavra medida nos desperta mais depressa a idéa da comparação directa, facto para cuja traducção ella foi naturalmente formulada, do que a determinação indirecta com auxilio de uma construcção mental, abstracta, que só mais tarde, quando o desenvolvimento da abstracção permitio pôde ser convenientemente elaborada.

Este facto, de capital importancia, é precisamente o que determina o defeito da definição que consideramos, o que exige uma correccção, consistindo em

tornar saliente a preponderancia do processo indirecto, desde que o problema geral pôde ser formulado, e os casos mais numerosos e difficeis puderam ser devidamente contemplados.

Se por um lado dizendo-se tão somente: *tem por fim a medida das grandezas*, deixa-se geralmente comprehendidos os dois modos de comparação, por outro lado apresenta-se o inconveniente de deixar-se ficar a noção do facto capital que se pretende dar a conhecer, vaga e obscura, pois faz-se suppôr preponderante no dominio da Logica, exactamente o processo cujo emprego é mais limitado, e cuja simplicidade está longe de exigir grandes esforços mentaes.

E' preciso, pois, definir a logica de modo que immediatamente se possa comprehender a grandeza, a difficuldade que podem comportar suas indagações, o alcance de seu dominio, o character philosophico fundamental de sua marcha geral, para o que basta tornar-se explicito em sua definição o uso preponderante do processo indirecto, ficando implicito e muito mais facilmente capaz de subtender-se, o emprego do processo directo, naturalmente indispensavel.

A logica, pois, deve ser definida: *a sciencia, que tem por fim a medida indirecta das grandezas por meio de outras conhecidas, cujas relações com ellas são precisamente determinadas*: ou, simplesmente: *a sciencia que tem por fim a medida indirecta das grandezas*.

Esta definição, muito naturalmente deduzida da apreciação que fizemos do character fundamental das especulações logicas, exclue definitivamente a suposição nociva necessariamente inspirada pela definição geralmente dada pelos compendios especiaes, do predomínio do processo directo, e nos apresenta a

mathematica como digna de constituir um elemento distincto na escala encyclopedica, como abrangendo uma immensa elaboração intellectual, extensivel a todos os phenomenos desde que elles possam comportar uma avaliação precisa, desde que os seus elementos apresentem relações que possam ser determinadas com rigor.

Estabelecida assim a diffinição mais racional que convém á logica, encarada sob o ponto de vista de seu dominio particular, nós vamos apreciar a quanto as divisões de seu dominio normal.

Como acabamos de ver, as questões mathematicas apresentam em sua solução completa duas phases distinctas e intimamente relacionadas: uma em que se tem em vista determinar qual o modo de relação existente entre os diferentes elementos que o phenomeno apresenta; e outra em que estas relações sendo traduzidas em simples comparações de grandezas, e consideradas independentemente do facto de que ellas emanam, são sujeitas a processos logicos, que permitem obter os elementos procurados por meio dos elementos conhecidos. Voltemos ao exemplo já considerado da queda dos corpos.

Como dissemos, a observação mostra que existe um modo de dependencia entre o espaço percorrido pelo corpo e o tempo correspondente, isto, porém, por si só nada adiantaria para a solução da questão se este modo de dependencia não ficasse precisamente determinado. Para obter isto a experiencia, empregada conjunctamente com a observação são os meios adequados, e nos permitem conhecer que a relação considerada vem a ser que o espaço varia na relação directa do quadrado do tempo correspondente. Esta

é a parte concreta da indagação. Este modo de dependencia ou esta formação dos elementos buscados pelos elementos conhecidos, considerada entre as grandezas dos elementos numericamente avaliados, independentemente do facto que a forneceu, constitue a parte abstracta, que efficazmente auxiliada por symbolos convencionaes, permite o emprego de processos convenientes, cujo fim é tornar claro, explicito, o modo de formação do elemento incognito, a altura, pelo elemento conhecido, o tempo.

D'isto é facil comprehender que uma vez que seja a mesma a natureza das formações ou os modos de dependencia entre as diversas grandezas, que os diferentes phenomenos nos apresentam, a parte abstracta será sempre identica, quer se trate de tempo e espaço, quer de volume e pressão, luz, calor etc., e a parte concreta ao contrario variará necessariamente de um a outro facto considerado.

A parte abstracta é, por conseguinte, racional, logica, inteiramente geral, em quanto que a parte concreta é essencialmente especial, completamente subordinada ao mundo exterior d'onde ella tira os seus materiaes pela contemplação e constroe suas leis para comproval-as pela experiencia.

Estas leis, uma vez obtidas com rigor, são consideradas no dominio abstracto, independentemente de toda experiencia, e a elaboração apresenta-se então alheia a toda e qualquer sugestão exterior.

Assim é que Leverrier entre as paredes de seu gabinete de estudo determinou a existencia no espaço do planeta Neptuno; assim é que o official de marinha determina, encerrado em seu beliche, a posição do navio no alto mar.

O calculo, diz Portalis, que liga, que amplifica, que reduz, que compõe e decompõe, não cria. Os turbilhões de Descartes provam que se póde calcular chimeras do mesmo modo porque se póde congregat verdades,

Consideradas quanto ao gráo de complicação que podem apresentar, as duas phases da solução, concreta e abstracta, são identicas. Ora a lei logica é muito simples e difficil de obter-se, ora é facil de ser descoberta e é muito complicada, e finalmente as duas partes podem ser conjuntamente dificeis, como acontece com o problema geral da balistica em que nem só a lei concreta da resistencia do ar não é conhecida, como tambem a elaboração abstracta apresenta difficuldades que até hoje ainda não foram vencidas.

A passagem do concreto para o abstracto é caracterisada pela traducção analytica das relações formuladas pela lei entre os elementos considerados, sendo estes mesmos elementos, porém, aperciados simplesmente sob a relação de grandeza, isto é, pelo estabelecimento da equação.

Esta passagem por mais simples que possa parecer é por tal forma complicada que até hoje os unicos phenomenos que nós podemos estudar no dominio mathematico são os de extensão, movimento e calor.

Em quanto a parte abstracta comporta methodos geraes, uniformes, com os quaes resolve as questões de seu dominio, a parte concreta não gosa e jamais poderá gosar semelhautes vantagens, ficando a determinação das relações que existem entre os diversos elementos que os differentes phenomenos nos apresentam, sempre limitada a cada classe particular.

O facto de ser a parte abstracta mais geral que a

parte concreta nos leva a estudal-a em primeiro lugar, como abrangendo phenomenos mais simples e mais geraes. Assim considerada a mathematica, o seu dominio se nos apresenta como podendo abranger uma classe qualquer de phenomenos; a questão está em que em certos casos o estudo é simples, em outros muito complicado, e finalmente na maioria dos casos chimerica e impossivel. Nos phenomenos vitaes, por exemplo, os elementos que se nos apresentam são por tal modo instaveis, varião de um modo tão diverso e tão rapidamente que, como observa Blainville, qualquer applicação mathematica a taes questões seria completamente esteril.

Logicamente, porém, nos é sempre permittido considerar todas as questões como consistindo em ultima analyse em determinar certos elementos por meio de outros conhecidos e cujas relações mutuas pode-se obter precisamente.

A distincção estabelecida por Kant entre as ideias de quantidade e ideias de qualidade, tira, sem duvida, á mathematica o seu character de universalidade intellectual, fasendo-a abranger tão sómente as primeiras; mas uma tal distincção perdeu de toda a importancia desde que Descartes mostrou com a sua incomparavel criação que os phenomenos de forma ou qualidade se podiam reduzir a puros factos de quantidade.

Este immortal resultado foi mais tarde verificado para com os phenomenos mecanicos, e finalmente admiravelmente confirmado pelo genio de Fourier, estabelecendo as leis mathematicas dos phenomenos de calor, que hoje são considerados como constituindo um ramo distincto no dominio da mathe-

mathica concreta. Considerando, porém, quanto aos resultados effectivos, que nós podemos obter com a applicação da mathematica, é necessario confessar, os nossos usos reaes jámais excederão com proveito o dominio de uma parte muito limitada da physica propriamente dita.

Na classe de phenomenos mais simples d'este dominio, nos phenomenos celestes mesmo, cujo caso mais complicado é sempre mais simples que o mais simples factos terrestres, a questão já se difficulta por tal fórma, quando nós pretendemos tratá-la com toda generalidade, que até hoje as nossas soluções a um tal respeito são todas aproximadas. Se considerarmos agora a instabilidade numerica que se apresenta nos factos chimicos e que é tão notavel nos factos vitaes, e ainda mais, que todos estes motivos concorrem para influenciar os factos sociaes e moraes, facilmente poderemos comprehender o quanto são limitados os factos capazes de comportar uma applicação logica. O emprego, pois, da mathematica ficará assim limitado ao dominio astronomico e a um pequeno numero de factos physicos, ficando excluidos os factos mais complexos e todo o dominio da physica organica.

Os phenomenos atmosphericos, por exemplo, são factos que pertencem ao dominio da physica propriamente dita, mas que, embora determinada pela concorrência de elementos conhecidos, apresentam uma tal variabilidade que a parte concreta, isto é, o estabelecimento da lei ou do modo de dependência que entre elles existe, e a passagem para o dominio abstracto, em cada caso particular, é completamente impossivel.

As nossas especulações a este respeito partem

sempre da consideração de que a parte concreta seja conhecida, estabelecendo a pressão e a temperatura as mesmas em toda a massa gazosa, o que não é mais que um recurso de que nos servimos, diante a impossibilidade de poder obter a verdadeira lei.

Nos phenomenos muito complicados, mesmo que nós conheçamos as leis que os regem, a reducção das relações por estas traduzidas á simples comparação de grandesa, ou o estabelecimento das equações correspondentes, é, na maioria dos casos impossivel com o pequeno numero de elementos analyticos de que podemos dispor.

Taes são de um modo geral os limites da logica ou mathematica, quer no ramo abstracto, quer no ramo concreto.

Nós passamos agora a apreciar-a em sua organização particular, objecto principal deste capitulo.

A parte abstracta, como dissemos, sendo mais geral, occupando-se com idéas mais simples, e sendo sob o ponto de vista logico, independente da parte concreta, a ella necessariamente subordinada, nós a devemos considerar e estudar em primeiro lugar: é a lei que presidiu a nossa classificação confirmada na constituição particular desta sciencia fundamental.

Conhecida a parte concreta o estabelecimento do modo de dependencia, dado pela lei, entre funcções abstractas das grandezas consideradas constitue a equação. Estabelecida esta, para chegar a tornar claro e explicito o modo por que o elemento procurado se acha formado pelos elementos conhecidos, o espirito humano emprega uma serie de transformações adequadas, uniformes, cujo conjuncto constitue o *calculo*.

O calculo é, pois, a base fundamental de nossos conhecimentos positivos e, embora elle seja em muitos casos impotente para nos dar soluções precisas, é de todas as sciencias a mais perfeita em virtude da grande simplicidade dos phenomenos que elle considera e não pelo emprego dos signaes geraes, como erradamente pensou Condillac e depois a maioria dos especialistas.

Occupando-se tão sómente com as relações numericas existentes entre as grandesas que os phenomenos nos apresentam, o calculo torna-se eminentemente proprio a tornar precisos nossos conhecimentos, e nos proporciona a vantagem de podermos estudar por um mesmo trabalho analytico, phenomenos inteiramente diversos.

O calculo comprehende duas phases distinctas: uma em que se procura, uma vez esbelecidas as equações do facto estudado, passar do estado implicito em que se acha o modo de dependencia dos elementos procurados para com os elementos conhecidos, para o estado explicito correspondente; outro que começa desde que isto é obtido, e que tem por fim avaliar as formulas achadas de modo a determinar os valores procurados. A primeira parte constitue o dominio da algebra, a segunda constitue o dominio da arithmetica.

O calculo compõe-se assim de dois ramos: algebra ou calculo das funcções, e arithmetica ou calculo dos valores. †

Esta denominação de *algebra*, querem uns, com Mênage que seja derivada do arabe *algiabarat*, que significa *restauração de uma cousa desagregada*; outros pensam com Herbelot, que ella origina-se do nome

de Géber, philosopho, chimico e mathematico celebre, denominado *Gicebert*, pelos arabes, e a quem attribue-se a sciencia da algebra.

A primeira derivação, porém, é mais geralmente aceita, pois além de mais racional acha-se mais em harmonia com os factos historicos.

Estas duas phases do calculo existem quer nas questões mais complicadas, quer nas mais simples; algumas vezes, porém, as relações consideradas são por tal fôrma simples, que a phase algebraica elaborase mentalmente de modo que a questão traduzida pelos caracteres exteriores, apresenta as funcções em o estado explicito, o que a muitos faz suppor a existencia unicamente da phase arithmetica.

A arithmetica representa o elemento mais geral, mais abstracto e mais independente do dominio mathematico. Reduzida a puras investigações numericas, ella deve ser considerada como constituindo o dominio mais exacto, melhor caracterisado, embora menos desenvolvido do calculo onde o conjuncto algebrico intervem só como methodo e jámais como doutrina propriamente dita.

Com a arithmetica começa a manifestar-se em nós o primeiro sentimento das leis objectivas e subjectivas, com as previsões ahí estabelecidas sobre os acontecimentos, as quaes nos levam a conceber a existencia de uma ordem immutavel dentro e fóra de nós.

O dominio da arithmetica é limitadissimo em comparação ao vasto dominio algebrico. Sabendo-se avaliar as poucas formações elementares de que nós dispomos, a questão arithmetica torna-se muito simples, pois que, por mais complexa que seja a

formação a avaliar, a questão reduz-se sempre á avaliação das funcções elementares que a compõe.

Se attendermos a que a avaliação de uma funcção reduz-se a transformal-a em outra equivalente, nós podemos, em rigor logico, considerar o calculo arithmetico como uma applicação do calculo algebrico, que constitue o ramo mais importante do dominio abstracto da mathematica.

Tambem o dominio arithmetico não é tão restricto como se possa suppôr.

Os problemas mais transcendentos apresentam sempre como ultima phase de sua solução a avaliação de um elemento desconhecido por meio de uma determinada combinação de elementos conhecidos.

A construcção de uma taboa de logarithmos, das taboas trigometricas, são do dominio arithmetico; a resolução numerica das equações, que constitue a parte mais importante da algebra superior é caracterizada, pode-se dizer, pela phase arithmetica, sendo ahi a phase algebrica muito secundaria.

Passemos agora ao dominio concreto da mathematica.

A mathematica concreta comprehende tres ramos respectivamente relativas aos phenomenos de extensão movimento e calor.

As duas primeiras classes nós podemos logicamente considerar como reduzidos todos os outros factos.

Com effeito, se nós considerarmos no mundo todos os corpos inteiramente immoveis, a sua existencia só se nos tornará conhecida pelos phenomenos de fórma, grandeza e situação; se suppozermos o movimento é claro que alem daquelles phenomenos tere-

mos de considerar o movimento como um modo de ser inteiramente distincto.

Assim, pois, conforme a feliz concepção de Blainville, o universo, sob o aspecto statico só nos apresenta phenomenos de extensão, e sob o aspecto dynamico os phenomenos de movimento.

O ramo concreto, portanto, apresenta a divisão binaria: e *Geometria* e *Mecanica*, comprehendendo esta de um modo geral o estudo dos phenomenos de calor ou a *Thermologia*.

Referindo-se á concepção de Blainville, diz Comte: «Mas, ainda que esta concepção seja sempre logicamente possível, a difficuldade está em especialisal-a com a necessaria precisão e seguil-a em cada um dos casos geraes, que nos offerece o estudo da natureza, isto é, em redusir effectivamente cada questão principal da philosophia natural, para tal ordem determinada de phenomenos, á questão de geometria ou de mecanica, á qual racionalmente se poderia suppór referida.

Esta transformação, que exige antes de tudo grandes progressos no estudo de cada classe de phenomenos, não tem sido realisada até hoje senão para com os phenomenos astronomicos, e para com uma pequena parte daquelles que considera a physica terrestre propriamente dita.

E' assim que a astronomia, a optica e a acustica tornaram-se finalmente applicações da sciencia mathematica em certas ordens de observações.

Mas estas applicações não sendo por sua natureza rigorosamente circumscriptas, seria a-signalhar á sciencia um dominio indefinido e inteiramente vago, confundil-as com ella, como faz-se na divisão ordina-

ria, tão viciosa a tantos respeitos, da mathematica em pura e applicada.

A geometria tem, como a mecanica, por base a observação do mundo exterior.

Limitando-se em principio ao estudo das formas apresentadas pelos corpos observados, a geometria estendeu seu dominio a proporção que a abstracção se foi desenvolvendo, até que com a instituição do espaço ella pôde abranger o estudo de todas as formas imaginaveis, permittindo-lhe esta concepção fundamental a consideração da extensão independentemente de todo outro qualquer modo de existencia.

Propondo-se a medir a extensão, a geometria tem sempre em vista fazer depender a avaliação procurada da avaliação de elementos cuja medida pôde ser directamente obtida; ora, a unica extensão capaz de comportar com precisão uma medida directa é a linha recta, d'onde conclue-se que a geometria tem sempre por fim *reduzir a avaliação dos volumes, das superficies e das linhas, á simples comparações de linhas rectas.*

Para resolver o seu problema geral da medida indirecta da extensão, a geometria estabelece como base necessaria e indispensavel, o estudo das propriedades das linhas e superficies, ou melhor ainda, os differentes modos de geração ou definições proprias á questão estudada. Escolher d'entre estas definições as mais convenientes e adequadas ao caso que se considera é, como observa Comte, em que, por bem dizer, consiste a verdadeira difficuldade de taes questões. Conhecidas estas propriedades, as relações entre os typos abstractos estudados no espaço subjectivo e os typos concretos, podem ser

melhor estabelecidas, de fôrma que se possa saber a qual dos typos abstractos deve ser referido com a necessaria precisão o typo concreto observado.

A geometria para abranger o estudo de todas as fôrmas imaginaveis, pôde seguir duas marchas completamente distinctas: ou pôde considerar todas as indagações relativas ás propriedades de uma mesma fôrma e deixar as de todas as outras, como relativas a fôrmas differentes, mesmo quando entre ellas exista algumas analogias; ou pôde considerar todas as indagações semelhantes, por mais differentes que sejam as fôrmas a que ellas se referem, e assim separar todas as questões relativas a propriedades realmente distinctas das fôrmas consideradas. A primeira marcha foi a dos antigos, a segunda caracteriza a phase moderna, desde Descartes.

No primeiro caso o estudo é feito em relação aos sêres, e a geometria denomina-se, como propõe Comte, *geometria especial* ou *geometria antiga*; no segundo caso o estudo é relativo ás propriedades, que podem ser communs á muitas fôrmas diversas, e a geometria denomina-se—*geometria geral* ou *geometria moderna*, até certo ponto impropriamente classificada de *geometria analytica*.

Com a mecanica termina o estudo do modo de existencia mais simples e mais geral.

Collocada entre a geometria e a physica, a mecanica deve ser normalmente destinada a ligar o dominio logico ao dominio da physica, sobretudo pela theoria do movimento, e ao dominio geometrico pela theoria do equilibrio. A sua constituição é baseada sobre duas noções fundamentaes, uma logica e outra physica. A primeira é constituída pela instiuição

abstracta da *inercia*, cuja importancia ahi é equivalente a de que gosa no dominio geometrico a noção de espaço, e que deve ser considerada como consistindo na impossibilidade em que devemos suppor os corpos de poderem modificar spontaneamente a acção das forças a elles applicadas, facto naturalmente emanado da observação da ordem exterior, sob a assistencia da abstracção.

A segunda noção é representada pelo conjuncto de tres leis, obtidas pela observação e esperiencia e respectivamente descobertas por Kepler, Newton e Galileo.

O problema capital da mecanica pode ser sempre referido a uma combinação de movimentos, segundo os dois modos geraes por que esta se pode dar, ou por composição directa, ou por communicacção mutua, determinada por sua coexistencia. No primeiro caso, suppondo os corpos reduzidos a pontos, e considerando o movimento de translação, o problema consiste em determinar o movimento resultante da coexistencia de muitos outros, já conhecidos por um estudo previo, em que cada um foi considerado isoladamente; no segundo caso, tornar-se necessario combinar o movimento total de cada corpo ou ponto considerado, com os das outras partes do mesmo systema, convenientemente diffinido por uma substituição qualquer.

A questão inversa correspondente a cada uma das partes d'este duplo problema, só é aceitavel quanto a primeira, pois que relativamente a segunda as difficuldades suggeridas são por demais espinhosas para que possamos com vantagem intentar sua solução geral.

Este duplo problema fundamental assim estabelecido, convem distinguirmos no dominio da mecanica o ponto de vista statico do ponto de vista dynamico. Os motores que actuam sobre um corpo para dar-lhe movimento, podem achar-se em condiçõs quer de intensidade, quer de direcção, que a simultaneidade de sua acção sobre o corpo neutralise a acção resultante de modo que este permaneça em equilibrio, o que traz a possibilidade de estudar-se as forças independentemente do movimento, modo que muitas vezes prevalece na avaliação das forças, cujos effeitos só podem ser sufficientemente conhecidos pelas suas pressões mutuas.

Esta distincção entre a concepção statica e a concepção dynamicas, determina na mecanica a divisão em *statica* e *dynamicas*, conforme os phenomenos considerados são relativos ao equilibrio ou ao movimento.

Constituida assim pelo calculo, a geometria e a mecanica, a logica apresenta uma composição semelhante a da sciencia final, na qual a sociologia é o elemento intermediario entre a biologia e a moral, que embora mais complicada e menos independente fica inteiramente distincta de todas as outras. Semelhantemente, na constituição da logica a geometria predomina, e representa a sua base fundamental, em quanto que a mecanica representa o complemento normal.

A philosophia mathematica consiste essencialmente na completa harmonia do calculo com a geometria, ficando isolada a mecanica cuja efficacia, nos limites normaes da logica, reduz-se a constituir a ligação entre esta sciencia e a physica, e a concorrer com o

seu estudo especial para o nosso aperfeiçoamento intellectual e moral. Tal é o motivo porque devemos considerar Descartes como o mais eminente dos legisladores da mathematica.

A logica apreciando em primeiro lugar as leis numericas, depois as leis geometricas e por ultimo as leis mecanicas, segue a marcha mais conveniente, mais natural á sua destinação social, que lhe impõe partir dos factos mais simples para gradualmente ir ter a phase synthetica, espontaneamente emanada das impulsões affectivas de nossos antepassados.

Com esta marcha fica o desenvolvimento da iniciação individual identico ao da iniciação da especie, e uma vez purgada das divagações inuteis, e convenientemente systematisado permite dar-nos a educação necessaria á nossa missão social dentro de um praso determinado. Disciplinada, a logica deverá se entregar ao estudo systematico do espaço, satisfazendo assim uma lei que lhe foi imposta pelo aborto de suas tentativas, sempre que procurou transpor taes limittes. O calculo restringido a sua verdadeira missão, fornecerá á geometria e á mecanica os meios proprios a tornarem mais intimas suas relações, e ao mesmo tempo, facilitando o desenvolvimento especial de cada uma dellas, apresentará sua distincção fundamental como necessaria á completa systematisação mathematica.

Sempre distinctos, o calculo arithmetico deve sempre dominar, no começo da iniação logica, ao calculo algebrico, que deverá ter especialmente em vista a coordenação da logica, facto este de superior importancia pois a elle devemos attribuir as usurpa-

ções algebraicas no dominio da mecanica, tão prejudiciaes ao methodo quanto á doutrina.

O calculo algebraico, directamente originado das questões numericas, deve tambem ser considerado como tendo tido uma origem geometrica, embora indirecta, o que lhe garante certa independencia, capaz de prevenir que de novo a anarchia scientifica o subordine a sua origem arithmetica, como ainda hoje nos indica a difinição de algebra quasi que geralmente aceita.

Concorrendo para a fundação completa da philosophia mathematica, pela coordenação que estabelece no dominio geometrico, o calculo das funcções, subordinado a sua destinação concreta, recebe uma vantajosa reacção, que nem só elimina suas anarchicas pretensões a constituir uma logica universal, como tambem previne toda e qualquer divagação desnecessaria que possa inspirar a influencia metaphysica.

Aceitando a sua missão geometrica, elle deve ser considerado, salvo seus usos numericos, não como uma sciencia distincta, mas simplesmente como um methodo proprio a facilitar e generalisar as investigações geometricas, as quaes elle deve ser sempre subordinado.

Para tirar da concepção cartesiana todas as vantagens que ella podia proporcionar, foi necessario modificar o calculo, que reduzido a sua antiga constituição, só fornecia recursos sufficientes para elaborar o estudo preparatorio das propriedades das fórmulas, sendo impotente para dar uma solução satisfactoria as questões de rectificação, quadratura e cubatura, objecto final do dominio geometrico.

Wallis, o primeiro discipulo de Descartes, comprehendeu perfeitamente as vantagens de abordar taes investigações e applicando o novo methodo patenteou a necessidade de constituir-se um novo calculo, cujas bases ficaram assim delineadas.

Emquanto a redução da medida da extensão limitou-se a figuras rectilineas, a redução da avaliação dos comprimentos, arcos e volumes, á simples comparação de linhas rectas, pôde ser realisada com mais ou menos difficuldades; mas logo que se procurou estender esta marcha a todas figuras curvilineas, os embaraços tornaram-se muito serios e as soluções impossiveis.

Archimedes pretendendo reduzir as figuras curvilineas á elementos rectilineos, apresenta, na antiguidade, a idéa, que convenientemente combinada com a concepção cartesiana, devia determinar o apparecimento do calculo de Leibniz.

« A theoria das secções conicas, o methodo de as empregar, seja para a construcção dos logares geometricos, seja para a resolução dos problemas, a descoberta de algumas outras curvas estenderam o dominio até então limitado da geometria. Archimedes descobriu a quadratura da parabola; medio a superficie da esphera, e foram estes os primeiros passos n'essa theoria dos limites, que determina o ultimo valor de uma quantidade, aquelle de que ella se aproxima continuamente sem nunca poder attingil-o; n'essa sciencia, que ensina, ora a achar as relações das quantidades desvanecentes, ora a passar do conhecimento d'estas relações á determinação das grandesas finitas; nesse calculo, emfim, com mais

orgulho que com justeza, hoje denominado pelos modernos de calculo do infinito. » (1)

Com effeito, Archimedes decompondo as figuras geometricas em seus elementos rectilneos, ideiaes, levou áquelles, que procuravam generalisar as theorias especiaes, com o emprego do calculo, a introduzirem por sua vez nas equações elementos artificiaes em substituição ás grandezas naturaes, muito complicadas.

As relações assim apreciadas nem só ficavam melhor traduzidas, e podiam ser mais facilmente elaboradas, como tambem, não sendo especialmente relativas a este ou aquelle facto particular, convinham ao estudo das propriedades, e offereciam completa generalidade.

Com este aperfeiçoamento no calculo, ficou completa a revolução geometrica emanada de Decartes, pela revolução não menos valiosa realisada por Leibniz no dominio algebrico.

O methodo infinitesimal tem por fim reduzir os casos complexos a casos simples, suppondo as formas quaesquer como idealmente compostas por elementos sempre rectilneos; apresenta uma destinação e uma legitimidade idênticas as da concepção corpuscular no dominio da physica. Os elementos artificiaes introduzidos pelo novo methodo e que na antiguidade eram eliminados por processos especiaes, ahí desaparecem mediante uma operação regular, uniforme e perfeitamente adequada a uma completa generalisação.

(1) Condorcet. — *Essais sur le progrès de l'esprit humain*. V. 1, pag. 88.

A incorporação do calculo á geometria, é, como vemos, tão necessaria á ella quanto indispensavel á algebra. Se o calculo permite á geometria a generalisação de suas theorias, a coordenação completa de seus elementos; a geometria subordinando o calculo a sua missão concreta, impede-lhe os desvios anarchicos, tão faceis nas investigações abstractas.

Isntituido o calculo infinitesimal, a mathematica ficou inteiramente systematisada com a sua applicação no dominio da mecanica onde termina o estudo do modo de ser mais simples e mais geral.

Impotente para resolver as questões especiaes no dominio mecanico, o calculo transcendente, deve aqui limittar-se a coordenar e desenvolver os factos geraes, como bem claramente deixou ver o genio eminentemente de Lagrange em sua *Mecanica Analytica*. Por conseguinte, sob o ponto de vista philosophico, a algebra se nos apresenta como sendo um simples instrumento racional, destinado a ligar entre si os tres elementos constituintes do conjuncto mathematico. Reduzida a seu papel normal, ella deve limitar-se a generalisar as inducções e coordenar as deducções de modo a permittir a construcção de theorias sufficientemente simples.

A systematisação da philosophia mathematica pode, em resumo, ser considerada como constituída pela creação de Descartes, completada pela revolução de Leibniz, systematisada na obra de Lagrange, e finalmente apreciada e definitivamente consolidada por Comte.

APRECIÇÃO GERAL

A falta de disciplina no emprego da abstracção determinou no dominio mathematico desvios, cuja má influencia ainda hoje sentimos e lamentamos.

A algebra, em virtude da simplicidade dos factos de que se occupa, pouco ou quasi nada influenciada pela tutella religiosa, tão sensivel nos dominios superiores, adquirio muito antes das outras sciencias um elevado gráo de perfeição, que bem cedo devia levar ao espirito d'aquelles que d'ella se occupavão a infeliz pretensão de collocal-a a altura de uma sciencia universal, que tudo podesse explicar, do mesmo modo por que lhe era possivel explicar os factos simples e limitadissimos do conjuncto inorganico.

D'ahi todos os abusos, todas as tentativas especulativas sem resultados, todas as divagações, todo esse emprego variadissimo e desnecessario do calculo, esse grandioso instrumento cujo uso nos está fatalmente limitado a um resumido numero de casos phisicos.

Se exceptuarmos, no dominio algebrico, a lei do binomio e a serie logarithmica e outros casos em que se nos manifestão verdadeiras leis do dominio puramente abstracto, todas as mais noções consideradas em um tal dominio não apresentam nenhuma realidade, são meras hypotheses construidas por nosso

cerebro, sem que para isto exija a sua realisação objectiva, algumas vezes real, mas impossivel na maior parte dos casos.

Comprehende-se, pois, com taes disposições, em uma epocha em que era notavel a indisciplina philosophica, em que cada espirito se especialisava continuamente, comprehende-se o quanto devião ser faceis e graves os desvios em uma sciencia onde tão grande independencia pode ser mantida para com o mundo exterior, acto este que faz desaparecer o unico obstaculo capaz de manter limitado o desenvolvimento abstracto.

Separada da arithmetica e da geometria, a algebra limita o seu papel á resolução das equações, isto é, a tornar explicitas as relações existentes implicitamente entre as grandezas conhecidas e desconhecidas, as quaes representadas por symbolos geraes, permitem ao espirito só attender as relações, tornando secundaria a questão de avaliação, a qual só começa depois de estar obtido o estado explicito.

Antes de ser levada a restringir-se ao seu verdadeiro papel encyclopedico, por sua subordinação ao dominio concreto, a algebra procurou invadir o dominio das sciencias superiores; quiz tudo explicar; quiz estabelecer para todos os phenomenos equações equivalentes, e assim como se explicava pelo calculo a quèda dos corpos, pretendeu-se tambem explicar a da concorrènciã, em materia de herança, dos filhos naturaes!! Desde Pythagoras que esta tendencia anarchica dè estender o calculo a phenomenos superiores, se começa a manifestar.

« Porém devo observar, diz Cabanis, que elle, (Pythagoras) foi o primeiro que applicou o calculo

ao estudo do homem; que elle descobriu entre os períodos dos movimentos febris, do desenvolvimento e decrescimento dos animaes, e certas combinações ou repetições regulares de numeros, relações que a experiencia dos seculos parece ter confirmado e cuja exposição systematica constitue o que em medicina denomina-se *doutrina das crises*.» (1)

E a algebra esqueceu assim sua missão geometrica; desligou-se do conjuncto de todos as outras sciencias; foi reputada um calculo sublime, uma sciencia incomparavel que de antemão estabelecia raciocinios geraes sobre todas as hypotheses imaginaveis; e deram-lhe a pomposa denominação de *logistica*.

Todo este exagero prejudicial teve como causa a ausencia da instrucção encyclopedica, unica capaz de indicar qual a conveniente cultura algebraica, para que o espirito se achasse apto a poder estudar o dominio geometrio e mecanico.

O materialismo especulativo começou a apparecer logo que o calculo algebrico pretendeu tomar o primeiro lugar na serie das sciencias. Na arithmetica não podia elle surgir, pois que, apezar da universalidade directa das noções numericas, por toda parte applicaveis, ellas acham-se sempre subordinadas aos attributos correspondentes; na algebra, porém, essas noções tornando-se indeterminadas, perdendo, portanto, o unico character que lhes garantia uma positividade subalterna, porém directa, desapareceu o

(1) Cabanis—*Rapports du physique et du moral de l'homme*—
pag. 67.

mais poderoso motivo que podia manter justamente limitadas suas pretensões, e desde então pôde desenvolver-se em seu dominio a pretensão absurda de querer explicar os factos mais complicados como consequencias dos mais simples; pretensão em grande parte favorecida por geometras retrogrados, a quem a falta de uma verdadeira disciplina philosophica, tornava incapazes de apreciar a necessidade palpitante de acabar com taes anomalias.

Kant logo que o espirito mathematico pretendeu levar seu dominio ás questões da methaphysica, procurou pôr um paradeiro a semelhante movimento distinguindo as idéas em duas cathogorias: idéas de quantidade e de qualidade, sendo as primeiras as unicas que deviam ser tratadas no terreno mathematico.

Semelhante obstaculo, porém, foi completamente destruido, pois que a algebra por si só mostrou a pouca importancia de uma tal distincção, e mais tarde a concepção de Descartes levou-lhe um golpe decisivo, deixando claro que todas as especulações geometricas podem ser reduzidas a questões numericas, redução esta que seus successores estenderam aos phenomenos de equilibrio e movimento, considerados pelos methaphysicos como não podendo soffrer esta transformação.

Com a renovação Cartesiana a algebra apresentou mais um motivo para assegurar-lhe o primeiro lugar no conjuncto scientifico, allegando a universalidade das leis de extensão e movimento.

Desde então ficou o materialismo mathematico ligado ao materialismo desenvolvido em cada uma das outras sciencias, cada uma das quaes procurava

dominar, pela ausência de um laço subjectivo que lhes podesse indicar a subordinação normal dos phenomenos, uns em relação aos outros.

O materialismo mathematico apresenta pois duas phases : uma abstracta, essencialmente metaphysica; outra concreta, como positiva, mas tambem tão illegitima e anormal quanto a primeira.

Vejamos quaes os fundamentos em que se baseou o materialismo abstracto para querer pretender dar ao calculo o primeiro lugar na serie das sciencias.

Vencido definitivamente, como foi pelo calculo o obstaculo que se lhe apresentou da futil distincção das quantidades e qualidades, era necessario mostrar os verdadeiros limites de realisação do principio do materialismo abstracto. que estabelecia a sugeição necessaria de todos os phenomenos a leis finalmente numericas.

E' exacto que todos os phenomenos que nos apresenta a ordem exterior só podem ser modificados quanto a sua intensidade, e que suas variações são numericamente reguladas; porem, tambem é exacto que muito raras vezes nos é possivel traduzir em nossas theorias mathematicas os factos exteriores que estudamos.

A excepção de um pequeno numero de phenomenos do mundo inorganico, todos os mais hão de eternamente ficar excluidos de poderem ser traduzidos por equações, como pretendeu fazer crêr o desmedido orgulho dos espiritos metaphysicos.

Mesmo no dominio abstracto todos os esforços têm sido até hoje completamente inuteis para levar a algebra alem da resolução das equações dos quatro primeiros grãos.

A criação do calculo transcendente se por um lado veio abrir um campo mais vasto para o dominio algebrico, por outro, alem de mais difficil, veio tornar patente o quanto as difficuldades que se vão apresentando estão em grande disproporção com os nossos recursos intellectuaes.

Convem, pois, a bem da moral e da razão, disciplinarmos nossos esforços quer theoreticos, quer praticos limitando-nos tão somente a investigações de que nos possa resultar alguma utilidade real; convem abandonarmos por uma vez, como em extremo prejudiciaes, todas essas divagações theoreticas inuteis, mantendo-nos nos limites em que dignamente possamos utilizar os nossos esforços, e procurar só tratar de questões que estejam ao alcance da nossa intelligencia e que nos sejam indicadas por uma justa e indispensavel subordinação social.

Toda cultura algebrica isolada, salvo o desenvolvimento necessario que exige sua destinação encyclopedica, que não vise o desenvolvimento de sua destinação physica e moral, deve ser repellida pelos verdadeiros geometras modernos como inutil e pedantesca.

Nós passamos agora a tratar de um outro ponto cuja exagerada importancia, tão apregoada pelo materialismo abstracto, tem tornado viciosa a apreciação do calculo, inculcando no espirito dos que começam noções inexactas, obscuras, felizmente hoje energeticamente repellidas pelos nossos mais eminentes professores.

A questão de que pretendemos falar é relativa ao papel desempenhado no dominio mathematico pelos signaes, ahí empregados como um meio essencial-

mente proprio para facilitar o emprego tão frequente da deducção.

A anarchia a tal respeito chegou a ponto de pretender-se dizer que o calculo das relações nada mais é que o calculo dos valores quando deixa-se de empregar os algarismos para adoptar-se as letras como symbolos muito mais geraes ! De modo que é common ouvir um estudante dizer, que uma formula, desde que deixa de ter todos os seus elementos expressos por numeros e passa a tel-os expressos por letras, passa, por esse simples facto, a questão do dominio arithmetico para o dominio algebrico !

Taes são as noções absurdas, influenciaes de um materialismo impossivel, que podem inspirar aos jovens estudantes a maioria dos compendios geralmente adoptados.

Não se quer negar a importancia da annotação, o que se diz é que ella nada creou em leis, e que independentemente d'ella as theorias se podiam constituir, embora com outras difficuldades.

Não foram os signaes algebricos que crearam os principios da algebra, do mesmo modo que não foram os algarismos que crearam as leis numericas ; quer uns, quer outros foram descobertos pela intelligencia baseada em uma justa apreciação do mundo, a qual para chegar a taes descobertas sentio a necessidade absoluta de ajudar e poupar a acção cerebral, instituindo para isso um modo especial e o mais vantajoso de traduzir idéas já apreciadas, de modo a tel-as sempre presente por uma justa relação entre o signal e a sensação correspondente.

« Desde que se tem necessidade de falar repetidas vezes de uma cousa, outras rasões ha, além

da economia de espaço e tempo, para fallar-se o mais breve possível. De que obscuridade seriam envolvidas as demonstrações geometricas se todas as vezes que a palavra *circulo* devêsse ser empregada a ella se substituisse sua diffinição! Nas mathematicas e em suas applicações, onde a natureza do processo exige que a attenção seja constantemente concentrada e não distrahida, sempre sentiu-se e com razão, a necessidade de uma semelhante concentração nas expressões.

Desde que um mathematico vê que tem muitas vezes occasião de fallar de duas mesmas cousas junctamente, elle estabelece immediatamente um termo para as designar todas as vezes que ellas se acharem combinadas, como quando nos calculos algebricos elle substitue, por exemplo $(a^m + b^n) \frac{p}{q}$ ou $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}v$. por P, Q ou S, nem só tendo em vista a abreviação das expressões symbolicas, mas tambem a simplificação da parte puramente intellectual de suas operações, dando ao espirito a faculdade de fixar exclusivamente sua attenção sobre as relações da quantidade S com as outras quantidades da equação, sem ser inutilmente distrahido pela consideração das differentes partes de que se compõe S.

Independentemente, porém, da necessidade de clareza, ha uma outra razão ainda para dar-se um nome curto e resumido a cada um dos resultados os mais importantes da abstracção, obtidos no correr de nossas operações intellectuaes. Designando-as, nós fixamos sobre ellas nossa attenção, as conservamos continuamente diante do nosso pensamento, recordamos o nome e esta recordação suggere uma defi-

nição ; emquanto que se em lugar de nomes especiaes e caracteristicos nós nos houvessemos servido da reunião de outros nomes para exprimir o sentido, esta combinação particular de termos já habitualmente empregados para outros fins na que o fixasse na memoria.

Se nós temos necessidade de tornar permanente em nosso espirito uma certa combinação de idéas, nada é tão proprio para isto obter como um nome especialmente consagrado para exprimi-la. Se em lugar da formula «o limite de uma quantidade,» os mathematicos tivessem de representar a idéa que ella traduz, dizendo, «o valor de que uma quantidade aproxima-se de mais a mais seja crescendo, seja decrescendo, de tal sorte que a differença torne-se menor que qualquer quantidade dada, sem nunca poder ser nulla,» nós teriamos sido provavelmente privados da maior parte de verdades as mais importantes, que têm sido descobertas pela relação existente dentre as quantidades de diversas especies e seus limittes » (1)

Esta necessidade que o espirito sente de representar resumidamente os differentes elementos de seus raciocinios, se nos apresenta bem clara, para poder inspirar á razão, pela observação do mundo na existencia social.

Seria em extremo fastidioso se em nossas conversações diarias tivessemos, de enumerar cada pessoa de uma familia, suas relações de filiação etc, para dar a entender que se trata de um grupo determinado

(1) Stuart—Mill—Syst. de Logique—V. 2º, pag. 253.

de individuos ligados pelo sentimento do amor; sentindo isto, o espirito, para facilitar seu trabalho e facilitar áquelles a quem se dirige o comprehendel-o, representa um tal grupamento de individuos, que a abstracção permittio constituir um typo especial onde os elementos guardam entre si determinadas relações, sob o nome de *familia*, ficando assim a questão reduzida para os diferentes casos especiaes a uma simples particularisação desta formula geral pela junção do appellido de cada familia; e assim — dizemos — a familia Souza Oliveira, Rodrigues da Silva etc., muitas palavras emfim, resumem, um conjuncto de qualidades as quaes sempre que tiverem de ser empregadas englobadamente as poderemos substituir pela unica palavra que representa o seu conjuncto *agua*, mel, azeite, etc., são palavras que resumem conjunctos de determinadas qualidades e que nós podemos enunciar em substituição á enumeracão parcial de cada uma das qualidades correspondentes, para dar a conhecer o corpo por ella representado.

Entre as grandes vantagens que os signaes trouxeram ao dominio mathematico e que todos são concordes a reconhecer, e o papel creador que muitos lhe querem attribuir na descoberta dos principios, vae o abysmo que medeia entre a descoberta das leis intellectuaes e o emprego das palavras para facilitar os raciocinios, entre a descoberta das leis astronomicas e o emprego das lunetas.

O desenvolvimento da algebra teve lugar em uma epocha em que era notavel a anarchia scientifica, uma epocha em que o estudo dos detalhes distrahia inteiramente o espirito do ponto de vista do conjuncto e d'ahi toda essa multidão de idéas methaphy-

sicas obscuras, vagas que tão falsa noção leva a fazer-se do dominio do calculo.

O que é certo é que os antigos geometras sem o uso dos signaes abreviados de que hoje fazemos emprego nos legaram principios importantissimos, descobertas immorredouras que constituem a base solida sobre a qual se eleva o nosso edificio mathematico.

Os signaes de que actualmente dispomos datam quasi todos do seculo XVI, a representação das quantidades conhecidas por lettras só foi estabelecida por Viète.

O emprego dos signaes geraes alem das vantagens já assignaladas convêm para facilitar muito tanto a deducção como a inducção.

Semelhante aptidão não se nos póde apresentar mais claramente do que em exemplos os quaes, para isso, trataremos pelo emprego da linguagem ordinaria e pelo emprego dos symbolos geraes.

O exemplo typo aquelle que sempre foi apresentado pelos melhores geometros é o seguinte :

Quer-se dividir o numero 660, por exemplo, em tres partes, sendo a primeira maior do que a segunda de 30, e a segunda maior do que a terceira de 45. Sem adoptar a representação por lettras, isto é, usando da linguagem vulgar, o raciocinio devia ser o seguinte :

Para se chegar a conhecer as tres partes procuradas é evidente que nos basta conhecer uma d'ellas. Suponhamos que é conhecida a terceira parte, que é a menor : para termos a segunda temos que juntar-lhe 45, esta conhecida, para obter-se a primeira devemos acrescentar-lhe 30 o que equivale a juntar-se á terceira a somma de 30 e 45 ou 75.

A terceira parte sommada a 45, mais a terceira parte sommada a 75, mais a terceira parte deve ser igual a 660, d'onde conclue-se que tres vezes a terceira parte, mais 45, mais 75, ou tres vezes a terceira parte mais 120, deve ser igual a 660. Ora, se o triplo da parte procurada mais 120 é igual a 660, segue-se que esse triplo é menos que 660 de 120, isto é, é igual a 540. Se tres vezes a parte procurada é igual a 540, esta parte é igual a 540 dividido por tres ou 180; a segunda parte será igual a 180 mais 45 ou 225, e a primeira igual a 225 mais 30 ou 255.

Vejamos agora empregando a annotação algebraica o quanto torna-se simples e conciso o raciocinio. Seja x a terceira parte, a segunda será $x + 45$ e a terceira $x + 45 + 30$; d'onde $x + x + 45 + x + 45 + 30 = 660$ (1) $3x + 120 = 660$. $3x = 660 - 120$ $x = \frac{540}{3} = 180$.

A questão pois uma vez traduzida sob a fórmula (1), ficou reduzida a uma serie de deducções muitissimo simples e rapidas.

Para gravar bem a vantagem que realisa o emprego dos signaes, nós vamos complicar um pouco mais o mesmo problema.

Supponhamos que se quer dividir o numero 990 em quatro partes, sendo a primeira maior que a segunda de 30, esta maior que a terceira de 45 e esta maior que a quarta de 18.

Suppondo conhecida a 4ª parte, se a ella juntar-mos 18 teremos a terceira parte, conhecida esta, se a ella juntar-mos 45, teremos a segunda, o que é o mesmo que juntar á quarta 18 mais 45 ou 63; conhecida a segunda, si a ella juntar-mos 30 teremos a pri-

meira, o que equivale a juntar á quarta 30 mais 45, mais 18 ou 93.

A quarta parte, pois, mais a quarta sommada a 18, mais a quarta parte sommada a 63, mais a quarta parte sommada a 93, deve ser igual a 990; d'onde quatro vezes a quarta parte mais 18, mais 63, mais 93, é igual a 990.

Se quatro vezes a quarta mais 174, é igual a 990, é evidente que o quadrupulo da parte procurada é menor que 990 de 174 ou é igual a 816.

Ora, se o quadrupulo da parte procurada é igual a 816, esta parte é igual a 816 dividida por 4 ou 204. D'aqui conclue-se que a terceira parte vem a ser igual a 222, a segunda a 267 e finalmente a primeira a 297.

Pela annotação algebrica, a questão seria :

Sendo x a quarta parte, a terceira será $x+18$; a segunda será $x+53$; a primeira será $x+93$, e teremos :

$$x+x+18+x+63+x+93=990, \quad 4x+174=990,$$

$x=\frac{816}{4}=204$. Nós podíamos ainda para melhor fazer sobresahir as vantagens da linguagem algebrica complicar mais o problema augmentando o numero de partes em que deve ser dividido o numero dado, os casos, porém, que deixamos tratados bastam para nenhuma duvida deixar a um tal respeito.

Para dar uma idéa do modo por que os antigos traduziam os seus calculos, nós vamos transcrever da *Histoire des Mathematiques*, de Mary, uma parte de um calculo de Lucas de Burgos, que floresceu no seculo XVI. Trata-se de uma questão em que $8\frac{4}{13}$

representa a differença do quadrado das incognitas, e 6 a somma d'estas incognitas.

Elle representa uma das incognitas por uma *cousa*, a outra será, portanto, 6 menos 1 *cousa*; o quadrado da primeira elle chama 1 *census*, o da segunda será: 36 menos 12 *cousas* mais 1 *census*, de sorte que a differença dos quadrados vem a ser: 36 menos 12 *cousas*.

Por conseguinte tem-se:

12 *cousas* igualam 36 menos $8 \frac{4}{13}$, igualam $27 \frac{9}{13}$

Com os signaes de que usamos isto se escreveria:

$$12x = 36 - 8 \frac{4}{13} = 27 \frac{9}{13}$$

Imagine-se agora quando os calculos fossem multiplicados o quanto deveria tornar-se fastidiosa e insuportavel a annotação antiga. Quantos progressos não deve o espirito humano a simplicidade e concisão que lhe proporcionou o emprego da annotação moderna!

Os exemplos citados bastam para mostrar o verdadeiro merito dos signaes empregados no calculo, cuja necessidade é forçoso concordar, do mesmo modo que convém não exaggerar sua efficacia geral.

De todas as linguagens por que nós podemos exprimir nossas idéas, a linguagem algebrica, incontestavelmente é a mais vantajosa.

Ouçamos A. Comte:

« Quando estiverdes bem convencidos, por estas comparações multiplicadas, da superioridade da linguagem algebrica, quando para nós esta superioridade fôr um facto sensivel e incontestavel, descobrireis facilmente a causa, isto é, a vereis bem a *priori*, na simplicidade dos signaes algebricos, que é a causa

da precisão e clareza que elles trazem aos raciocinios; haveis de referir isto á observação geral da influencia dos signaes considerados como instrumento para o pensamento; vereis que a mesma rasão que em nossas linguas nos faz designar por uma só palavra o que antes exigia muitas, nos leva tambem a substituir longas periphrases de nossas linguas vulgares pelos signaes da lingua algebrica: haveis de ver, em resumo, que a algebra não é outra cousa que uma lingua mais aperfeiçoada, e que possui em elevado gráo as propriedades, que nossas linguas tambem possuem mas em gráo infinitamente menor, e então vos haveis de convencer, emfim, que toda esta immensa superioridade da algebra sobre nossas linguas é devida a este unico facto geral: *os signaes são tanto mais propios para o raciocinio quanto maiores são as illipses de idéas mais vigorosas, que realisam sem se tornarem obscuros: »*

Nós vamos dar um exemplo em que se poderá apreciar a simplicidade, concisão e clareza da linguagem algebrica, relativamente á linguagem vulgar.

A relação que existe entre o espaço percorrido em um movimento uniforme e o tempo gasto em percorrel-o, traduz-se do seguinte modo em linguagem vulgar:

O espaço percorrido é igual ao espaço percorrido na unidade de tempo multiplicado pelo tempo.

Esta fórmula muito longa o espirito simplifcou e substituiu por uma mais simples e equivalente em que a palavra *percorrido* fica substituida, e a phrase *espaço percorrido na unidade de tempo*, é substituida por uma só palavra, *velocidade*, que traduz a mesma idéia e mais concisamente, a formula passou assim a ser:

O espaço é igual á velocidade multiplicada pelo tempo.

Esta, ainda longa, foi substituída por uma outra mais concisa e que ficou aceita como enunciando a lei característica do facto, eil-a :

O espaço é proporcional ao tempo

Esta lei a linguagem algebraica traduz muito mais simplesmente e com mais clareza e concisão na seguinte formula :

$$e = vt$$

em que cada palavra é substituída por uma unica letra, e o modo de dependencia claramente e concisamente indicado.

Em linguagem vulgar nós dizemos : o valor de uma fracção não se altera quando multiplicamos seus dois termos por um mesmo numero. Em linguagem algebraica esta phrase longa é substituída pela relação seguinte :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

cuja simplicidade, concisão e clareza extraordinariamente superiores as do primeiro modo de enunciar salta a simples vista.

Relativamente á generalidade não ha superioridade alguma da linguagem algebraica para com a linguagem vulgar. Assim, por exemplo, a palavra *grandeza* é tão geral como são os symbolos *a* e *b* ou *c*; as palavras *velocidade*, *espaço* e *tempo*, traduzem idéas tão geraes como os symbolos *v*, *e*, *t*, etc. que lhes correspondem em algebra.

A linguagem algebrica, porém, comparada á linguagem arithmetica, se nenhuma vantagem lhe leva sobre a simplicidade dos signaes e concisão na representação das idéas, lhe é superior em relação á generalidade.

Esta superioridade apresenta como principal vantagem a possibilidade de poder descobrir com o emprego do primeiro modo de annotação, principios cuja descoberta com o segundo modo seria difficilissima se não impossivel. O habito em que o espirito está de reduzir os elementos numericos, impossibilita-o extraordinariamente de manter prolongado o raciocinio sobre a transformação das relações. A lei binomial, por exemplo, muito claramente demonstrada com a annotação algebrica, torna-se difficillima e mesmo impossivel de descobrir com o emprego dos algarismos.

Além d'esta vantagem, incontestavelmente a de mais importancia, a linguagem algebrica ainda apresenta sobre a linguagem arithmetica a vantagem de chegar a formulas geraes em que o modo de formação da grandeza procurada é claramente traduzido, formulas applicaveis a todos os casos que só diffiram do considerado pelos valores numericos, o que com a annotação arithmetica é impossivel, havendo necessidade de renovar o calculo para cada um dos casos considerados embora só differentes quanto ao valor numerico das grandezas.

A linguagem algebrica, pois, é superior em simplicidade e concisão á linguagem vulgar e é superior em generalidade á linguagem arithmetica, o que a torna muito mais propria aos raciocinios geraes,

porque : *é mais facil fazer raciocinios geraes com signaes geraes, do que com signaes particulares.*

Estabelecidas estas considerações, vejamos quaes as fórmulas mais convenientes ás relações algebraicas quer elementares, quer transcendentales.

A algebra, como vimos, tem por objecto, quando considerada isolada de sua destinação concreta, tornar explicitas as formações ou funcções implicitas.

O que vem a ser uma funcção ou formação ?

Em geral uma grandeza diz-se funcção de uma outra, quando as variações de seu valor se achão subordinadas, segundo certa lei, ás variações do valor d'essa outra. Do mesmo modo um facto qualquer diz-se funcção de um outro, quando suas variações dependem das variações d'este outro.

No movimento dos corpos, no ar por exemplo, a velocidade depende da densidade do ar ; no phenomeno do tiro, o alcance depende das qualidades explosivas da polvora e da fórmula do projectil etc.

Esta denominação de funcção é no dominio mathematico uma das mais insupportaveis acquisições feitas pela anarchia scientifica. Tanto tem ella de propria para traduzir no dominio biologico o estado dynamico de um orgão ou a manifestação da acção convergente de muitos orgãos, quanto de impropria e obscura para dar idéa da noção mathematica que a indisciplina theorica procura com ella traduzir. Uma grandeza quando formada por outras ligadas entre si por meio de relações definidas, deve necessariamente variar sempre que aquellas que a constituem passarem por qualquer modificação.

Por conseguinte, a palavra empregada para dar a conhecer semelhante facto deve fazer immediata-

mente ver que o elemento por ella classificado é formado por aquelles cujas variações o fazem tambem variar, o que fica perfeitamente caracterizado na palavra *formação*, cuja substituição á denominação de funcção foi tão justamente proposta por Comte. Assim, pois, se uma grandeza *B* variar quando variarem *v*, *y*, *z*, *x*, nós devemos dizer que *B* é uma formação de *v*, *y*, *z*, *x*, o que traz logo a idéa de que estes elementos entrão na constituição de *B*, o que seria impossivel comprehender com a denominação de funcção.

O modo de dependencia existente entre a formação e as variaveis que a constituem pode traduzir-se de dois modos :

- 1.º Assimilando-o ao modo observado em um outro phenomeno melhor conhecido que o que se estuda, condição indispensavel para que o resultado seja util;
- 2.º Concebendo-se uma relação entre numeros abstractos correspondente ás relações entre os elementos concretos.

No primeiro caso a formação é *concreta*, no segundo é *abstracta*. Em qualquer dos dois casos a lei fica estabelecida com precisão; mas só no segundo é possivel a applicação do cálculo.

A formação concreta é, pois, concebida inseparavel dos elementos que os phenomenos considerados nos apresentam, em quanto que a formação abstracta torna-se completamente independente dos factos observados, chegando mesmo a considerar relações entre grandesas auxiliares, cuja intervenção póde facilitar os seus processos.

Esta distincção entre as formações nos deixa ver que quando mesmo se chegasse a determinar com

precisão as leis de todos os phenomenos, o emprego racional do calculo só seria possível para aquelles de que se podessem obter as formações abstractas correspondentes.

Esta passagem do dominio concreto para o abstracto é por tal fórma eivada de difficuldades, que até hoje só nos tem sido possível estudar mathematicamente um limitadissimo numero de factos physicos

Nós podemos, por exemplo, conhecer precisamente as leis que regem as combinações chimicas, as leis do desenvolvimento intellectual, do desenvolvimento social, mas o que nos ha de ser sempre impossível é poder estabelecer as formações abstractas correspondentes a taes factos, de modo a podermos estudal-os no dominio do puro calculo.

A formação concreta, portanto, só tem significação desde que se assignala o phenomeno em que ella se manifesta, emquanto que a formação abstracta póde ser concebida independentemente de qualquer facto geometrico ou physico, que a possa ter determinado.

A formação abstracta deve ser diffinida como sendo *uma expressão analytica em que certas grandezas se achão ligadas a outras por um modo determinado de dependencia, de fórma que os valores das primeiras ficão subordinados ao modo de variação das segundas.*

Um phenomeno qualquer se nos torna conhecido, sob o ponto de vista mathematico desde que nós chegamos a reduzir a puras comparações de grandezas as relações entre os elementos que concorrem para sua producção. Esta comparação tornada a mais rigorosa possível constitue a *equação.*

A equação, pois, póde ser definida como sendo a *expressão de igualdade entre duas formações abstractas das quantidades que se considera.*

Esta definição, naturalmente emanada da noção concreta da lei, tem a vantagem de deixar patente a vastidão do dominio logico e as difficuldades que pode comportar o problema geral d'esta sciencia. Assim definida a equação, a sua classificação fica logicamente subordinada á classificação das formações que a constituem, o que de modo algum se poderia conceber aceitando a definição ridicula expendida pela totalidade dos compendios especiaes, na qual a equação é exclusivamente caracterizada pela coexistencia de elementos incognitos com dados conhecidos.

A comparação, sob relação de quantidade, entre os elementos do facto considerado, póde ser ou de desigualdade, para mais ou para menos, ou de igualdade. No primeiro caso a noção que se tem em vista exprimir fica inteiramente vaga e só adquire precisão quando a reduzimos a uma relação de igualdade, embora indeterminada; no segundo caso a noção torna-se precisa. Assim, por exemplo, quando dizemos: Paulo é mais alto que Luiz, nenhuma idéa precisa nos fica da altura do individuo; mas se dissermos: Paulo é pouco mais alto que Luiz a noção torna-se mais concisa; este *pouco* como que limita o excesso da altura de um sobre outro, se finalmente dissermos: Paulo é da altura de Luiz só então a noção torna-se precisa e expressa.

Dizer, pois, que uma grandeza é maior ou menor que uma outra de uma certa quantidade, ou dizer que ella é igual a esta outra mais ou menos uma

certa quantidade, é uma e mesma cousa sob fórmulas differentes.

$a > b$ é o mesmo que $a = b + d$, $a < c$ é o mesmo que $a = c - h$ sendo d e h grandezas indeterminadas; tendo a segunda fórmula a grande vantagem sobre a primeira de exprimir uma noção muito mais clara e muito menos vaga.

Toda e qualquer comparação entre grandezas, pôde, pois, reduzir-se sempre á uma comparação de igualdade.

Estabelecidas as formações abstractas entre as grandezas de um facto qualquer, a comparação de igualdade entre ellas determinada, constitue a equação que deve ser considerada como constituida por dois termos.

Além da equação ha uma outra fórmula sob que se pôde traduzir a comparação das grandezas, esta fórmula é a proporção, que apresenta quatro termos.

$$ax = bc$$

é uma equação; sob a fórmula de proporção essa comparação seria :

$$a : b :: c : x$$

Este exemplo simplicissimo basta para logo fazer notar a vantagem superior do primeiro modo sobre o segundo, facto que se tornaria ainda mais saliente se nós apresentassemos cada termo como constituido por expressões algum tanto complicadas.

A equação como vê-se é uma fórmula mais simples melhor adequada ás transformações e mais clara; constitue um verdadeiro melhoramento no methodo, uma prova irrecusavel da tendencia de nosso espirito

em simplificar, e precisar os meios que elle emprega para elaborar suas construcções.

Toda proporção é sempre reductivel a uma equação e reciprocamente toda equação é sempre transformavel em uma proporção; mas esta é sem duvida alguma muito menos propria a facilitar os calculos e a precisar os raciocinios.

« Na proporção, diz Comte, póde-se perfeitamente apanhar uma serie de raciocinios pouco longos quando os quatro termos são monomios, mas substitui em seu lugar expressões por pouco compostas que sejam e sereis detido desde os primeiros passos. Só então sentireis verdadeiramente a superioridade da equação sobre a proporção. Se quereis conhecel-a ainda melhor procurai traduzir sob a fórma de proporção alguns raciocinios um pouco complicados, que sob a fórma de equação acompanhaes tão facilmente. Certamente esta traducção é sempre possivel, isto é, que ella não implica contradicção, mas vereis que difficuldade invencivel experimentareis nos raciocinios, que, sob a primeira fórma, nos pareciam tão simples. Em resumo, se quizerdes conhecer perfeitamente a superioridade da equação sobre a proporção, comparai os dois methodos traduzindo alternativamente um com o outro, vêde na geometria elementar, onde o uso tem conservado a fórma da proporção, quantos embaraços experimentaes desde que as deducções se complicam mui pouco, e quanto sois tentado a voltar involuntariamente á fórma de equação; notai ainda mais que a equação encerra as duas especies de proporções, o que ainda confirma nossa opinião á priori, de que toda fórma de comparação mathematica é reductivel á forma de equação »

Convém, pois banir a proporção como uma fórmula atrazada e só aceitavel para mostrar a marcha seguida pelo espirito humano em o seu desenvolvimento.

Um outro aperfeiçoamento, em apparencia muito simples, manifestou-se mais tarde, dando lugar a uma serie de importantes consequencias. A equação que já se achava deduzida a dois termos passou a só conter um; de $ax=b$ (1) passou a $ax-b=0$, attingindo assim o maximo de simplicidade a que era possivel chegar.

Este aperfeiçoamento, diz Comte, sob a apparencia de simplicidade occulta um avanço enorme no dominio mathematico. Os mathematicos não cuidam disto ordinariamente; eu não vejo traços d'esta observação em parte alguma. Entretanto o que seria da theoria geral das equações, e, por consequente de toda a algebra superior sem esta maneira de escrever as equações? Sem isto, pergunto, teria havido possibilidade de fazer essas descobertas? Fazendo passar para o primeiro membro todos os termos da equação a idéa de relação suggerida pela antiga fórmula ficou referida á idéa de combinação suscitada pela existencia de todas as quantidades em um só membro.

Realizada a simplificação final da condensação, em um só membro, de todos os termos da equação, facto este determinado pela necessidade poderosa em que o espirito se achou para poder formular o estudo comparativo das equações, a apreciação de cada agrupamento a que se reduziam as equações correspondentes

(1) Segundo Hoeffler—*Histoire des mathematiques*, pag. 366—esta transformação é devida á Harriot. Marie tambem é desta opinião—*Histoire des mathematiques*, pag. 93.

apresentou-se immediatamente como baseada na distincção essencial entre as constantes e variaveis.

Em algebra todas as grandezas são consideradas sob o ponto de vista de suas relações mutuas; a noção de valor é muito secundaria; as transformações são geraes e tanto se applicam ás relações entre grandezas reaes como ás relações entre as expressões em apparencia as mais anomalas. As grandezas, por tanto, são em taes condições consideradas em uma continua indeterminação: a ou b , por exemplo, sendo algebricamente consideradas grandezas conhecidas não deixam por isto de estar indeterminadas, podendo ser: 1, 2, 3, 4. . . . A questão reduz-se, como dizia Lagrange, sob o ponto de vista algebrico, a determinar os differentes grãos de indeterminação de que é susceptivel cada uma das grandezas.

Relativamente aos valores, por conseguinte, são algebricamente consideradas indeterminadas todas as grandezas; somente as considerações relativas ao modo de dependencia, ao modo de relação, existente entre as quantidades nos podem levar a perceber o contraste permanente entre as incognitas e os dados ou, o que é o mesmo, entre as variaveis e as constantes.

Quando dizemos, por exemplo, que no movimento uniforme o espaço varia proporcionalmente ao tempo, esta consideração basta para espontaneamente nos fazer ver que na equação deste movimento, $e=vt$, e e t são variaveis e v constante; emquanto que pela simples questão de valor v póde tambem variar conforme o movimento considerado é mais ou menos rapido.

A distincção entre constantes e variaveis apparece

sob o ponto de vista abstracto na consideração das equações á mais de uma incognita.

Um mesmo phenomeno póde dar lugar a uma ou mais equações, estas podem conter uma ou mais incognitas. Se o numero de equações é igual ao de incognitas o problema é determinado, se é inferior o problema é indeterminado.

Si nós tivermos uma equação da fôrma

$$y = ax + b \quad (2)$$

para obter os valores de y , nós podemos dar a x diferentes valores, os quaes combinados com as constantes a e b , nos darão os valores pedidos.

Do mesmo modo se tivermos um systema de duas equações á duas incognitas, para obtermos os valores de uma das incognitas nós podemos considerar em uma das equações, uma das incognitas como constante emquanto a outra continúa desconhecida e a ella subordinada.

Na equação (2) y é a *variavel dependente* ou *formação*, x a *variavel independente* e a e b são constantes.

A mesma distincção se apresenta em um phenomeno qualquer. A lei que rege um facto observado não é mais que a traducção do que ha de constante em toda a variedade que elle nos manifesta. Ha factos cuja lei uma vez estabelecida, póde ser traduzida por meio de relações simplesmente numericas, que vêm a ser a equação correspondente; esta, por consequente, traduz um modo de dependencia necessariamente o mesmo que o indicado pela lei. Se a lei exprime um modo de ser constante entre elementos variaveis e constantes, a equação exprime do mesmo modo uma relação cons-

tante entre quantidades constantes e variaveis. Se a lei, deduzida pela observação, nos diz que ha proportionalidade entre o espaço percorrido por um corpo que cahe e o quadrado do tempo gasto em percorrel-o, a equação se é verdadeira, não póde de modo algum deixar de traduzir a mesma relação.

Se na lei da quéda dos corpos o tempo e o espaço são considerados como variaveis e a accellerção como constante, na equação correspondente taes elementos continuam necessariamente com as mesmas propriedades caracteristicas.

A differença, pois, em algebra estabelecida entre constantes e variaveis, emana evidentemente da noção de lei, tem uma origem concreta.

A algebra, considerada de um modo geral, tem por objecto o estudo das funcções ou formações. Estas formações são estabelecidas pela comparação das grandezas que o phenomeno nos apresenta, consideradas simplesmente sob o ponto de vista de quantidade. Póde acontecer que não seja possivel estabelecer directamente essa comparação entre as grandezas consideradas, e d'ahi a necessidade de fazer intervir quantidades auxiliares deduzidas das primitivas segundo uma certa lei, e estabelecer entre estas as equações, para depois, por meio de transformações determinadas, passar para as equações entre as grandezas primitivas.

O facto, pois, da impossibilidade do estabelecimento da equação directamente entre os elementos considerados, surge de considerações concretas, da apreciação dos elementos relativos ao phenomeno que se estuda. Resulta d'ahi a divisão da algebra ou calculo das for-

mações, em *calculo das formações directas* e *calculo das formações indirectas* ou *calculo transcendente*.

Compreende-se que seria simplesmente futil querer attribuir uma distincção tão profunda como a que sepára estes dois ramos da algebra, á parte abstracta da questão, que só começa com o estabelecimento das equações, quando necessariamente já deve estar sabido se é ou não possível o estabelecimento directo de semelhantes relações de igualdade.

Só o conhecimento do phenomeno nos póde mostrar se póde-se ou não estabelecer directamente as equações entre os seus elementos. Ora, o conhecimento de um phenomeno qualquer nos é dado pela lei que o rege; logo, só a lei póde indicar a possibilidade de semelhante operação.

A divisão do calculo das relações, pois, emana da lei do mesmo modo que a distincção entre constantes e variaveis.

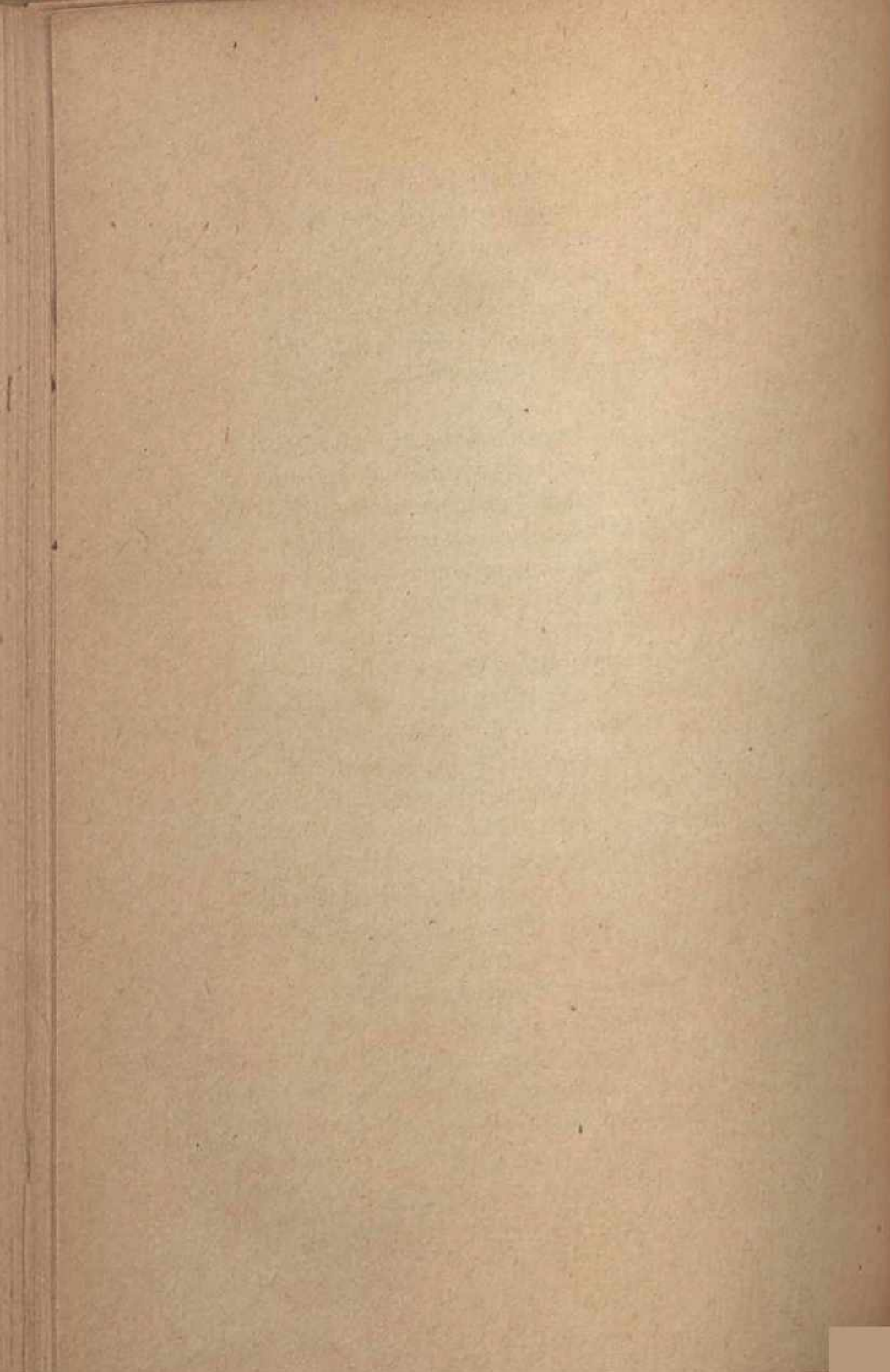
A concepção do calculo transcendente por Leibniz, teve como base indispensavel a immortal criação de Descartes. Desde então novos horisontes abriram-se ao dominio algebrico, novas questões poderam ser abordadas e muitas com notavel simplicidade.

Reduzido ao seu dominio elementar, diz Comte, o calculo das relações comportaria pouca efficacia concreta, visto a raridade das equações susceptiveis de uma verdadeira resolução, e sua fraca aptidão para representar os phenomenos naturaes. Em verdade a algebra transcendente não póde ter outro resultado se não o de fazer entrar indirectamente no dominio abstracto leis concretas que elle directamente não poderia comprehender. Esta transformação, porém, ainda que raras vezes realizada, basta para que os

minguados recursos do calculo elementar possam realmente convir a muitos casos, que por outro modo seriam inabordaveis. Pondo de parte toda pretensão absoluta, se reconhece que um tal methodo é eminentemente proprio a facilitar ao mesmo tempo a extensão e a ligação das doutrinas correspondentes, introduzindo grandezas mais simples e mais uniformes. (1)

As considerações que deixamos feitas são sufficientes e necessarias para não mais deixar ao espirito dos que principiam o estudo mathematico, duvida alguma sobre o verdadeiro character da algebra e legitimis limites de suas pretensões.

(1) Comte, *Synth Subjective*, pag. 191.



INSTITUIÇÃO FUNDAMENTAL

A traducção, em relações puramente abstractas, do modo por que os elementos, que concorrem para a realisação de um phenomeno se acham ligados, constitue a sua equação.

Ha, portanto, na algebra duas partes distinctas : uma não technica, em que tem-se em vista o estabelecimento da equação, outra technica tendo por objecto a resolução da equação.

Emquanto a segunda comporta methodos fixos e geraes, a primeira só é susceptivel de methodos particulares, conforme a natureza de cada ordem de factos considerados.

E assim deve ser. Na segunda parte as grandezas são apreciadas de um modo puramente abstracto, simplesmente quanto as suas relações mutuas, em quanto que na primeira os elementos são apreciados pelo lado concreto, e o processo consiste precisamente em fazer desaparecer da lei do phenomeno esse character concreto, especial, substituindo-se por uma outra numerica, podendo ser concebida em toda outra ordem de factos.

Estabelecida esta distincção, vê-se, como observa Comte, o quanto é falsa a idéa que se pretende dar a um alumno da difficuldade da passagem do dominio

concreto para o abstracto, propondo-se-lhe, para resolver, problemas de algebra onde a principal difficuldade já não existe, visto ter completamente desaparecido o character concreto, e cujo impecilio consiste na maior ou menor claresa do enunciado.

As difficuldades reaes de semelhante questão só póde ser devidamente apreciada na applicação do calculo aos phenomenos de extensão e movimento.

E' inexacto, pois, dizer-se que para o estabelecimento das equações não ha methodos. Para os phenomenos mecanicos e geometricos, ha methodos geraes, proprios a cada um d'elles, mas não são methodos abstractos, porém intimamente ligados a ordem de phenomenos a que se applicam. O verdadeiro objecto da geometria analytica é tornar possível o estabelecimento das equações de todos os phenomenos geometricos, do mesmo modo que o da mecanica analytica é de tornar possível o estabelecimento das equações dos phenomenos de movimento.

As difficuldades que se nos apresentam quando pretendemos passar do ponto de vista concreto para o ponto de vista abstracto são de tal sorte que, mesmo quando todos os factos que nos cercam nos chegassem a ser conhecidos por suas leis, nos havia de ser sempre impossivel traduzil-os na maior parte por meio de comparações de grandesa, estabelecidas entre seus elementos productores.

Ainda mais, quando isto nos fosse sempre possível, a complicação do calculo seria por si só sufficiente para obrigar a restringirmo-nos a um limitadissimo numero de casos.

E' exactamente isto o que já vemos acontecer com

a maior parte dos phenomenos geometricos e me-
nicos.

E' preciso, porém, confessar, afim de prevenir
inuteis divagações, e conter o vão orgulho mathema-
tico, que o que até agora está creado é bastante
sufficiente para satisfazer as exigencias reaes de nossa
existencia. O que sobretudo convém é aperfeiçoar e
applicar com mais criterio, aquillo que possuímos.
As difficuldades com que luctamos para fazer a pas-
sagem do concreto para o abstracto são em grande
parte devidas ao minguado numero de elementos
analyticos de que podemos dispôr, e o qual é preciso
perder qualquer esperanza de que se possa vir a
augmentar. Limitemos, pois, o emprego do calculo
ao pequeno numero de factos inorganicos suscepti-
veis de sua racional applicação, e, resignados, aban-
donemos por uma vez toda cultura inutil de que não
nos possão provir reaes beneficios.

A equação, dissemos, é uma expressão de igualdade
entre duas funcções ou formações abstractas das
quantidades que se considera.

Todas as funcções abstractas por mais complexas
que sejam, são sempre constituidas pela combinação,
mais ou menos variada das seguintes funcções abs-
tractas simples.

FORMAÇÕES ABSTRACTAS SIMPLES DE x

1.º Conjugado $\left\{ \begin{array}{l} x+a \dots\dots\dots \text{ formação somma} \\ x-a \dots\dots\dots \text{ formação differença} \end{array} \right.$

2.º Conjugado $\left\{ \begin{array}{l} ax \dots\dots\dots \text{ formação producto} \\ \frac{a}{x} \dots\dots\dots \text{ formação quociente} \end{array} \right.$

- 3.º Conjugado $\left\{ \begin{array}{l} x^a \dots\dots\dots \text{ formação potencia} \\ \sqrt[a]{x} \text{ ou } x^{\frac{1}{a}} \dots\dots\dots \text{ formação raiz} \end{array} \right.$
- 4.º Conjugado $\left\{ \begin{array}{l} a^x \dots\dots\dots \text{ formação exponencial} \\ \lg x \dots\dots\dots \text{ formação logarithmica} \end{array} \right.$
- 5.º Conjugado $\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } x \dots\dots \text{ formação circular directa} \\ \text{arc (sen} = x) \text{ formação circular inversa} \end{array} \right.$

Cada um d'estes grupos comprehende duas formações inversa uma da outra.

A este pequeno numero de elementos *analyticos* estão limitados os nossos recursos para a passagem do dominio concreto para o dominio abstracto.

Toda relação em cuja composição só entrar elementos destes que acabamos de citar, é uma verdadeira equação, basta, porém, a existencia de uma só função exclusivamente concreta, para que seja impossivel a applicação do calculo.

O ultimo grupo carece de uma observação necessaria. O modo de dependencia $y = \text{sen } x$ emquanto só podendo ser concebido suppondo-se a existencia de um arco e seu seno, não constitue uma função abstracta, porém, sim uma função concreta. O seu emprego no calculo é n'este caso, possivel transformando-a em outras funções circulares, avaliando-a numericamente, o que nos é permittido por propriedades particulares de que goza uma semelhante formação. Consideradas em suas relações com as formações exponencias, o modo de dependencia que estudamos não é mais que um um signal abreviado empregado no calculo para representar uma determinada combinação de exponenciaes.

Este grupo, pois, como diz Comte, é equivoco e bastardo.

Entre os quatro primeiros conjugados e o ultimo, ha, por conseguinte, uma differença profunda.

As funcções circulares se são funcções, são concretas ; se são abstractas deixam de ser simples e nada mais são que puros symbolos, o que não acontece com as outras que são ao mesmo tempo simples e abstractas.

Esta consideração de modo algum prejudica a noção de equação, já considerada, a qual é essencialmente relativa ao character abstracto da funcção e não ao seu maior ou menor estado de simplicidade.

A formação exponencial foi obtida fazendo-se passar, na formação potencia, o expoente para constituir a base, sendo elle substituido pela variavel independente. Esta modificação permittio a consideração dos expoentes fraccionarios, passando d'esta fórma as raizes a serem classificadas entre as potencias.

A exponencial, pois, é um elemento de origem exclusivamente abstracta do mesmo modo que os elementos do ultimo grupo são de origem puramente concreta.

Tal foi o extremo esforço, o ultimo recurso, que ainda teve o espirito humano para augmentar o numero de seus elementos analyticos. Hoje uma tal pretensão é simplesmente irrealisavel.

« Pensando-se nisto, diz Comte, concebe-se esta difficuldade quasi como insolavel, pois que ella apresenta duas condições quasi contradictorias: a de uma funcção avaliavel numericamente, e a de não poder esta ser composta de nenhuma das que se

sabe avaliar. Tambem não possuimos idéa alguma dos meios que poderiam dirigir esta invenção.

« As unicas funcções abstractas novas, que temos visto formar-se, a saber, a funcção exponencial e sua inversa, o foram por um artificio, que evidentemente acha-se esgotado e não póde fornecer mais nenhuma outra. Tambem os geometras jámais pensaram em uma tal empresa. O partido que elles tomaram foi o de illudir a difficuldade, supprindo a insufficiencia do pequeno numero de funcções simples pelo calculo das funcções indirectas, segundo o qual a equação de um phenomeno deve ser considerada como estabelecida, quando a relação existe não entre funcções directas das quantidades que se considera, porém, entre funcções derivadas d'estas por um modo analyticamente determinado, tal como o de *derivacão* ordinaria ou outro qualquer que se poderia inventar mais tarde, satisfazendo a mesma condição.»

Todas as funcções dos tres primeiros grupos apresentam uma origem arithmetica e geometrica. A numeração contem em si a noção precisa de cada uma das operações por ellas indicadas.

A formação de um numero por accessimo ou subtrações successivas de unidades, foi o facto que naturalmente concorreu para fornecer, sob um ponto de vista mais abstracto, os elementos analyticos do primeiro grupo. Em arithmetica a assimilação de unidades para formação dos numeros foi inspirada e deduzida de factos concretos; reunião de dedos, de anímaes, arvores, (1) etc. e só mais tarde forão os numeros

(1) Bourdeau—Theorie des sciences—v 1º, pag. 225.

considerados abstractamente independentemente da realidade objectiva, para constituirem o conjuncto da numeração. Estabelecida esta, formulou precisamente as noções de somma, subtração, producto, quociente e potencia, que, com o desenvolvimento da abstracção, deixaram de ser effectuadas sobre numeros particulares para serem applicadas a symbolos geraes e indeterminados, com os quaes só se tinha em vista fixar o modo de relação, ficando alheia toda questão de valor.

Houve, pois, na marcha do espirito humano um aperfeiçoamento gradual e de inteiro acordo com sua maior ou menor aptidão a abstrahir. As funcções, por conseguinte, que nós consideramos, apresentam uma origem essencialmente concreta. Seria quando menos um disparate querer fazer acreditar que as noções de relação traduzidas pelas formações já citadas só foram formuladas com a creação da annotação algebraica com que hoje as exprimimos genericamente.

Convem não confundir os dois factos: o gráo de abstracção da fórmula, e a lei, o modo de formação. O primeiro é incontestavelmente muito mais elevado na algebra do que na arithmetica, porém o segundo ou traduzido pelos symbolos algebricos, ou pelos algarismos arithmeticos, é o mesmo com que a observação primitiva estabeleceu a base da numeração.

A noção de multiplicação, por exemplo, que reduz-se a fórmar com uma série illimitada de numeros, tantas séries iguaes ao multiplicando, quantas unidades tem o multiplicador, está perfeitamente formulada quando considerámos o numero 50 como constituido por dez grupos cada um de cinco unidades.

Um numero qualquer, emfim, é um conjuncto de unidades de diferentes ordens, repetidas um certo numero de vezes.

O numero 2524, por exemplo, nós podemos decompor-o do seguinte modo :

$$2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10 + 4$$

Ora, basta contemplar esta expressão para immediatamente certificar-se de que a numeração contém em si, com precisão formuladas, as noções de relação que traduzem as formações que estamos apreciando.

Isto pelo lado arithmetico. Considerando o lado geometrico, nós ainda ahi encontramos a origem das formações simples dos tres primeiros grupos, sendo que a de raiz estendia-se sómente aos dois primeiros grãos mais simples, por si sós sufficientes para determinar os outros si a arithmetica não os houvesse fornecido. E com a geometria a ligação da algebra foi por tal forma intima que ainda hoje se resente na annotação. Nós dizemos, por exemplo, o quadrado de a , o cubo de b etc.

Este modo de designar é todo derivado do facto concreto de ter a representado o lado do um quadrado e b a aresta de um cubo.

Nas proporções com que os antigos resolviam suas questões, os termos eram inseparaveis da idéa concreta que elles representavam; não lhes era possível substituir a grandeza concreta pelo numero abstracto que representasse a relação entre ella e a unidade.

Assim, Euclides não dizia, um retangulo tem para medida o producto das medidas da base e da altura, porém, dizia: Dois retangulos quaesquer estão entre

si na *razão composta* de suas bases e de suas alturas, isto é, dois retangulos R, R' de bases B e B,' e alturas A e A' estão entre si como a base B está para uma quarta proporcional a A, A' e B'.

« Os gregos, diz Mary, nunca pensaram em separar sua Algebra da Geometria, isto é, a arte de raciocinar do objecto do raciocinio, porém, esta Algebra não ficou por isto em estado virtual, ao contrario ella manifesta-se em todos os seus escriptos. Verdadeiramente não lhes faltou para constituirem a Algebra que a idéa de fazer tratados a parte e a de substituir por signaes as indicações, em linguagem ordinaria, das operações a effectuar sobre as grandezas. Se elles houvessem representado por $A+B$, ou outro modo qualquer, a somma de dois comprimentos A e B, por $A-B$ sua differença, por $A \frac{B}{C}$ a quarta proporcional aos tres comprimentos A, B, C; por $\sqrt{A, B}$, a meia propocional entre os comprimentos A e B, por $\sqrt[3]{A, B}$, a primeira de duas meias proporcioaes inseridas entre A e B; por $\sqrt[n]{A, B}$, a primeira dos $n-1$ meios proporcioaes inseridos entre A e B, a Algebra teria um nome grego em lugar de um nome arabe; e, entretanto, os gregos, por isto, não teriam feito nem mais nem menos Algebra do que fizeram. • (1)

As funcções algebraicas simples são, pois, de origem cancreta. As idéas fundamentaes que ellas nos dão a conhecer são as mesmas que as dos antigos geo-

(1) Mary.—Histoire des Mathematiques vol. I pag. 7.

metras, com a differença de que nós as fomos des-
pindo do character concreto em que elles as conside-
ravam para só as apreciarmos quanto ao modo de
dependencia por ellas instituido, independentemente
de qualquer facto que as pudesse inspirar.

Em algebra as grandesas são consideradas de um
modo inderteminado quer quanto ao gráo, quer
quanto ao genero. No primeiro caso se nos apresenta
a sua origem arithemetica, pois que a apreciação das
relações não implica a consideração dos valores, que
podem ser quaesquer ; no segundo caso temos a ori-
gem geometrica, pois que a apreciação das relações,
quando a razão torna-se sobretudo deductiva, per-
mitte estender a indeterminação, em começo só rela-
tiva ao gráo, ao genero das grandesas consideradas.
Assim por exemplo, apreciando o facto da queda de
um corpo nós representamos o tempo e o espaço pe-
los symbolos a e t , podendo ter valores quasquer e
traduzimos a modo de relação que existe entre
estes elementos. Isto feito, a razão principia a tor-
nar-se essencialmente deductiva, o facto physico deixa
de ser considerado, e então a e t passam a ser tambem
indeterminados quanto ao genero de grandesas que
representão, isto é, podem representar duas outras
grandesas differentes de um novo facto, uma vez que
entre os elementos deste ultimo exista um modo de
dependencia igual á aquelle do primeiro facto consi-
derado.

A superficie de um circulo, por exemplo, é sempre
igual, numericamente, ao quadrado do raio multi-
plicado por um numero constante, ou algebricamente
a solução é sempre a seguinte :

$$y = Ax^2$$

No movimento dos corpos pesados no espaço, a relação entre o espaço y e o tempo x medidos convenientemente ainda é:

$$y = Ax^2$$

O facto algebrico pois, permanece o mesmo desde que o modo de relação apreciado é identico (1).

Segundo se considera a origem geometrica ou a origem arithmetica, as relações são traduzidas sob a forma de proporção ou equação. O primeiro modo embora dominante entre os antigos, está hoje inteiramente preterido pelo segundo, como mais proprio a facilitar as especulações geometricas e mecanicas, e melhor destinado ao aperfeiçoamento do methodo universal, que constitue a parte essencial do calculo.

Estas vantagens, relativas ao uso das equações levaram a algebra a esquecer completamente sua origem geometrica, facto que incontestavelmente muito concorreu para facilitar as aberrações metaphysicas, ainda hoje sensiveis no dominio mathematico.

Basta, porém, superficial apreciação dos trabalhos analyticos dos antigos para immediatamente afastar qualquer duvida em aceitar a origem geometrica do calculo das relações.

« Os geometras gregos, diz Mary, do periodo que consideramos, possuem como meio logistico uma algebra já muito avançada, ainda que baseada inteiramente sobre as transformações de que é susceptivel uma proporção; mas são as proprias grandezas e não suas medidas que entravão em suas formulas

(1) Laffitte—Calcul arithmetique—vol. 1º—pag. 16.

notadas em linguagem ordinaria. De facto; elles sabião resolver todos os problemas do segundo gráo a uma incognita, sabião referir a resolução das proporções, pelas quaes ainda hoje passamos antes de chegar ás equações (pois que é sempre de alguma relação de semelhança que nós tiramos estas equações) seja á construcção de uma meia proporcional entre duas grandezas, o que reduz-se á resolução de uma equação da fórmula.

$$x^2 = ab ;$$

seja á construcção dos lados de um rectangulo, cujo semi-perimetro e a superficie representada por um quadrado, são dados, o que reduz-se a resolução de uma equação da forma :

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

seja á construcção dos lados de um rectangulo, conhecendo-se sua differença e a superficie do rectangulo, o que reduz-se a resolver uma equação da forma :

$$x^2 \times px - q^2 = 0$$

De sorte que só ficavam fóra de sua analyse as equações da fórmula :

$$x^2 + px + q^2 = 0$$

que não têm soluções propriamente dictas e que por conseguinte não podião apresentar-se a elles (1)
Influenciada pelo regimem philosophico suggerido

(1) Mary—Histoire des mathematiques v. 1º, pag. 5.

na idade media, que proclamava a subordinação do espirito para com o coração e que dispunha por conseguinte a subordinar a analyse á synthese, o abstracto ao concreto, a algebra subordinou a elaboração abstracta ao desenvolvimento concreto, e assim melhor systematisada permittio á mathematica uma organização perfeitamente adequada á sua missão encyclopedica, até que a anarchia desenvolvida no seculo XIX, inspirando e realisando as usurpações algebricas, determinou uma reacção, cuja principal tendencia convergio para destruir os esforços syntheticos realisados pelo admiravel genio de Descartes com a creação da geometria analytica.

Esta anarchia poderosamente auxiliada pelo ascendente metaphysico só pôde desaparecer completamente com o aparecimento da doutrina positiva, que desenvolvendo a preponderancia do sentimento, estabelecendo o ponto de vista social, conseguiu fazer convergir dignamente todos os esforços intellectuaes e praticos, sob as impulsões sociaes emanadas do coração.

Sob um tal regimen, o desenvolvimento do calculo fica subordinado á sua destinação geometrica indicada muito naturalmente pela sua posição na ordem encyclopedica. E foi este precisamente o facto eminentemente philosophico elaborado pela concepção cartesiana, que facilitando e estendendo as generalisações algebricas, estabeleceu ao mesmo tempo o dominio geometrico do calculo para o qual deviam convergir suas verdadeiras e legitimas aspirações.

Esta concepção, como observa Comte, mais que qualquer outra influio para o aparecimento do calculo infinitesimal, sem o qual a impulsão dada pelo

immortal fundador da philosophia mathematica seria completamente insufficiente.

Assim fundada na combinação systemathica entre a geometria e a algebra, a philosophia mathematica deixou bem claro a sua independencia para com o desenvolvimento da mecanica, a qual suppunha necessariamente esta combinação, que constitue o unico modo de fornecer um esforço sufficiente para elaborar a theoria geral do movimento, como devendo permittir a instituição do calculo infinitesimal, indispensavel ao dominio mecanico para o emprego do methodo correspondente, ahi de importancia capital.

Esta revolução realizada por Descarte só podia ser completada pela apreciação positiva do conjuncto mathematico, onde o sentimento deve subordinar os signaes e imagens, combinadas no dominio geometrico pelo immortal legislador mathematico.

Desde então o estudo das especulações mathematicas deve ser a base de todo systema racional da educação como necessaria ao desenvolvimento das leis intellectuaes, physicas e mesmo moraes.

« Demais, diz Laplace, é curioso figurar-se no espaço os diversos resultados da analyse, e, reciprocamente, ler todas as modificações das linhas e das superficies e todas as variações dos movimentos dos corpos nas equações que os exprimem. Esta incorporação da geometria e da analyse espalha uma nova luz sobre estas duas sciencias. As operações intellectuaes desta ultima, tornadas sensiveis pela imagem da primeira, são mais faceis de comprehender, mais interessantes de seguir; e quando a observação realisa essas imagens e transforma os ra-

sultados geometricos em leis da natureza, quando estas leis abrangendo o universo desvendam aos nossos olhos seus estados passados e futuros, a vista deste sublime espectaculo nos faz expirimentar o mais nobre dos praseres reservados á natureza humana. » (1)

Estas considerações sobre a origem e a destinação concreta do calculo das relações tornam-se indispensaveis quando se attende que são ellas um poderoso correctivo ás divagações e a insoburdinação do espirito á verdadeira ordem.

Negar a origem arithmetica e geometrica das formações algebraicas simples, é nada menos que pretender dar aos modernos a gloria de haverem formulado noções, cuja existencia, sem contestação séria, devemos aos nossos antepassados.

Nós aperfeiçoamos o methodo porque assim nos permittiram a abstracção e o meio social, mas as noções fundamentaes, que traduzem as formações elementares, são creações d'elles, foram elles que nos legaram, e nós ainda hoje lhes não levamos modificação alguma: são ainda as mesmas e hão de ser sempre, porque foram verdades deduzidas de uma justa e aturada observação do mundo.

O quarto grupo ou conjugado, é de existencia toda moderna. Basta considerar, observa Comte, o quanto foi longo e importante o desenvolvimento do calculo sem o seu auxilio para ver-se o pouco ou nenhum accrescimo por elle produzido na imaginação mathematica.

(1) Laplace.—Systhème du Monde, pag. 339.

As funcções algebraicas simples, devem, pois, ser consideradas como sendo ao mesmo tempo concretas e abstractas. Assim apreciadas, ellas nos apresentam o calculo sobre quantidades indeterminadas como satisfazendo as duas condições : abstracção e continuidade, e assim permitem á algebra realizar completamente sua destinação encyclopedica, ligando a arithmetica á geometria. A existencia da continuidade, sendo característica nos phenomenos geometricos, para obtel-a no dominio arithmetico basta considerar o estudo das fracções como complemento necessario do estudo dos numeros inteiros e d'este modo póde a algebra, por meio das formações elementares estabelecer a ligação do conjuncto geometrico com o dominio arithmetico, d'onde resulta para a geometria um certo gráu de abstracção, imposto pelos typos emanados da elaboração numerica. Esta continuidade que resulta para a arithmetica da dependencia algebraica para com a geometria, e a abstracção que adquire a geometria para considerar os typos arithmeticos subordinados á algebra, fazem repellir como viciosas do dominio mathematico, nem só todas as funcções que não podem satisfazer a condição de continuidade, como tambem todas aquellas que forem e permanecerem exclusivamente concretas.

Tendo sempre em vista a questão concreta, nós vemos que esta condição de continuidade, que devem satisfazer as funcções para poderem entrar nos calculos é uma consequencia logica do modo por que se nos manifestam os phenomenos que nos cercam.

Com effeito, desde que uma equação, que nada mais é que uma relação de igualdade entre duas

funções abstractas das quantidades consideradas, traduz a lei do phenomeno despidido de todo caracter concreto que lhe é proprio, é claro que o modo de ser essencial, que a lei diz existir entre os elementos do facto que ella rege, não pôde de modo algum ser modificado em sua natureza pela sua traducção em relações puramente numericas, uma vez mantida a exactidão na passagem do dominio concreto para o dominio abstracto.

Ora, não ha facto algum, não ha lei, que nos indique descontinuidade nos elementos, cujas relações ellas traduzem. Querendo, pois, e como é de dever o fazer, conservar a algebra reduzida ao desenvolvimento que exige sua destinação geometrica e mecanica é necessario e indispensavel banir completamente de seu dominio todas as funcções não continuas, como incapazes de traduzir um facto de existencia real. Para estudar um phenomeno qualquer é essencial suppor-lhe continuidade; só esta nos permite apanhar pela observação o modo de dependencia entre os elementos concretos; só ella nos pôde dar o conhecimento da lei.

Em cada uma das formações simples do nosso quadro devemos distinguir tres elementos sempre coexistentes: a *constante*, que determina a base de cada filiação, e as duas variaveis, cuja correlação constitue o elemento correspondente.

Nas formações:

$$y=a-x, y=a+x, y=ax, y=\frac{a}{x}, \text{ etc.}$$

a base é a ; a variavel dependente x , e y é a variavel independente ou formação.

De um modo geral esta dependencia entre a formação e a variavel independente é indicada dos seguintes modos :

$$y=f(x), y=F(x), y=F_1(x) y=F_2(x) \dots$$

que se leem : y , formação f de x ; y , formação F de x , etc.

Se em vez de uma só variavel independente, ha outras mais, a indicação será : $y=f(x, y, z, \dots)$, $y=F(x, y, z, \dots)$

Em resumo a indicação consiste em escrever dentro de um parenthesis as variaveis independentes e fóra á esquerda uma letra, que será a mesma quando o modo de dependencia da formação para com a variavel independente for o mesmo.

Assim nós podemos de um modo geral, indicar as formações :

$$y=4+x, y=6+x, y=\frac{2}{3}+x, \text{ por } y=f(x);$$

se quizermos agora representar de um modo identico as formações :

$$y=6-x, y=\frac{9}{5}-x \text{ etc.}$$

temos de adoptar uma outra letra afim de deixar ver que o modo de dependencia é outro diverso do primeiro, e então escreveremos, para o segundo caso :

$$y=F(x)$$

As formações, segundo o modo por que geram os valores dos elementos correspondentes são classificadas, como indica o nosso quadro, em conjugados,

compreendendo cada um destes dois modos de formação inverso um do outro, identicamente ao modo de classificação das operações arithmeticas correspondentes.

As formações simples. $y=x+a$, $y=a-x$ etc.... desde que se acham combinadas, constituindo grupos mais ou menos complexos, tomam a denominação de formações compostas, exemplo:

$$(1) \frac{a^x}{b} + \frac{a^2}{b}, \frac{\lg x}{a-a} - \frac{c-x}{2}, \frac{a-x}{a^2-x^2} + \frac{\sqrt{x}}{b-d},$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{a x}{a+x} \dots ax-b = \text{etc.}$$

Os tres primeiros conjugados do nosso quadro comprehendem as formações ditas *algebricas*, sendo as outras classificadas de *trancendentes*. Esta distincção é até certo ponto obscura, pois, como judiciosamente observa Cauchy, deviam ser classificadas de algebricas todas as formações que dessem lugar a operações algebricas. Uma tal distincção, porém, convém que seja mantida como baseada no contraste entre o character normal do grupo algebrico, que apresenta a dupla origem arithmetica e geometrica, que o torna naturalmente proprio a dar ao calculo a aptidão necessaria para a realisação de sua missão encyclopedica, e o facto anormal de uma origem exclusivamente abstracta ou exclusivamente concreta, que caracteriza as formações dos dois ultimos grupos; contraste este que mais claro ficaria si se adoptassemos as denominações propostas por Comte, de formações *naturaes*, para as primeiras, e formações *artificiaes* para as ultimas.

Esta distincção entre os elementos abstractos determina uma distincção identica para as formações compostas quer algebraicas, quer transcendentis, conforme entra ou não em sua constituição uma ou mais de qualquer das formações transcendentis.

Das funcções (1) as duas primeiras são transcendentis, porque contêm as formações simples transcendentis a^x e $\lg x$; e as tres ultimas são algebraicas, porque só entram em sua constituição formações simples algebraicas.

As formações algebraicas simples dividem-se em *irrationaes* e *racionaes*, *inteiras* e *fraccionarias*.

As formações $y=a+x$, $y=a-x$, $y=ax$, são inteiras e racionaes; a formação $y=\frac{a}{x}$ é fraccionaria e racional, a formação $y=\sqrt{x}$ é inteira e irracional.

As mesmas distincções permanecem para as formações compostas. Por mais complicada que seja a constituição das formações compostas se a variavel achar-se em denominador a formação é fraccionaria; se se achar affecta de um radical a formação é irracional; se satisfizer estas duas condições a formação é fraccionaria e irracional, se não satisfizer a nenhuma dellas a formação é inteira.

Exemplo :

$$\frac{3x-2}{a-x} + \frac{2-x^2}{a}, \frac{\sqrt{x}}{a-x} + \frac{4-x^2}{2-x}, \frac{a-x^2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x},$$

$$\sqrt{a-x-3x^2}, x^3+2x^2+x-3$$

A primeira formação é fraccionaria e racional, as duas seguintes são fraccionarias e irrationaes, a

quarta é irracional e inteira, e finalmente a ultima é inteira e racional.

Desde que a formação composta contenha mais de uma variavel as distincções continuam a ser as mesmas, tendo cada uma das variaveis de satisfazer as condições que determinam as distincções no caso de uma só variavel. Assim toda e qualquer expressão que só contiver potencias inteiras das variaveis x, y, z, \dots e não apresentar nenhuma destas variaveis em denominador, é uma formação inteira de x, y, z, \dots .

As formações irracionaes distinguem-se dos racionaes pelas propriedades especiaes de que gozam os elementos que as caracterisam, Só em casos especiaes é possivel reduzir os radicaes de uma formação em uma expressão unica; este obstaculo devido ás propriedades destes elementos e não a impotencia ou atrazo do calculo algebrico, é uma das invenciveis difficuldades que encontrou o problema geral da resolução das equações. As formações irracionaes gozam da propriedade de poder ter uma multiplicidade de valores, o que não se dá para com as formações racionaes. A formação $y=f(x)$, por exemplo, para cada valor dado a x fornece um valor correspondente de y , emquanto que a formação :

$$y = \sqrt[m]{a - f(x)}$$

para cada valor de x fornece m valores para y . As formações irracionaes finalmente podem dar lugar a expressões imaginarias, o que não acontece para com as formações racionaes.

Suppondo na formação $y = \sqrt{3x-15}$, $x=2$, nós obtemos para y , o valor imaginario $y = \sqrt{-9}$.

As formações inteiras distinguem-se das fraccionarias, porque estas podem, para valores finitos dados a variavel, apresentar soluções infinitas e indeterminações, o que não se dá para com as primeiras, que só são infinitas para valores infinitos dados a variavel.

Se nas formações:

$$y = \frac{a}{x-3}, y = \frac{x(4-x)-3}{3-x},$$

fizermos $x=3$, teremos para y , os valores

$$y = \frac{a}{0} = \infty, y = \frac{0}{0},$$

o primeiro symbolo do infinito, o segundo de indeterminação, no entanto a variavel recebeu o valor finito 3.

Uma formação de uma ou mais variaveis diz-se *explicita*, quando o seu modo de dependencia para com as variaveis acha-se claro e immediatamente expresso, exemplo:

$$y = ax, y = a + x, y = \frac{a+x^2}{3} \text{ etc...};$$

é *implicita*, quando o modo de dependencia não se acha immediatamente expresso e só pôde ser obtido mediante uma série mais ou menos longa de transições mais ou menos complicadas.

Exemplo:

$$y - a - x = 0 \quad y - \frac{ax}{a-x} + \frac{4}{b-x} x^2 = 0$$

Obtida a equação de um facto qualquer, a passagem do estado implicito das formações que a cons-

tituem, para o estado explicito correspondente é em que consiste a sua resolução.

Se tivermos, por exemplo, a equação $y - a - x = 4 + x$ (1), para resolvel-a é preciso modifical-a de maneira a tornar claro o modo porque y que é a formação está constituido por x e por a .

Effectuando as transformações temos:

$$(2) y = 4 + a + 2x.$$

formula que nos da immediatamente a maneira por que os valores de y são obtidos pelos valores dados a x .

A série de transformações operadas para passar do estado (1) para o estado (2) constitue a resolução da equação.

Embora o alumno ainda não se ache habilitado para conhecer a legitimidade destas transformações, todavia pode desde já, e é este o fim que temos em vista, perceber o começo e o fim da phase abstracta a que em ultima analyse reduz-se o objecto do calculo algebrico.

Resolver, pois, uma equação é transformal-a até que fique perfeitamente claro o modo porque a formação está constituida pelas constantes e variaveis.

Na annotação algebrica o facto consiste em isolar em um dos membros da igualdade a formação, e no outro a combinação entre as variaveis e constantes.

Isto uma vez obtido, fica terminada a phase algebrica e a questão passa a entrar no dominio do calculo dos valores.

Para classificar as equações nós temos dois modos: ou pela natureza dos elementos abstractos que a constituem ou pelo gráo.

As equações dividem-se em *algebraicas* e *transcendentes*, segundo contêm sómente formações simples algebraicas ou contêm uma ou mais formações transcendentes. Esta distincão torna-se necessaria quando se attende ao accessimo de difficuldade que resulta quando se passa de considerar as primeiras para tratar de resolver as segundas.

As equações algebraicas classificam-se ainda segundo os grãos, em primeiro, segundo, terceiro, quarto, quinto, grãos etc.

A classificação segundo os grãos, diz Comte, desde muito tempo universalmente admittida, é eminentemente natural; porque esta distincão determina rigorosamente a maior ou menor difficuldade de sua solução.

Esta gradação póde apresentar-se sensível independentemente do facto da resolução; basta para isto considerar-se que a equação a mais geral de cada gráo comprehende necessariamente todas as outras de grãos inferiores, de modo que o mesmo deve dar-se para com a formula que determina a incógnita.

Por conseguinte, por mais fraca que se supponha, *a priori*, a difficuldade propria ao gráo que se considera, ella offerece sempre mais obstaculos a medida que o gráo da equação se eleva, pois que, na execução, ella complica-se com os obstaculos que apresentam os grãos precedentes.

Este accrescimo de difficuldades é tão grande, que a resolução algebraicas das equações, actualmente, só nos é conhecida até os quatro primeiros grãos. A este respeito a algebra poucos progressos tem feito, desde os trabalhos de Descarte e dos analystas ita-

lianos do século XVI, embora nos dois ultimos seculos nenhum dos geometras, talvez, tenha deixado de procurar levar além a resolução das equações.

A equação geral do quinto gráo mesmo, tem até hoje resistido a todas as tentativas. A fórmula do quarto gráo é tão difficil, que torna-se quasi inapplicavel. Tambem os analyistas embora não considerem como impossivel a resolução das equações do quinto gráo e mesmo de gráos superiores, tem, por um accordo tacito, renunciado a semelhantes indagações.

A unica questão d'esta natureza que offereceria uma grande importancia, pelo menos sob o ponto de vista logico, seria a resolução das equações algebricas de um gráo qualquer. Ora, quanto mais se medita sobre este assumpto, mais se é levado á pensar, com Lagrange, que elle está fóra do alcance de nossa intelligencia. Admittindo mesmo que a fórmula pedida seja obtida, ella não poderia ser utilmente empregada a menos que se não chegasse a simplificar-a, sem diminuir sua generalidade, pela introdução de uma nova classe de elementos analyticos de que nós não possuímos nenhuma idéa. E, de mais, se nós tivéssemos obtido a resolução das equações algebricas de um gráo qualquer, nós só teriamos ainda tratado uma parte muito pequena da algebra propriamente dicta, isto é, do calculo das funcções directas, comprehendendo a resolução de todas as equações que podem formar as funcções analyticas hoje conhecidas. Além d'isto, importa lembrar-nos que por uma lei da natureza humana, nós ficamos sempre aquem das difficuldades da sciencia; nossos meios para conhecer novas questões sendo sempre mais poderosos que nossos recursos para as resolver, ou, por outra,

o espirito humano, sendo mais apto o imaginar que a raciocinar.

« Assim, quando mesmo tivessemos resolvido todas as equações algebraicas actualmente conhecidas, e que, para isto, houvessemos achado novos elementos analyticos, estes introduziriam ainda novas classes de equações, que hoje não conhecemos, de sorte que por maior que possa ser o accessimo de nossos conhecimentos. a imperfeição da sciencia algebraica se reproduziria perpetuamente. »

Estudemos agora em particular cada um dos elementos de que se podem compor as equações.

Temos o primeiro conjugado : $y = x + a$, $y = a - x$

No primeiro elemento a variavel x está accrescentada á base a para formar os valores correspondentes da formação y , de modo que os valores d'esta vão sempre crescendo de uma quantidade igual ao valor recebido pela variavel x ; no segundo elemento a variavel acha-se subtrahida á base a , e, por conseguinte, os valores de y vão sempre decrescendo de uma quantidade igual ao valor recebido pela variavel.

Se dermos, por exemplo, á x os valores : 1, 2, 3, 4, 5, 6...

a primeira formação nos dá para y :

$$y = a + 1, y = a + 2, y = a + 3, \text{ etc.} \dots$$

os quaes são iguaes a base a , augmentada do valor dado á variavel.

A segunda formação nos dá :

$$y = a - 1, y = a - 2, y = a - 3, y = a - 4, \text{ etc.}$$

valores iguaes a differença entre a base e o valor dado á variavel.

A differença profunda entre estes dous modos de formação ainda se accentúa mais, quando os valores dados á variavel tornão-se maiores do que a base.

Fazendo x igual a : 2 a, 3 a, 4 a, 5 a, etc.
a primeira formação nos dá :

$$y = a + 2 a, y = a + 3 a, y = a + 4 a \text{ etc.}$$

A segunda nos dá :

$$y = a - 2 a, y = a - 3 a, y = a - 4 a, \text{ etc. ou}$$

$$y = -a, y = -2 a, y = -3 a \text{ etc.}$$

Este resultado nos mostra que, emquanto para os valores da variavel maiores que a base, o primeiro modo de formação não apresenta modificação alguma especial para os valores correspondentes da formação; o segundo modo deixa-nos vêr como resultado a modificação original de serem negativos os valores obtidos para a formação, os quaes desde então crescem com os valores positivos dados á variavel.

Ha, pois, no dominio do puro calculo, um facto resultante do estudo das variações das formações elementares, que exige uma explicação racional, sem mysterios, sem obscuridades e subterfugios metaphysicos. Este facto considerado em si, no dominio abstracto, serve para acentuar ainda mais a differença entre os dois modos elementares de formação ; mas para apreciar-o devidamente, de modo a prevenir toda e qualquer explicação phantasiada, é indispensavel não perder de vista a subordinação necessaria do calculo ao dominio concreto, cuja consideração justifica e interpreta cabalmente a variação de signal apresentado no dominio abstracto.

Para elucidar semelhante questão basta-nos citar textualmente as considerações a um tal respeito escriptas pelo Dr. Benjamim Constant, a quem devemos um trabalho em que acha-se fóra de qualquer dúvida a verdadeira noção sobre as quantidades negativas :

« A distincção, diz elle, das quantidades em positivas e negativas não é só uma circumstancia accidental, que se póde dar na determinação dos valores numericos das expressões algebraicas, por onde se é levado a considerar quantidades isoladas affectas dos signaes $+$ e $-$; esta distincção corresponde maravilhosamente na passagem do concreto para o abstracto, á opposição de sentido de que muitas grandezas são susceptiveis, tendo assim uma significação clara ao espirito, e apresentando-se como um caracter importante da linguagem algebraica, que concorre para tornal-a a mais perfeita linguagem do raciocinio

A sciencia mathematica apresentaria com effeito uma grave lacuna, limitando-se a considerar as grandezas unicamente quanto aos seus valores, sem attender ao seu modo de existencia.

Assim por ex :

Se sobre uma linha recta um ponto estiver 30 metros á direita de outro, e um segundo ponto estiver 30 metros á esquerda; se um acontecimento tiver lugar 10 annos depois da era christã, e outro tiver lugar 10 annos antes; se um individuo possuir 1000 francos, e outro dever a mesma quantia; se um relógio adiantar-se 7 minutos por dia, e outro atrazar-se de 7 minutos; se a velocidade de um movel augmentar de 8 metros por segundo, se a de outro diminuir de 8 metros etc, os numeros 30^m , 10^{an} , $1000 f$, 7^m , 8^m

não bastarão para determinar as grandezas correspondentes.

Cada um d'elles apresenta duas grandezas homogeneas e iguaes, mas cujo modo de existencia tem logar em sentidos directamente oppostos, que não vem designados nos numeros que as representam.

Na passagem do concreto para o abstracto é, pois, indispensavel que se attenda a esse duplo aspecto, que muitas grandezas podem apresentar.

O simples valor numerico não basta á sua determinação, é necessario que se lhe ajunte alguma cousa, que corresponda na linguagem ordinaria ás idéas que exprimimos com as palavras: á direita, á esquerda, antes, depois, acima, abaixo, além, aquem, etc.

A linguagem algebrica seria evidentemente defeituosa se não possuísse symbolos ou caracteres quaesquer equivalentes a essas palavras.

Estes caracteres, attendendo á natureza dessa linguagem, devem ser ao mesmo tempo os mais simples e os mais geraes e, portanto, independentes da natureza concreta das grandezas consideradas.

E' pelos signaes $+$ e $-$ que a Algebra satisfaz completamente a essas condições.

Quando duas grandezas da mesma especie tem situações directamente oppostas, exprime-se esta circumstancia affectando uma dellas do signal $+$ e a outra do signal $-$, e affectam-se ambas do signal $+$, ou ambas do signal $-$, quando tem a mesma situação.

A maneira de exprimir assim pela opposição ou identidade dos signaes $+$ e $-$ a opposição ou identidade no sentido das grandezas, não é como parece,

um simples principio de convenção; ao contrario, esta circumstancia se revela expontaneamente na passagem do concreto para o abstracto.

Sempre que uma grandeza muda de sentido, a expressão de seu valor muda ds signal e reciproca-mente. (1)

Tal é a noção clara que devemos, no dominio mathematico, fazer das quantidade negativas. Assim estabelecido este ponto importante, devem ficar banidas como absurdas e inuteis, todas as pretendidas demonstrações, com que uma obscura metaphysica procurou esclarecer um factu, cuja explicação é tão simples.

Assim apreciadas, as quantidades negativas devem ser sujeitas no dominio algebrico ás mesmas transformações que as quantidades positivas, como indicando sempre uma operação que fica subtendida.

Semelhante consideração permite aproximar o segundo modo de formação do primeiro, suppondo ahí sommadas á base quantidades negativas, o que não destróe a distincção fundamental que existe entre elles, pois, no primeiro caso o valor da formação cresce sempre com os valores da variavel independente, emquanto que no segundo diminue; e ainda mais, no segundo caso, existe o factu especial de annullar-se a formação quando a variavel passa por um valor igual ao da base.

Esta correspondencia entre a mudança de sentido no dominio concreto e a variação de signal no dominio abstracto tão simples de mostrar nos factos mais

(1) Benjamim Constant.—Theoria das quantidades negativas.

simples, apresenta serias difficuldades nos casos mais complicados, onde só uma legitima inducção pôde garantir a sua realisação.

Consideremos o segundo conjugado de formações simples.

$$y = ax, y = \frac{a}{x}.$$

Ainda aqui a differença entre os dois modos manifesta-se pelo crescimento da formação com os valores da variavel, no primeiro caso, e decrescimento da formação com os valores da variavel no segundo caso.

Para o caso particular de ser a variavel nulla, a primeira formação torna-se nulla, emquanto a segunda torna-se infinita; e no caso de x infinitamente grande o valor da fracção no primeiro caso é infinitamente grande, emquanto que no segundo torna-se infinitamente pequeno.

A existencia das quantidades negativas originadas do segundo elemento do primeiro conjugado, determina neste segundo conjugado uma reacção que permite aproximar o segundo modo de formação do primeiro, uma vez que se generalise aos expoentes a modificação de signal que apresentam os coefficients.

A formação $\frac{a}{x}$ será assim equivalente á ax^{-1} estudo que mais adiante faremos, de modo que fica assim substituida por um producto tendo um dos factores affecto de um expoente negativo.

Por maior que seja a repugnancia inspirada por

habitos arithmeticos, em aceitar esta generalisação, é necessario consideral-a perfeitamente legitima algebricamente, pois que sob uma tal fórma as expressões muitas vezes facilitam e simplificam as transformações, onde a consideração de valor só pôde trazer a desvantagem de despertar escrupulos sobre factos perfeitamente normaes no dominio proprio ao calculo das relações.

A substituição da expressão fraccionaria por um producto em que um dos factores é representado pela expressão que constitue o denominador elevado a um expoente negativo, e a de um radical pela indicação do expoente fraccionario é devida a Wallis.

« Esta consideração de Wallis, diz Condorcet, que a primeira vista não parece ser mais do que uma maneira differente de escrever estas quantidades, tem sido uma das principaes causas dos grandes progressos da analyse moderna, e, pôde-se mesmo dizer, em geral, que as descobertas que pareceram modular a face desta parte das sciencias, quasi que sempre consistiram em imaginar noções novas, segundo as quaes se podem exprimir, de um modo simples e susceptivel de ser submettido ao calculo, uma classe muito extensa de quantidades, que antes só podiam ser expressas por formulas muito complicadas.»

Considerando finalmente o ultimo grupo de formações algebricas $y = x^{\frac{a}{n}}$ $y = \sqrt[n]{x^a}$ nós vemos que ainda permanece a possibilidade de fundir um no outro os dois modos de relações. Para isto basta exprimir a extracção de raiz pela annotação fraccionaria do expoente. Teremos então para este grupo $y = x^{\frac{a}{n}}$, $y = x^{\frac{1}{n}}$.

Neste grupo um e outro modo de formação determina para a funcção um crescimento para valores crescentes da variavel, mas a distincção dos dois modos torna-se logicamente evidente quando se consideram as potencias pares e que se suppõe á variavel um valor negativo. Supponhamos a par e $x = -e$ teremos :

$$y = (e)^a \quad y = \sqrt[a]{-e}$$

A primeira formação terá um valor real representado pela potencia a de e enquanto que a segunda indica uma equação numericamente impossivel, pois não ha possibilidade de obter-se com um numero par de factores affectos do mesmo signal um producto negativo.

Esta impossibilidade numerica da operação indicada pela segunda formação levou a dar-se o nome de expressão imaginaria á toda expressão que a traduzisse, designação esta que, como veremos, não tem, algebricamente considerada, muita razão de ser, pois em um tal dominio tem-se sempre em vista transformar, e as expressões imaginarias sujeitam-se tanto quanto ás expressões reaes ás transformações algebricas.

Substituida a annotação do radical pela annotação equivalente do expoente fraccionario, provém entre outras a vantagem logica de grande valor, de ficar perfeitamente patente o contraste das duas operações de elevação á potencia e extracção de raiz, referindo-se uma á multiplicação das expoentes e a outra á divisão dos mesmos expoentes. Assim para elevar a^m a potencia n , temos que multiplicar m por n ; e para extrahir a raiz n de a^m temos que dividir m por n .

Esta generalisação da noção de expoente inspirada no estudo da natureza das funcções algebraicas simples, foi naturalmente o facto que inspirou o espirito humano a conceber o expoente como podendo ser representado por uma variavel susceptivel de valores quaesquer e crear assim a formação transcendente da exponencial.

Limitando-nos a esta apreciação das formações simples algebraicas, nós deixaremos a apreciação das formações transcendentales para quando o leitor poder estar habilitado a receber as considerações que ella exige, o que opportunamente o faremos.

Não terminaremos esta introdução com uma ligeira noção sobre a homogeneidade em mathematica, noção que só se poderá dar com verdadeiro desenvolvimento depois de estudos que possam mostrar a ligação entre uma equação e o facto geometrico ou mecanico que ella traduz.

Quando se pretende estudar mathematicamente um facto qualquer a primeira cousa a fazer é determinar com precisão a lei que existe entre os elementos que o constituem, isto é, a relação que liga esses elementos de modo que um ou mais sendo conhecido seja possivel determinar, por meio d'essas relações, todos os outros. Conhecida a lei, que nos é dada pela observação e experiencia convenientemente realisadas, o problema fica reduzido a vêr se é possivel reduzir a simples relações entre numeros, essas relações que a lei nos indica existir entre elementos concretos. Esta phase constitue a passagem do concreto para o abstracto.

Assim, por exemplo, a lei, conhecida pela observação e pela experiencia, da queda de um corpo

na superficie da terra nos mostra que há uma relação constante entre o espaço e o tempo decorrido em percorrel-o ; esta relação estabelecida entre os numeros que representam a relação entre o espaço e a unidade de espaço, e o tempo e a unidade de tempo, constitue a equação do movimento do corpo que cahe. Este facto nos deixa claramente vêr que a relação algebraica que resulta da traducção analytica do phenomeno está subordinada a unidade escolhida para avaliar os elementos que constituem os termos da relação, mas tambem nós vemos que esta subordinação em nada pode alterar o modo de relação, e sim a grandesa dos elementos avaliados. Assim, no exemplo citado a unidade de espaço pode ser maior ou menor : o metro, ou a legua etc a unidade de tempo tambem pode ser maior ou menor : o minuto ou o segundo etc o que só pode modificar o valor numerico do espaço e do tempo, continuando o mesmo sempre o modo de relação-

O mesmo se daria se nós considerassemos relações entre elementos da mesma natureza.

Assim, pois, a lei da homogeneidade em mathematica consiste em que a axactidão de toda relação concreta, quer geometrica quer mecanica, sendo necessariamente independente da grandesa da unidade ou unidades introduzidas para avaliação numerica, a equação correspondente deve conservar-se inalteravel quando fizermos experimentar a cada uma das quantidades elementares a variação resultante da mudança de unidade e que consiste em multiplicar-as todas por um mesmo factor arbitrario.

« Quando podemos obter as leis de um phenomeno sem fazer nenhuma hypothese sobre a grandeza dos dados, as equações a que se chega convém a toda

série de phenomenos analogos e especialmente áquelles que sem sahir das condições suppostas, se desenvolverem similarmemente. Estas equações devem, pois, permittir uma variação similar qualquer das causas e dos effeitos entre os quaes ellas estabelecem relações.

E' neste facto que se origina a lei da homogeneidade.

Por exemplo : toda propriedade de uma figura geometrica definida convém evidentemente a todas as figuras semelhantes ; ora, a semelhança em geometria exige a igualdade dos angulos e a proporcionalidade das linhas, e portanto toda equação que traduzir uma propriedade geral de uma figura qualquer deverá, necessariamente, ser tal que as linhas que ella contiver possam variar proporcionalmente, sem que por isso deixe de ser satisfeita.

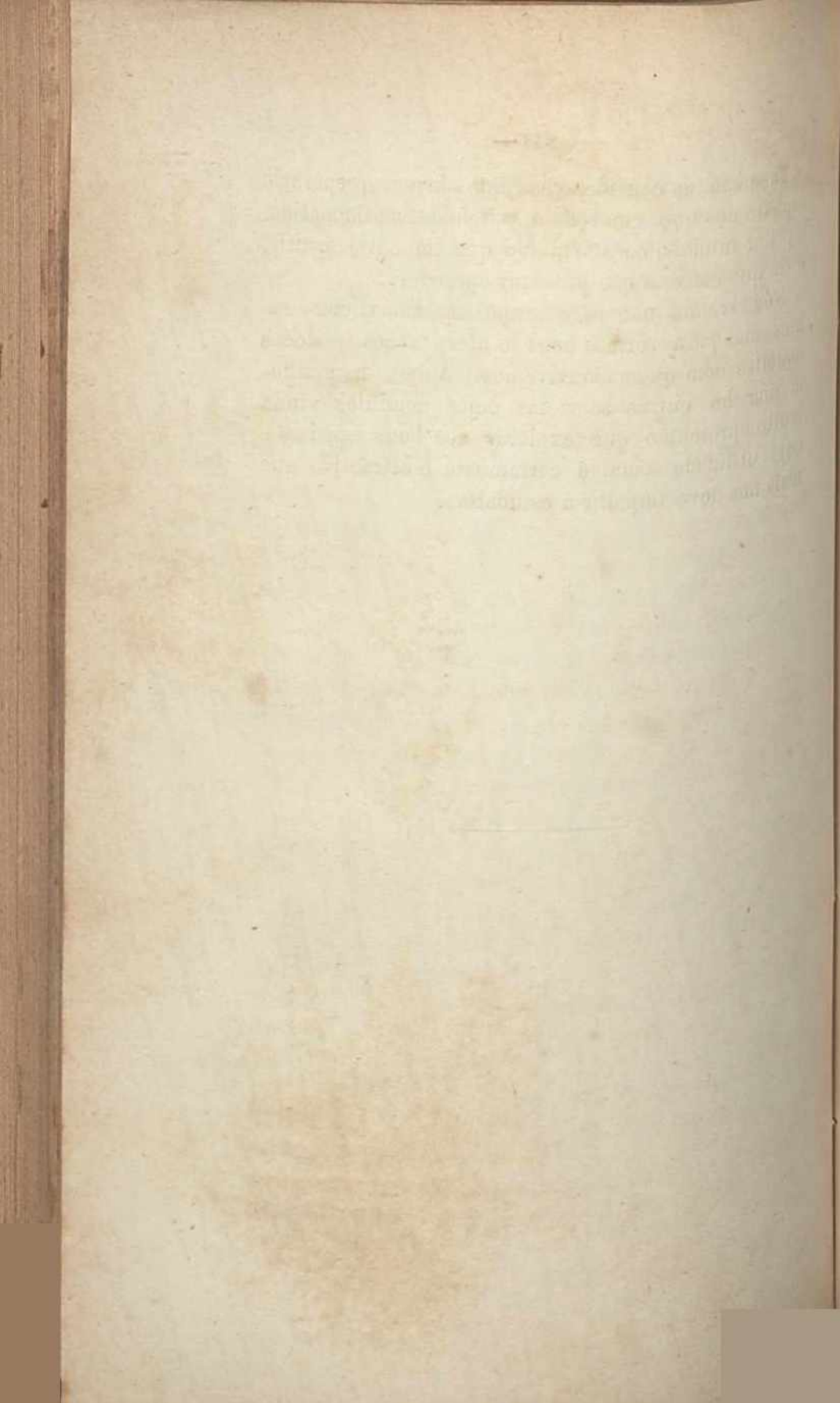
Este modo de conceber a lei da homogeneidade tem a vantagem nem só de indicar a sua verdadeira origem, para as equações compostas dos tres primeiros pares de funcções simples, como tambem deixa conceber que as funcções transcendentales devem estar sujeitas a uma lei, ainda desconhecida, que derivaria do mesmo principio, a possibilidade de mudar similarmemente um phenomeno qualquer sem alterar as leis. » (1)

Nós não nos estenderemos mais sobre este assumpto, aliás de grande importancia, pois que a sua clara comprehensão só póde ser obtida com exemplos de equações de geometria e mecanica, o que é inoportuno para uma simples introdução dos primeiros elementos de algebra.

(1) Mary.—Hist. des mathem. vol. III pag. 13.

Taes são as considerações que devem preparar o espirito dos que começam o estudo da mathematica, a poder inicial-o consciente do que lhe deve ser util, e do que convem não procurar aprender.

Nós vivemos não para sermos mathematicos e sabios mas para sermos bons e uteis a nós e todos aquelles com quem convivemos. Acima da mathematica ha outras sciencias cujos dominios ainda muito apresentação que explorar aos bons espiritos e cuja utilidade social é certamente o attractivo que mais nos deve impellir a estudal-as.



COORDENAÇÃO ESPECIAL

Capitulo I

Calculo determinado do primeiro gráo

Toda questão mathematica completa se compõe de tres partes perfeitamente distinctas: o facto a que se tem em vista applicar o calculo, parte concreta, a equação e sua resolução, parte algebraica, e a avaliação final das formações, parte arithmetica, constituindo estas duas ultimas a parte abstracta. A natureza das relações que guardam entre si os differentes elementos do problema e o numero de incognitas que se procura determinar, tem como consequencia as equações de diversos gráus e a differentes numeros de incognitas. O pequeno numero de formações de que dispomos para traducção analytica dos factos, não só tornam de grande difficuldade, como muitas vezes impossivel, a passagem do concreto para o abstracto; ainda mais, estabelecida a equação ou equações, isto é, traduzidas analyticamente as relações do problema, na maioria dos casos torna-se impossivel a passagem do estado implicito das formações para o estado explicito em que ellas devem ser avaliadas.

Ha factos cuja traducção analytica é possivel por meio dos elementos de que dispomos, e cujas equações comportam uma solução geral pelas transformações algebraicas. N'esta ordem de factos estão as equa-

ções do 1º gráu, entre as quaes devemos distinguir dois casos distinctos: aquelle em que se procura determinar apenas uma incognita, e aquelle em que se procura determinar mais de uma incognita. No primeiro caso basta que a traducção algebraica das relações entre a incognita e as quantidades conhecidas dê lugar á uma só equação que será necessaria e sufficiente para determinar completamente essa incognita; no segundo caso, que é o caso complexo, é necessario no minimo um numero de equações igual ao numero de incognitas, para que cada uma d'estas fique completamente determinada. No caso de muitas incognitas podem dar-se os dois casos: ou as relações que existem entre ellas e as quantidades conhecidas dão lugar a um numero de equações igual ao numero de incognitas, tradusindo cada equação um modo distincto de relação, e o problema será *determinado*; ou o numero de relações distinctas resultantes é inferior ao numero de incognitas, e o problema será *indeterminado*. Consideremos em primeiro lugar o caso mais simples, isto é, o das equações do 1º gráu á uma só incognita. A resolução d'estas equações tem por base dois principios derivados do seguinte axioma geral: *Uma igualdade não se altera desde que a modificação a que fôr sujeita, fôr exactamente commum aos seus dois membros.*

Este principio não é mais que uma applicação ao dominio mathematico da segunda lei geral do terceiro grupo da philosophia primeira (1) Em mechanica esta lei tem uma applicação importante.

(1) Esta lei é a seguinte: Um systema qualquer mantem sua constituição activa ou passiva quando seus elementos soffrem modificações simultaneas u.na vez que estas lhes sejam exactamente communs.

Os typos abstractos dos corpos ahí considerados são sempre sujeitos a essa verdade universal. Ora, é claro que uma equação, que não é mais que a tradução das relações existentes entre os elementos concretos considerados abstractamente, que, portanto, constitue um verdadeiro systema de elementos eminentemente abstractos, guardando entre si determinado modo de dependencia, uma equação deve necessariamente achar-se subordinada a lei da persistencia. O facto é o mesmo quer para o dominio concreto, quer para o dominio abstracto; o que se modifica sempre, quer em um quer em outro, são as grandezas em si e não o seu modo de dependencia, que é sempre o mesmo. Este principio geral comprehende todas as modificações por somma subtracção e multiplicação, e serve de base a todas as transformações por meio das quaes se chega a resolver qualquer equação do 1.º gráo, isto é, a passar do seu estado implicito ao estado explicito equivalente. Delle deduz-se: 1.º sommando ou subtrahindo a ambos os membros de uma igualdade uma mesma quantidade ella não se altera; 2.º Multiplicando ou dividendo ambos os membros de uma igualdade por uma mesma quantidade ella não se altera.

As transformações que se deduzem destes principios têm por objecto isolar completamente em um dos membros da equação a incognita e no outro todas as quantidades conhecidas.

A primeira sorte de transformações consiste na transposição dos termos, isto é, a sua mudança de um membro para outro e a sua redução; a segunda, derivada immediatamente do segundo principio, como a anterior do primeiro, consiste no desaparecimento ou eliminação dos factores e divisores ou

denominadores communs. Um exemplo vai nos deixar bem patente o papel de cada uma destas transformações. Seja a equação.

$$\frac{2x}{3} - 2 = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \quad (1)$$

Esta equação como vemos apresenta todas as sortes de ligações de que tratamos, isto é, a incognita acha-se ligada ás quantidades conhecidas por todas as quatro operações. Se fizermos desaparecer do primeiro membro desta equação o termo 2, é evidente que esse membro ficará augmentado desta quantidade que lhe devia ser diminuida; a igualdade, portanto, ficará alterada se não houver um augmento identico no outro membro, isto é, se não somarmos a esse membro uma quantidade igual. Praticada esta transformação a equação dada é, em virtude do axioma estabelecido substituida, pela sua equivalente.

$$\frac{2x}{3} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} + 2$$

Se fizermos desaparecer do segundo membro desta equação o termo $\frac{x}{4}$ este membro ficará diminuido desta quantidade, pois que ella lhe devia ser adicionada, e a igualdade só não será alterada se fizermos uma diminuição identica no primeiro membro. Temos portanto em virtude da nova transformação.

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{9}{2} + 2 \quad (2)$$

Comparando as equações (2) e (1) logo se vê que a unica differença que as transformações produziram na equação dada foi o termo $\frac{x}{4}$ que estava no se-

gundo membro com o signal mais (+) e acha-se na equação (2) no primeiro membro com o signal menos (-); e o termo 2 que na equação (1) estava no primeiro membro com o signal menos, acha-se na equação (2) no segundo membro com o signal mais.

As transformações, pois, consistiram na mudança ou transposição de termos de um membro para outro trocando-se-lhe o signal, o que permite immediatamente a sua redução, e portanto a supressão, sem alteração da igualdade, dos termos iguaes e de signaes contrarios.

A incognita se acha agora immediatamente ligada as quantidades conhecidas pela divisão. Para desembaraçal-a desta ligação é necessario fazer desaparecer os denominadores 3, 4 e 2.

Para isto redusem-se em primeiro lugar todos os termos da equação a um denominador commum, operação que é feita do mesmo modo que em arithmetica, não alterando-se a igualdade visto ser a modificação commum a todos os seus termos.

Reduzindo, portanto, na equação todos os termos ao mesmo denominador temos :

$$\frac{16x}{24} - \frac{6x}{24} = \frac{108}{24} + \frac{48}{24}$$

Em virtude do segundo principio que estabelecemos podemos multiplicar, sem alterar a igualdade, ambos os membros desta equação por 24 e teremos a equação :

$$16x - 6x = 108 + 48 \quad (3)$$

Equação esta equivalente a equação (1), tendo a incognita com as quantidades conhecidas apenas uma sorte de ligação a multiplicação. As transformações feitas para passar da equação (2) para a

equação (3) constituem o desaparecimento ou eliminação dos denominadores. Para desembaraçarmos a incognita do seu multiplicador temos de proceder a uma operação previa, que consiste em decompor o primeiro membro em dois factores, um dos quaes é a incognita e o outro formado apenas de quantidades conhecidas; consiste nisto a operação que se denomina de *por a incognita em evidencia*: operação esta que se tem de praticar sempre que a incognita entra em mais de um termo, como no caso que consideramos, e que não tem lugar quando a incognita entra apenas em um termo, como aconteceria se reduzissemos os dois termos do primeiro membro a um unico termo $10x$.

Pondo a incognita em evidencia no primeiro membro temos:

$$(16-6)x=108+48$$

Em virtude do segundo principio podemos, sem alterar a igualdade, dividir ambos os membros desta equação pelo factor $16-6$, o que feito teremos:

$$x=\frac{108+48}{16-6};$$

equação final que nos dá immediatamente o modo de formação da incognita por meio das quantidades conhecidas.

Realizadas as operações indicadas no segundo membro, temos:

$$x=15,6$$

Se as transformações feitas não modificaram o valor de x , a igualdade entre os dois membros deve persistir e a equação deve se tornar em uma identidade, ou uma igualdade evidente, quando substituirmos na equação (1) x pelo seu valor achado.

Substituindo temos :

$$8,4=8,4.$$

A resolução de uma equação do primeiro gráo a uma incognita apresenta, pois, em geral, tres phases principaes, caracterisada cada uma por uma transformação especial, que substitue a equação dada por uma outra equivalente.

A primeira phase, que consiste em uma transposição de termos e redução dos termos semelhantes, — substitue a equação dada por uma outra equivalente, tendo em um dos membros todos os termos affectos da incognita e no outro todos os termos conhecidos; a segunda, que consiste em o desaparecimento ou eliminação dos denominadores e dos factores communs, — substitue a segunda equação por uma terceira equivalente tendo todo os seus termos inteiros; a terceira, finalmente, em que se isola completamente a incognita em um dos membros e os termos conhecidos no outro, substitue a terceira equação por uma quarta equivalente, que dá explicitamente o valor da incognita ou o modo de formação desta por meio das quantidades conhecidas.

A ordem das duas primeiras phases póde variar segundo a fórma sob a qual nos é dada a equação.

Assim a segunda transformação convém ser effectuada antes da primeira no seguinte exemplo :

$$\frac{3x-4}{10} = \frac{x+3}{25}$$

Temos em primeiro logar de fazer desaparecer os denominadores, o que feito teremos :

$$25(3x-4) = 10(x+3), \text{ ou } 75x - 100 = 10x + 30 \quad (2)$$

Effectuada a primeira transformação teremos :

$$75x - 10x = 100 + 30$$

A terceira transformação, que é sempre a ultima, nos dará :

$$x = \frac{100 + 30}{75 - 10} = \frac{130}{65}$$

A resolução das equações do primeiro gráo a uma incognita apresenta, em geral, as tres phases que acabamos de apreciar ; mas casos ha particulares em que a simplicidade da equação dispensa uma ou duas dessas transformações para a sua completa resolução.

Assim na equação :

$$2x - 34 = 128$$

bastam duas transformações para termos a equação final ; na equação :

$$x + 22 = 48$$

basta a primeira transformação e finalmente a equação $3x = 8$ só exige a ultima transformação.

Por meio da segunda transformação nós podemos sempre reduzir uma equação do primeiro gráo a uma incognita a ter todos os termos inteiros. Isto feito, reduzidos todos os termos positivos em que entra a incognita a um unico, que representaremos por Ax , todos os termos negativos em que tambem entra a incognita a um outro que designaremos por A_1x , e representadas respectivamente por B e B_1 , a somma dos termos conhecidos positivos, e dos termos conhecidos negativos, nós podemos escrever como formula a mais geral das equações do primeiro gráo a uma incognita, a seguinte :

$$Ax - A_1x = B - B_1 \quad (a)$$

Resolvendo esta equação teremos :

$$Ax - A_1x = B - B_1$$

Resolvendo esta equação teremos :

$$x = \frac{B - B_1}{A - A_1}; \quad (b)$$

formula que embora muito simples o seu emprego é de nenhum uso no calculo, pela extrema simplicidade que apresenta a resolução das equações correspondentes.

Aos diferentes modos de relação que se pode suppor existir entre os elementos B, B_1, A, A_1 , da formula (b) correspondem expressões particulares para x , cuja apreciação constitue a discussão da formula. Nesta apreciação convem sempre distinguir dois casos : 1º, consideração dos valores tendo em vista sómente a equação, isto é, o facto puramente abstracto ; 2º, consideração dos valores attendendo tambem ao facto concreto donde se originou a equação considerada. D'ahi a distincção para os valores finaes, entre as soluções da equação e as do problema. As primeiras só tendo de satisfazer a equação devem no calculo ser aceitas por mais originaes que nos pareçam numericamente ; as segundas se acham necessariamente subordinadas á natureza do facto concreto, unica consideração que racionalmente pode excluir certos valores no dominio algebrico, e não o facto injustificavel por muitos aceitos de apresentarem esses valores uma formula numericamente absurda.

As soluções do problema são sempre soluções da equação, emquanto que nem sempre as soluções da

equação são soluções do problema. Assim é que a solução negativa da equação só pode ser solução do problema no caso em que a grandeza considerada é susceptível de uma contagem em sentidos oppostos; a solução fraccionaria se a grandeza comportar uma representação fraccionaria; no caso contrario taes resultados indicam uma verdadeira impossibilidade para o problema nas condições traduzidas pela equação. Na formula (b) as hypotheses distinctas que se podem suppor entre os seus elementos são as seguintes :

$$\begin{array}{ll} B_1 > B & \text{sendo } A > A_1 \\ B_1 > B & \text{» } A < A_1 \\ B_1 > B & \text{» } A = A_1 \\ B_1 = B & \text{» } A > A_1 \\ B_1 = B & \text{» } A = A_1 \end{array}$$

Na primeira hypothese o valor de x será real e positivo; na segunda real e negativo; na terceira será igual a $\frac{a}{o}$, sendo a uma quantidade real; na quarta será nullo, e finalmente na quinta apresentará a forma singular $\frac{o}{o}$. Vejamos qual o modo por que devemos, no dominio puramente abstracto da algebra, considerar a expressão $\frac{a}{o}$.

Para ter uma noção racional sobre o modo de interpretar este valor singular, é necessario recorrermos a lei de dependencia que liga o divisor ao quociente. Esta lei, sabemos pela arithmetica, é a seguinte: O dividendo sendo constante, o quociente varia na rasão inversa do divisor, isto é, será tanto maior quanto menor for o divisor, e tanto menor quanto maior for o divisor. Por esta lei nos vemos

que dado o caso de ser o dividendo constante, se o divisor decesser indefinidamente o quociente crescerá também indefinidamente, de modo que a proporção que o divisor se for aproximando de zero o quociente irá tendo um valor cada vez maior, o que leva o espirito a conceber que uma vez que o divisor atinja o limite zero, o quociente será infinitamente grande. Este facto algebricamente se traduz por $\frac{a}{0} = \infty$

O symbolo $\frac{a}{0}$ é, pois, uma concepção logica que pode constituir uma solução tão real, tão legitima como são as que representão as grandesas normaes positivas e negativas. Assim, por exemplo, se procurando determinar em um plano a distancia do ponto de encontro de duas rectas n'elle traçadas a uma origem determinada, acharmos para expressão do valor final um resultado que se traduisse pelo symbolo considerado, isto indicará que as duas rectas não se encontrão, isto é, que são parallelas; solução tão normal e tão precisa como a que se obteria se houvesse um ponto de intercepção.

O valor $x = \frac{0}{0}$ nós dá $0 \times x = 0$, equação que se verefica seja qual for o valor dado a variavel. Neste caso, pois, o problema que apresentar uma tal expressão como formula do valor do elemento que se procura, terá muitas soluções e, como o anterior, este valor singular pode constituir uma solução real da questão que se estuda, como aconteceria, no caso de coincidencia de duas rectas, se procurasse determinar o seu ponto de intercepção. Estas ligeiras considerações, unicas por emquanto oppertunas, serão mais tarde completadas de modo a mostrar-se que

estes valores singulares das formações obtidas para uma hypothese numerica particular do valor do variavel, pode muitas vezes mascarar o verdadeiro valor da formação, cuja expressão modificou-se por não se haver supprimido um factor commun que para a hypothese particular considerada se torna nullo ou infinito.

Nós vemos, portanto, o quanto é de rigor logico não particularisar a noção das expressões algebraicas por considerações de valor emanadas dos habitos arithmeticos, e considerar taes expressões por mais anormaes que nos possam numericamente parecer, como comportando uma interpretação tão real, e pres-tando-se ás mesmas transformações a que sujeitamos os resultados mais normaes.

« Todas as distincções, diz Comte, ou restrições numericas que se procurasse algebraicamente introduzir seriam contrarias ao espirito do calculo das relações, quer para com as constantes, quer para com as variaveis.

Ellas tornar-se-hiam, mesmo sobre um outro aspecto, directamente incompativeis com a avaliação final das formulas algebraicas, onde os resultados os mais normaes podem muitas vezes provir dos elementos os mais excepçionaes.

Remontando até a arithmetica, o primeiro passo para a generalisação consiste em combinar os numeros fraccionarios como os inteiros, o que deve immediatamente estender-se aos incommensuraveis.

Nós devemos algebraicamente tratar os valores negativos, nulos ou infinitos e mesmo imaginarios, do mesmo modo que a outros quaesquer, salvo o exame final dos motivos de admissáo, que podem

para com os resultados do calculo igualmente se applicar a todas as hypotheses numericas sobre os elementos. » (a)

Em geral as soluções do problema podem ser em numero inferior ás soluções da equação, que consideração alguma nos leva a restringir. Assim se as quantidades procuradas não são susceptiveis de contagem em sentidos oppostos, ficam excluidas as soluções negativas da equação; si além disto impõe-se a condição de ser inteiro o valor da variavel, ou se as grandezas procuradas não são susceptiveis de valores fraccionarios, então ficam tambem excluidas as soluções fraccionarias da equação, e só serão soluções do problema os valores inteiros e positivos.

Estas observações deixão-nos desde já apreciar a vantagem que nos resulta de não isolar o estudo abstracto das relações do conjuncto concreto, cuja influencia nem só serve para esclarecer os factos singulares, como tambem para restringir o estudo algebrico sómente áquillo que convém as necessidades de nossa existencia moral e pratica.

O apparecimento dos valores singulares para uma hypothese particular feita sobre o valor da variavel restringe immediatamente o principio da inalterabilidade de uma equação pela multiplicação ou divisão dos seus termos por um mesmo factor, ao caso numerico, excluindo o caso em que a variavel faz parte desse factor, como podendo modificar o modo de relação, desde que a variavel recebe um valor particular, que póde mesmo ser igual a zero.

A intervenção da variavel na expressão que cons-

(a) Comte. Synthèse Subjetive pag. 217.

titue o factor por que se multiplica ou divide a equação considerada, manifesta-se algebricamente em geral pelo accessimo ou diminuição do numero de soluções, ou pelo apparecimento das soluções singulares.

Supponhamos que effectuadas todas as transformações nós tenhamos a equação do primeiro gráu.

$$Ax=B, \text{ d'onde } Ax-B=0. (1)$$

Multiplicando a equação (1) por $x-a$ teremos :

$$(Ax-B)(x-a)=0 (2)$$

Todo valor de x que satisfizer a equação (1); isto é, que tornar $Ax-B$ igual a zéro, é claro que satisfará tambem a equação (2), pois que sendo o primeiro membro d'esta equação um producto de dois factores um dos quaes é nullo para o valor considerado de x e o outro não sendo infinito para este valor, o producto é nullo. O mesmo, porém, não acontece se considerarmos as soluções da equação (2) em relação a equação (1), pois que o valor de x que satisfizer a equação (2) pela annullação do factor $x-a$ será uma solução d'esta equação e não será da equação (1).

A equação (2), pois, que resultou da multiplicação da equação primitiva por uma certa função da variavel apresenta uma solução de mais, solução cuja expressão se obtém igualando a zéro a função multiplicadora e resolvendo a equação assim obtida em relação á variavel que d'ella faz parte.

Este facto apresenta como consequencia a possibilidade da suppressão de soluções pela divisão da equação por uma função da variavel. Para sentir isto, basta-nos suppôr a equação (2) como equação primitiva, a qual dividida por $x-a$ nos dará a

equação (1). Identico raciocinio ao anterior nos mostraria que a divisão, supprimindo o factor $x—a$ supprimiu uma solução, e que, portanto, a equação transformada apresenta um valor de menos para a variavel, valor este que não a satisfaz.

Nós vamos agora considerar o caso em que o factor por que se multiplica a equação é uma função tal, que se annulle para uma hypothese particular feita sobre o valor de um ou mais elementos que a constituem. Seja a equação dada: $ax=b$ (1).

Supponhamos M uma expressão litteral que se annulla para determinados valores das lettras que a constituem.

Multiplicando a equação (1) por este factor, temos a equação: $M \times ax = b \times M$,
que nos dará para a hypothese numerica considerada:

$$0 \times ax = b \times 0$$

equação que se póde escrever: $x = \frac{0}{0}$ (2)

A annullação do factor M trouxe, portanto, um acrescimo de soluções, pois que a equação (2) póde ser satisfeita por uma infinidade de valores de x , emquanto que a equação (1) só se verifica para o valor $x = \frac{b}{a}$. Considerando agora o caso da divisão, teriamos desde que o factor M se annullasse:

$$\frac{a}{0} \times x = \frac{b}{0} \text{ ou } \infty \times x = \infty; (3) \text{ d'onde } x = \frac{\infty}{\infty}$$

resultados que nos indicam ainda n'este caso um acrescimo de soluções, pois que (3) é satisfeita para uma infinidade de valores da variavel emquanto a equação (1) só tem uma solução.

Todas as vezes, pois, que houver necessidade de multiplicar ou dividir uma equação por um factor que não seja numericamente determinado, é necessario

no decorrer do calculo, não fazer hypothese alguma particular que possa determinar a annullação d'esse factor.

Assim caracterizada a resolução das equações do primeiro gráo á uma incognita, nós passamos a considerar o caso complexo em que se apresentam muitas incognitas e igual numero de equações.

Segundo a regra de Descartes, a marcha que o nosso espirito deve seguir diante de um caso complexo, é decompol-o em casos simples e uma vez estes estudados directamente, reduzir a solução do caso composto a um maior ou menor numero de casos simples já estudados.

E' esta a marcha que sempre seguio o espirito humano em suas indagações; e o merito e a verdade da lei de Descartes está em que ella foi deduzida de um estudo profundamente philosophico de nossas concepções. Em mecanica, por exemplo, o estudo de um movimento qualquer é baseado no estudo do movimento uniformemente variado e este por sua vez no estudo do movimento uniforme, typ^o fundamental, mais simples, da dynamicca.

Quando no calculo do primeiro gráo se apresenta um certo numero de equações a igual numero de incognitas; e que estas equações são satisfeitas para os mesmos valores das variaveis, o conjuncto de equações denomina-se de *systema de equações*.

O problema geral, do calculo determinado do 1^o. gráo póde ser, pois, formulado do seguinte modo: dado um systema de um numero qualquer de equações do 1^o. gráo a um numero igual de incognitas, determinar as expressões dos valores d'estas em função dos coefficients constantes que constituem as equações dadas, as quaes substituidas em lugar das

variaveis correspondentes nas equações do systema as satisfação.

Estabelecido assim o problema, o elemento mais simples e fundamental em que o podemos logicamente decompor é a equação do primeiro a uma só incognita.

Feito o estudo deste caso simples, passa-se a decompor o caso complexo em outros elementos menos complicados, e nesta segunda decomposição o aspecto mais simples é representado pelo systema de duas equações a duas incognitas, depois tres equações a tres incognitas, etc.

A redução, pois, do caso mais complexo, representado pelo problema geral, ao caso mais simples constituído pela equação a uma só incognita, é feita gradualmente, reduzindo primeiro o caso binario, isto é, de duas equações a duas incognitas ao caso fundamental, depois o caso ternario ao caso binario e deste ao caso fundamental, depois o caso quaternario ao ternario, este ao binario e este ao caso fundamental, finalmente a redução do caso o mais geral ao caso fundamental é feita por meio da redução successiva a todos os casos intermediarios.

Esta redução gradual de um systema qualquer ao caso fundamental constitue o fim capital da eliminação. Eliminar, portanto, como resolver, é transformar. O facto logico que separa e distingue uma da outra estas duas operações é o seguinte: a resolução de um systema só é relativa ao systema final e consiste em substituir este systema por um outro em que os valores das incognitas se achem explicitamente representados, emquanto que a eliminação constitue toda a phase de transformações por que se passa do systema primitivo a este systema

final em que cada incognita se acha isolada, embora implicitamente em uma equação. A resolução de um systema começa quando termina a phase eliminativa. Ella póde ser considerada de um modo logico e geral como comprehendendo duas phases, uma eliminativa em que se reduz o systema considerado a um outro equivalente constituido de um certo numero de casos fundamentaes de uma equação a uma incognita, igual ao numero de equações primitivas; outra resolutiva que substitue este ultimo systema por um outro em que o valor de cada incognita acha-se explicitamente representado.

Estas considerações feitas, vejamos como reduzir o caso mais simples dos casos complexos, isto é, o systema de duas equações a duas incognitas, ao caso fundamental, e estudemos para este caso as fórmulas dos valores finaes das incognitas.

Sejam as equações:

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c' \quad (1)$$

A questão está em passar destas equações a duas outras equivalentes, tendo uma dellas a incognita x sómente e a outra a incognita y .

Ora, o modo mais expontaneo, mais natural, para chegar a este resultado é vêr se é possivel, sem alteração das relações, fazer desapparecer da segunda equação a incognita y , por exemplo, determinar pela equação que resultar o valor de x , e substituil-o na primeira equação, que ficará assim com uma só incognita e permittirá determinar o valor desta.

Este processo levando a considerar na segunda equação x como constante, para tirar o valor de y , tem a vantagem logica de tornar relativa a noção

de variavel em algebra, onde, como vemos, taes elementos podem receber o character de constantes quando exigem as condições das transformações.

Na diversidade do artificio empregado para substituir o systema binario (1) por um outro binario em que cada incognita se ache em sua equação, consiste a differença entre os processos de eliminação.

O que deixámos esboçado denomina-se de *processo por substituição*.

Elle consiste em tirar de uma das equações dadas o valor de uma das incognitas, considerando a outra constante, e substituir este valor na segunda equação.

Resulta uma nova equação com uma só incognita ficando o systema primitivo substituido por um outro composto de uma equação a duas incognitas, que será uma das equações dadas, e uma outra a uma só incognita, que resultou da substituição effectuada.

Obtido este systema, começa uma phase retrograda, que consiste em resolver a equação a uma incognita, e o valor obtido substituir na primeira equação, que ficará assim só contendo a outra incognita e nos permittirá obter o seu valor.

N'esta phase a parte eliminativa acha-se englobada á parte resolutiva, pois que para obter a segunda incognita foi necessario tirar o valor da primeira na ultima equação a uma incognita, e substituil-o na outra equação do systema de modo a eliminar esta incognita.

A separação entre o papel da eliminação e da resolução se nos apresenta patente applicando directamente o processo para obter as duas equações

a uma incognita do segundo systema derivado do primeiro.

Para isto tira-se de uma das equações o valor de y , e substitue-se na outra equação; resulta assim uma equação em x , tira-se depois o valor de x de uma das equações dadas e substitue-se na outra, resulta uma equação em y .

O systema dado fica, pois, substituído por um outro equivalente do mesmo numero de equações e incognitas, mas differindo em que cada incognita acha-se isolada em uma equação. Chegado a este systema está terminada a phase eliminativa, e começa a phase resolutiva, a qual consiste em transformar o systema considerado, resolvendo as equações a uma incognita de que elle compõe-se, em um outro em que estas equações se achem no estado explicito. Este ultimo systema representa o estado explicito do systema primitivo, e, então, nós podemos considerar, sob um ponto de vista geral, de modo a dar uma unidade logica ao calculo do 1º gráo, a resolução de um systema de duas equações a duas incognitas, isto é, a passagem do estado implicito ao estado explicito correspondente, como composta de duas phases: uma algebrica comprehendendo o conjuncto de transformações que empregamos para passar do systema primitivo a um outro equivalente do mesmo numero de equações e incognitas e no qual os valores das incognitas se achão explicitos; outra arithmetica consistindo na avaliação numerica das formulas que representão estes valores. A phase algebrica, como dissemos, pode ser considerada como constituida por duas sortes de transformações: umas tendo em vista passar do systema dado a um outro de igual numero de equações a uma incognita, consti-

tuem a phase eliminativa ; outras que partindo deste ultimó systema obtido levão ao systema final, resolvendo as equações que o compõe—é a phase de resolução propriamente dicta.

Dos dous modos de effectuar a eliminação o primeiro é preferivel. Embora este segundo modo nos deixe melhor perceber a distincção entre eliminar e resolver, a sua pratica exige um maior numero de resoluções parciaes do que o primeiro, o qual alem de ser de mais facil execução apresenta a valiosa vantagem de unificar o conjuncto dos processos de eliminação tornando a phase retrogada, que deixamos apreciada, commun a todos elles e constituida simplesmente pelo processo por substituição, cujo principio fundamental predomina em todos os outros. E' este o modo que preferiremos.

Por estas considerações sobre a marcha do artificio que constitue o processo por substituição, nós vemos que elle basea-se no seguinte principio : Dadas duas equações a duas incognitas, qualquer destas equações pode ser substituida, sem alteração do systema, por uma outra a uma incognita obtida tirando-se de uma d'ellas o valor de uma das variaveis e substituindo este valor na segunda equação. Para mostrar isto supponhamos o systema dado representado de um modo geral por,

$$F(x, y) = 0 \quad F_1(x, y) = 0 \quad (1)$$

Considerando na primeira equação y como constante e resolvendo-a em relação a x nós obteremos um valor da forma $x = f(y)$, que substituido na segunda equação nos dará uma nova equação em y sómente, que nós representamos por $F_2(y) = 0$. O systema (1) ficará assim substituido pelo systema :

$$x = f(y), \quad F_2(y) = 0. \quad (2)$$

A legitimidade do principio está em mostrar que o systema (2) é equivalente ao systema (1), isto é, que as soluções do primeiro devem satisfazer ao segundo e reciprocamente,

Sejam a e b os valores de x e y que satisfazem o systema (1). Vejamos se o segundo systema é satisfeito por estes mesmos valores. Quanto a primeira equação do systema (2) não ha duvida que ella deve necessariamente ser satisfeita por estes valores pois que a primeira equação (1) o é, e estas duas equações só differem em estar uma no estado implicito e a outra no estado explicito em relação a x ; a questão está, pois, reduzida a saber se a segunda das equações (2) é satisfeita para os valores considerados. Esta equação resultou da segunda equação (1) n'ella substituindo-se x por seu valor $f(y)$; ora, se neste valor se substitue y por b nós devemos ter $x=a$, por conseguinte o resultado que se obtiver substituindo em $F_1(x, y)=0$, x por a e y por b deve ser o mesmo que o que deve dar a substituição destes valores em $F_2(y)=0$, e como no primeiro caso o primeiro membro é nullo, pois que a e b são raizes da equação, no segundo tambem deve ser e a equação $F_2(y)=0$ será satisfeita. Para a reciproca o raciocinio é identico.

Justificado assim o processo passemos a sua applicação.

Consideremos as equações :

$$ax+by=c, \quad a'x+b'y=c' \quad (1)$$

Tirando da primeira o valor de x e substituindo na segunda, nós teremos como resultado uma equação em y , e o systema dado, feitas as reduções, convenientes será substituido pelo systema equivalente:

$$ax+by=c, \quad (ab'-ba')y=ac'-ca' \quad (2)$$

Começa então a marcha retrograda: resolve-se a segunda equação (2) e substitue-se o valor de y na primeira, que nos dará o valor de x . O systema final que representa o estado explicito do systema primitivo será pois :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad (3)$$

Estas formulas do valor das variaveis em funcção dos coefficients a, b, a', b', c, c' , das equações dadas é o que algebricamente se donomina de *raizes* da equação. Comparando o systema (1) com o systema (2) nós vemos que ambos têm o mesmo numero de equações e de incognitas, apresentando, porém, estas uma notavel differença quanto a sua disposição nas equações.

Emquanto no systema primitivo as duas incognitas apparecem nas duas equações, no systema derivado só a primeira equação contem as duas incognitas e a segunda uma só.

A denominação de eliminação, pois, considerando o systema em si não é bem cabida, pois que, todos os systemas transformados apresentam o mesmo numero de incognitas; mas semelhante denominação é justificada quando se deixa de considerar o systema para considerar as equações separadamente, pois neste caso ha realmente desaparecimento ou eliminação de uma das incognitas em uma das equações do systema transformado.

O primeiro processo cuja exposição deixamos feita reduz, pois, a resolução do caso complexo de duas equações a duas incognitas á resolução de dois casos simples, fundamentaes, de uma equação á uma incog-

nita. Esta redução constitue o objecto essencial da eliminação, por qualquer dos outros processos.

Antes de encetar este estudo convém caracterisar o segundo modo de que fallamos, por que pôde ser effectuada a eliminação com o processo que consideramos, modo este que uma vez apreciado para este caso, basta em todos os outros ser simplesmente mencionado.

A marcha da eliminação é então caracterisada pelo emprego directo do processo para obter immediatamente como systema transformado o systema final em que cada incognita se acha isolada em uma equação. Para ver isto consideremos as equações (1)

Tirando da primeira o valor de y e substituindo na segunda teremos uma equação em x ; e tirando da primeira o valor de x e substituindo na segunda teremos uma equação em y . O systema proposto ficará assim substituído por um outro equivalente de duas equações a uma incognita, equações em geral no estado implicito. Este systema será o seguinte:

$$(ab' - ba')y = ac' - ca', \quad (ba' - ab')x = bc' - cb' \quad (4)$$

Com este systema termina a phase de eliminação e principia a phase de resolução, que consiste em resolver as equações (4) e substituir este systema pelo seguinte:

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \quad x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}$$

Differentes autores considerão sob a denominação de processo por *comparação*, aquelle que deixamos estudado, quando applicado ao caso em que as duas equações achão-se ou são reduzidas ao estado explicito em relação a uma mesma incognita; *distinção* esta futil e sem rasão de ser.

Passemos a consideração dos outros processos.

O segundo processo, como o primeiro, é caracterizado pelo artifício empregado para fazer desaparecer de uma das equações uma das incognitas, sem alteração do systema. Este artifício consiste em tornar iguaes os coefficients da incognita que se quer eliminar nas duas equações e combinar depois estas por somma ou subtracção conforme o signal dos termos affectos da variavel são differentes ou iguaes, de modo que na transformada que resulta os dois termos iguaes se destruam e só fique a outra incognita. Isto feito o systema primitivo será substituido por um outro equivalente tendo o mesmo numero de equações, uma das quaes será uma das primitivas sendo a outra d'estas substituida pela transformada, que só contem uma incognita. Chegado a este systema começa a phase retrogada perfeitamente identica a já caracterizada no estudo do processo anterior. Para tornar os coefficients da incognita iguaes o modo geral consiste em multiplicar cada equação pelo coefficiente d'essa incognita na outra equação; mas semelhantemente á redução das fracções ao mesmo denominador, esta redução comporta simplificações conforme a relação que existir entre esses coefficients, como acontece no caso de ser um d'elles multiplo do outro, em que é sufficiente multiplicar uma só das equações pelo quociente entre os dois.

Este processo, como vemos, está baseado no seguinte principio: dado um systema de duas equações á duas incognitas, nós podemos sem alterar o systema substituir uma d'ellas pela que resulta de sua combinação por somma ou subtracção.

Para mostrar isto consideremos o systema :

$$F(x, y) = 0 \quad F_1(x, y) = 0 \quad (1)$$

Combinando estas equações por somma ou subtracção, a questão está em mostrar que o systema (1) é equivalente ao systema :

$$F(x, y) = 0 \quad F(x, y) + F_1(x, y) = 0 \quad (2)$$

dispensando levar em conta a multiplicação pelo factor numerico, pois já vimos, que esta transformação não modifica as equações.

É claro que os valores de x e y que satisfizerem o systema (1) serão também soluções do systema (2), pois que n'este uma das equações é a mesma que a primeira das equações (1) e a outra é formada pela somma ou differença das duas equações primitivas, e estas se annullando para esses valores das variaveis os dois termos da equação (2) também se annullaram e por conseguinte a sua somma ou differença será nulla. De um modo identico se mostraria a reciproca, isto é, que toda solução do systema (2) é solução do systema (1). Basta para isto notar que a 2ª equação (2) para que seja satisfeita é necessario que os valores de x e y , annullem os seus dois termos que não são mais que as equações do systema primitivo.

Passemos á applicação do processo. Sejam as equações :

$$ax + by = c \quad a'x + b'y = c'$$

Multiplicando a primeira por a' e a segunda por a e subtrahindo esta d'aquella, membro a membro, é claro que os termos affectos de x se destruirão e a equação que resulta só conterà y . O systema dado fica, pois, substituido pelo seguinte, equivalente :

$$ax + by = c, \quad (ba' - ab')y = ca' - ac'$$

Obtido este systema a marcha retrogada seria a mesma que no processo por substituição. Por esta fórma ficam estes dois processos distinctos pelo artificio especial empregado por cada um para passar do systema dado ao systema transformado, em que uma das equações só contem uma incognita, e tendo de commum a phase em que a eliminação por substituição englobada com a resolução, substituem este ultimo systema por aquelle que representa o estado explicito do systema primitivo. A distincção entre os dois processos é ainda mais caracterisada pelo facto de exigir o primeiro a resolução de uma das equações, o que o segundo dispensa.

Este processo denominado de processo *pela redução por somma ou subtracção* permite como o anterior obter-se directamente o systema em que cada incognita acha-se isolada em uma equação. Para isto depois de haver eliminado y , e obtido a equação em z , por nova applicação do artificio eliminava-se x e oblinha-se a equação em y . Estas equações resolvidas nos dariam o systema explicito equivalente ao primitivo.

Vejamos o processo, justamente denominado de *Bezout*, o seu verdadeiro creador.

Este processo consiste em multiplicar uma das equações dadas por uma indeterminada; combinar a equação assim obtida com a outra por somma ou subtracção, e substituir uma das equações dadas por esta transformada, depois de havel-a reduzido a só ter uma incognita, eliminando a outra pela annullação do seu coefficiente effectuada pela substituição de um valor conveniente da indeterminada. O principio em que se basêa este processo é o mesmo que aquelle que estabelecemos para o processo anterior.

Consideremos, pois, o systema :

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c' \quad (1)$$

Multiplicando a primeira pela indeterminada m , o que não a altera, nós podemos substituir o systema (1) pelo equivalente :

$$max + mby = mc, \quad a'x + b'y = c' \quad (2)$$

Subtrahindo membro a membro a segunda equação da primeira teremos :

$$(ma - a')x + (mb - b')y = mc - c' \quad (3)$$

Sendo m indeterminado pode-se dar-lhe um valor tal que annulle ou o coefficiente de x ou o de y nesta equação, de modo a reduzil-a a uma só incognita. Este valor de m é obtido, se for x que tem de ser eliminado, pela equação $ma - a' = 0$, e pela equação $mb - b' = 0$ se for y , isto é, o valor da indeterminada é sempre dada pela equação que se obtem igualando a zero o coefficiente da incognita que se quer eliminar. Suppondo que se quer eliminar x o valor de m será $m = \frac{a'}{a}$, que substituido na equação (3) nos dará.

$$\left(\frac{a'}{a}b - b'\right)y = \frac{a'}{a}c - c'$$

Esta equação sendo equivalente a primeira das equações (2), nós podemos substituir o systema primitivo (1) pelo systema :

$$a'x + b'y = c' \quad \left(\frac{a'}{a}b - b'\right)y = \frac{a'}{a}c - c' \quad (4)$$

Obtido este systema a phase retrogada seria iden-

tica a dos processos anteriores e consistiria em resolver a segunda equação em relação a y ; substituir este valor na primeira que assim ficaria só com a variavel x e nos daria seu valor.

Assim considerada a eliminação por este processo, nós vemos que elle distingue-se dos anteriores pelo artificio empregado na primeira phase para passar do systema dado ao systema transformado composto de uma das equações primitivas a duas incognitas e de uma equação a uma incognita, e apresenta de common com elles a phase inversa em que a eliminação por substituição substitue este ultimo systema por um outro equivalente que traduz o estado explicito do systema primitivo.

O processo de Bersout naturalmente inspirado pelo artificio por que Viète fazia desaparecer os termos intermediarios de uma equação pela intervenção de uma indeterminada, apresenta certa analogia com o processo de *reducção*, distinguindo-se porém deste por ficar indeterminado o valor do factor multiplicador, que só mais tarde é dado pela condição de annullação do coefficiente de uma das incognitas; enquanto que no processo de *reducção* o valor do multiplicador é de antemão determinado de modo a tornar iguaes os coefficientes da incognita a eliminar.

Neste processo, como nos anteriores, o systema transformado podia ser de duas equações a uma incognita, e para isto bastava, depois de haver eliminado y , substituindo m pelo seu valor tirado da equação obtida igualando a zero o coefficiente desta incognita, eliminar directamente de modo identico x substituindo m pelo seu valor tirado da equação dada pelo coefficiente correspondente igualado a zero.

gom logica de deixar perfeitamente distinctas a phase eliminativa e a phase resolutiva, mas o outro deve ser preferido como permittendo uma melhor coordenação pelo estabelecimento de uma phase commun a todas os processos, onde a eliminação é sempre feita por substituição.

Taes são os tres modos distinctos por que no calculo determinado do primeiro gráo nós reduzimos o aspecto mais simples, de duas equações a duas incognitas, sob que se nos apresenta o problema geral, a depender da solução do casô fundamental—uma equação a uma incognita. A questão como vemos apresenta duas phases: a primeira em que se passa do systema dado para um outro de duas equações, uma tendo duas incognitas e a outra uma só; a segunda em que eliminando por substituição e resolvendo ao mesmo tempo, retrogada-se, substituindo-se o systema transformado pelo systema explicito equivalente.

Esta segunda phase é a mesma para todos os processos os quas se distinguem no artificio empregado na primeira phase para obter-se a segunda equação a uma incognita do systema transformado. No processo por substituição esta equação obtem-se tirando de uma das equações dadas o valor da incognita a eliminar e substituindo-o na outra equação; no processo pela *reducção* combinando as duas equações dadas por somma ou subtracção depois de haver tornado iguaes os coefficients da incognita a eliminar, e finalmente no processo de Besout a equação a uma incognita obtem-se multiplicando uma das equações dadas por uma indeterminada, combinando a equação obtida com a outra primitiva por somma ou subtracção, e dando a indeterminada na equação. Este modo de proceder, como dissemos, tem a vanta-

resultante um valor conveniente que annulle o coefficiente de uma das incognitas.

Assim apreciado o modo por que se reduz a solução do caso complexo o mais simples á solução do caso fundamental, nós vamos estudar agora o typo que o caracteriza, discutindo as formulas obtidas para as duas variaveis.

A discussão de uma formula consiste na apreciação das modificações que ella apresenta desde que se faz variar o modo de relação que existe entre os elementos que a constituem.

Consideremos pois os systemas :

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c' \quad (1)$$

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad (2)$$

Podem-se apresentar tres casos principaes : 1° os numeradores de x e y , e o denominador não são nulos; 2° o denominador só é nullo; 3° o denominador é nullo sendo tambem um dos numeradores.

No primeiro caso o systema (1) tem uma solução unica representada pelas formulas (2). No segundo caso os valores de x e y tomarão a forma :

$$x = \frac{m}{0}, \quad y = \frac{n}{0}$$

Vejamos o que indicam estes valores singulares relativamente as equações do systema primitivo. A hypothese que nós consideramos equivale a igualdade $ab' - ba' = 0$.

Tirando o valor de a' , substituindo-o na equação (1) e reduzindo teremos :

$$ax + by = \frac{bc'}{b'}$$

Equação cujo primeiro membro é o mesmo que o

da primeira equação (1) e o segundo membro diferente, pois sendo o numerador $cb' = bc' + d$, d sendo um numero determinado, conclue-se que

$$c = \frac{bc'}{b'} + \frac{d}{b'}$$

isto é, c é menor ou maior que $\frac{bc'}{b'}$

A hypothese, pois, que consideramos determina nas formulas uma modificação, que indica não poderem as equações neste caso ser satisfeitas simultaneamente por nenhum systema de valores finitos de x e y .

Quando estudamos as equações á uma incognita vimos que este valor singular podia representar uma verdadeira solução real; do mesmo modo aqui acontece. Se se tratar, por exemplo, de indagar a distancia x do ponto de encontro de dois moveis, separados um do outro, á uma certa origem, e a epocha t d'este encontro, e que as fórmulas dos valores obtidos, para a hypothese de igual velocidade dos dois, nos apresentem os valores da forma $x = \frac{m}{0}$ e $y = \frac{n}{0}$, isto nos indicará que os moveis nunca se encontram.

Vejamos o terceiro caso.

As hypotheses são $ab' - ba' = 0$ e um dos numeradores, $cb' - bc'$, por exemplo, tambem nullo. Tirando de $ab' - ba' = 0$ o valor de b' e substituindo em $cb' - bc' = 0$ teremos $ac' - ca' = 0$. N'este caso, pois, os valores de x e y , serão da forma: $x = \frac{a}{0}$, $y = \frac{c}{0}$.

Para interpretar estes valores notemos que a relação $ab' - ba' = 0$ nos permite, como anteriormente substituir o systema dado pelo systema :

$$ax + by = c \quad ax + by = \frac{bc'}{b'}$$

Ora, da segunda relação $cb' - bc' = 0$ tira-se $c = \frac{bc'}{b'}$ e, por conseguinte, nas hypotheses consideradas as duas equações do systema exprimem um mesmo modo de relação, isto é, não obstante a diversidade numerica de seus coefficients, ellas podem ser substituidas por uma unica equivalente a duas incognitas, e o problema apparentemente determinado constitue realmente um dos casos de indeterminação.

Concretamente esta solução singular, considerando o problema acima enunciado, indicaria que os dois moveis se acham juntos e tem a mesma velocidade de modo que o ponto de encontro é representado por todos os pontos da trajectoria sobre que elles se movem.

Nós podemos particularisar ainda o caso que estudamos reunindo ás hypotheses feitas a de serem os coefficients b e b' , por exemplo, iguaes a zero.

O valor de x tomará a forma $\frac{0}{0}$ e o de y será:

$$\frac{ac' - ca'}{0}$$

As equações primitivas para esta supposição nos dão:

$$y = \frac{c}{a}, \quad x = \frac{c'}{a'}$$

Se $\frac{c}{a}$ é diferente de $\frac{c'}{a'}$ este resultado é absurdo e as equações são incompativeis; se são iguaes, $a'c - ac'$ será igual a zero e os valores das variaveis serão

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}$$

notando-se que este valor de x é puramente appa-

rente, pois a consideração da hypothese directamente nas equações nos dá como seu verdadeiro valor

$$x = \frac{c}{a}$$

Para mostrar isto directamente e apresentar o verdadeiro motivo deste facto singular no dominio abstracto, de ser o verdadeiro valor de uma expressão mascarado por um symbolo de indeterminação, nós representamos as relações

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \text{ por } h$$

e a relação $\frac{b'}{b}$, por K , do que resulta: $a' = ha$, $c' = hc$, $b' = Kb$, Estes valores substituidos na expressão do valor de x que estamos discutindo dão:

$$x = \frac{bcK - cbh}{abK - abh} = \frac{cb(K-h)}{ab(K-h)} = \frac{c}{a}$$

O factor commum b tornando-se nullo foi, pois, o que determinou a annullação dos termos da fracção que representa x , o que nos leva a conclusão que muitas vezes o symbolo $\frac{0}{0}$ pode não traduzir uma indeterminação e ser originado pela existencia de um factor commum que não foi suprimido e que se annulla para a hypothese particular que determina esse valor singular. Para y já a indeterminação não é mais apparente o que se verifica substituindo os valores de a' , c' , b' na expressão do valor de y ; teremos:

$$y = \frac{c(h-h)}{b(K-h)} = \frac{0}{0}$$

pois que tem-se $b=0$, e o factor $h-h=0$.

Nós podiamos considerar ainda outras hypotheses, mais semelhante minuciosidade seria sem utilidade,

pois que nos casos particulares o estudo é sempre feito pela resolução directa das equações e nunca pela applicação das formulas. E isto pelo seguinte : a applicação da formula das raizes na resolução das equações tem sempre por fim dispensar a phase algebrica de transformação empregada para passar do estado implicito ao estado explicito correspondente, e fazer intervir immediatamente a phase arithmetica de avaliação dos valores. Incontestavelmete de grande vantagem, o emprego deste recurso está subordinado as duas condições seguintes. 1.º A formula deve ser sufficientemente simples para se poder retel-a de memoria ; 2.º a avaliação da formula deve ser superior em simplicidade á resolução directa das equações correspondentes.

A simplicidade da resolução das equações a uma incognita e de um systema de duas equações a duas incognitas é sufficiente para dispensar este recurso, ainda menos aceito para systemas mais complexos onde a complicação das formulas torna muito mais custosa sua applicação sempre preferida pela eliminação directa.

Temos assim estudado o typo mais simples dos casos complexos da eliminação, representado pelo systema de duas equações a duas incognitas e os modos por que podemos reduzir sua resolução á resolução do caso fundamental—uma equação a uma incognita.

Passemos, pois, ao aspecto mais complexo de tres equações a tres incognitas. A questão para este caso consiste em reduzir a resolução do systema ternario ao caso fundamental por intermedio do caso binario. E' preciso, pois, primeiro passar do systema dado a um outro em que a eliminação tenha de ser feita em um systema de duas equações a duas in-

cognitas, e depois passar deste systema ao systema final. A phase eliminativa, para este caso, fica assim augmentada do conjuncto de transformações empregadas para passar do systema primitivo ao systema binario equivalente. Como a eliminação tem sempre logar directamente entre duas unicas equações, a applicação dos methodos não exige modificação alguma, uma vez que se pode suppor ás variaveis um caracter constante embora temporario.

Consideremos, pois, o systema :

$$(1) \quad ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d', \quad a''x + b''y + c''z = d''$$

Considerando as duas primeiras equações nós pozemos suppr z constante e considerar assim as duas como um systema binario a duas incognitas x e y , do mesmo modo por que no caso binario se suppoz uma das variaveis como constante e se considerou a equação como tendo uma só incognita; feito isto, por um dos processos estudados podemos eliminar entre essas duas equações a incognita z , por exemplo, e a equação que resulta em y e x , poderá substituir uma das equações combinadas; considerando a primeira e a terceira equações (1) podemos por identicos motivos eliminar entre ella a mesma variavel z e a equação resultante em y e x , poderá substituir uma das equações combinadas, de modo que o systema (1) ficará substituido pelo systema equivalente, seguinte :

$$ax + by + cz = d$$

$$(ca' - ac')x + (cb' - bc')y = cd' - dc' \quad (2)$$

$$(ca'' - ac'')x + (cb'' - bc'')y = cd'' - dc''$$

Fica assim a questão mediante este systema intermediario, reduzida a passar pela marcha já estudada

do systema binario em x e y , que compõe o systema (3) ao caso fundamental.

Nós podemos assim substituir as duas equações em x e y do systema (3) por um outro systema de duas equações, tendo uma duas variaveis e sendo uma das equações consideradas, e tendo outra uma só variavel x , por exemplo. O systema (2) fica após estas tranformações substituído pelo systema equivalente;

$$(4) \quad ax + by + cz = d$$

$$(ca' - ac')x + (cb' - bc')y = cd' - dc'$$

$$[(ca'' - ac'')(cb' - bc') - (ca' - ac')(cb'' - bc'')]x =$$

$$(cd'' - dc'')(cb' - bc') - (cd' - dc')(cb'' - bc'')$$

Chegado a este systema começa a phase retrogada, que consiste em resolver a ultima equação (4); substituir o valor de x achado na equação seguinte, que só ficará com y ; resolver esta equação, e substituir na primeira os valores de x e y , dados pelas duas ultimas, e determinar z pela primeira, que ficará com esta unica variavel.

Effectuada esta phase, o systema (4) ficará substituído pelo systema explicito seguinte, equivalente ao primitivo;

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

Taes são as formações dos coefficients que constituem as expressões dos valores das variaveis em

um systema de tres equações a tres incognitas. A inspecção destas formulas nos mostra que todas ellas têm o mesmo denominador, o qual se obtem facilmente tomando as duas letras *a* e *b* e, combinando-as, colloca-se depois em cada producto assim formado, a letra *c* successivamente á direita, no meio e a esquerda, separa-se os grupos obtidos alternativamente pelos signaes (+) e (-) e finalmente colloca-se um acento na segunda letra de cada um delles e dois na terceira. Os numeradores obtêm-se substituindo no denominador commum cada coeeficiente da incognita que se considera pelo segundo membro da equação correspondentemente.

Nós podiamos estabelecer para com estes valores uma apreciação analoga a que fizemos para o caso binario, mas um tal estudo é sem utilidade alguma, sem importancia, e convém antes de tudo coordenar o dominio abstracto só desenvolvendo o que fór de reconhecida utilidade.

Hoje isto é tanto mais necessario, quanto mais extensos vão se tornando os dominios superiores. fim capital que deve sempre visar a nossa educação.

E ainda mais, modernamente estão apparecendo novos methodos, taes como o dos *determinantes*, cuja inutilidade ficará melhor saliente mostrando-se a necessidade absoluta de restringir o conjuncto mathematico, e só destendel-o n'aquillo que exigirem as necessidades.

Desde que os methodos que possuímos são assás simples e racionais, desde que com elles nós resolvemos plenamente as questões de que precisamos, é inutil crear novos para as mesmas questões, e o melhor é empregar a actividade cerebral em cousas mais uteis.

A comparação dos calculos effectuados para o caso de uma equação a uma incognita, de duas equações, a duas incognitas e finalmente no de tres equações a tres incognitas, nos mostra immediatamente a complicação rapidamente crescente dos calculos algebricos, mesmo nos casos em que os elementos combinados são os mais simples, a proporção que esses elementos se multiplicão.

Do mesmo modo a comparação das formulas finaes a que chegamos nos deixa vêr tambem um rapido augmento de complicação nessas formulas pelo simples acrescimo de uma incognita.

Assim a formula por demais simples $x = \frac{b}{a}$ no caso de uma equação a uma incognita torna-se no caso de duas equações a duas incognitas em $x = \frac{c b' - bc'}{a b' - ba'}$ e finalmente no caso de tres equações a tres incognitas apresentão-se as formulas sob a forma á que chegamos cuja complicação as torna de nenhum uso.

O numero de termos do numerador especial de cada uma dessas formulas ou do denominador commum a todas ellas, sendo igual a o numero de permutações do numero de equações ou de incognitas, teremos no numerador e denominador de cada formula, para tres incognitas seis termos, para quatro incognitas vinte e quatro termos, para cinco incognitas cento e vinte termos e assim por diante.

Mesmo no caso de duas equações a duas incognitas, em que as formulas são simples, prefere-se em geral fazer directamente a eliminação.

A eliminação, pois, no caso de um systema de tres equações a tres incognitas apresenta duas phrases uma em que se passa do systema dado a um outro de

igual numero de equações e incognitas, mas tendo a primeira equação tres incognitas, a segunda e a terceira duas, e d'este ultimo systema a um outro equivalente tendo ainda o mesmo numero de equações e incognitas, mas estas dispostas do seguinte modo: tres na primeira equação, duas na segunda e uma na terceira; a outra phase é em sentido inverso á primeira e já foi caracterizada sufficientemente. A primeira phase é realisada por qualquer dos tres processos estudados, e a segunda é pelo processo por substituição unicamente. Tal é a marcha racional por que o nosso espirito reduz a solução do caso complexo de tres equações ao caso fundamental.

Si considerassemos agora o caso de quatro equações a quatro incognitas, a reducção gradual se faria por intermedio do caso ternario e do caso binario já estudados. Supponhamos as equações do 1º gráu:

$$F(x,y,z,u)=0 \quad F_1(x,y,z,u)=0, \quad F_2(x,y,z,u)=0 \\ F_3(x,y,z,u)=0$$

Eliminando por um dos processos x entre a primeira e cada uma das outras, nós temos o systema equivalente ao systema dado:

$$F(x,y,z,u)=0, \quad f(y,z,u)=0, \quad f_1(y,z,u)=0, \quad f_2(y,z,u)=0$$

Com este systema transformado fica a questão reduzida ao caso ternario representado pelas tres ultimas equações. Eliminando y , entre estas equações temos um outro system transformado equivalente ao primitivo:

$$F(x,y,z,u)=0, \quad f(y,z,u)=0, \quad f_1(z,u)=0, \quad f_2(z,u)=0$$

Com este systema fica a questão reduzida ao caso binario, que reduzido ao caso fundamental nos dá o systema:

$$F(x,y,z,u)=0, \quad f(y,z,u)=0, \quad f_1(z,u)=0, \quad f_2(u)=0$$

Começa então a phase retrogada tirando-se da ul-

tima equação o valor de x , substituindo-o na equação anterior, que dará z , cujo valor, com o de u , levado a segunda equação permittirão determinar y , e, finalmente, os valores de y , z e u , substituidos na primeira equação darão o valor de x .

Estes casos nos deixam concluir qual a marcha geral que segue a eliminação para reduzir um systema de um numero qualquer m de equações e incognitas, ao caso fundamental. Para isto considera-se a primeira equação com cada uma das outras e eliminando sempre a mesma incognita, segundo o modo relativo ao caso binario, passa-se do systema dado a um outro equivalente do mesmo numero de equações e incognitas, tendo a primeira equação m incognitas, que será uma das equações primitivas, e as $m-1$ equações restantes $m-1$ incognitas; este systema reduz a questão a um systema de menos uma equação e uma incognita. Elimina-se entre estas $m-1$ equações uma mesma incognita, e o 1º systema intermediario é substituido por um outro equivalente do mesmo numero de equações e incognitas, tendo a 1ª m incognitas a 2ª $m-1$ e as $m-2$ equações restantes terão cada uma $m-2$ incognitas. Com este systema fica a questão reduzida a um systema de menos duas equações e duas incognitas. Assim continuando passariamos a fazer depender a questão do systema de $m-3$, equações, depois do de $m-4$, $m-5$ etc., até que finalmente quando se chegasse ao $m-1$ systema intermediario, este seria constituido do mesmo numero de equações que os anteriores e do mesmo numero de incognitas, tendo a primeira equação m incognitas, a segunda $m-1$, a terceira $m-2$, a quarta $m-3$ a antepenultima 3, a penultima 2 e finalmente a ultima uma só incognita.

Obtido este systema começa a phase inversa, em que a eliminação é feita por substituição, e precedida sempre pela resolução das equações que tem de constituir o systema explicito final.

Nós vemos, pois, pelo que fica exposto que a algebra no calculo determinado do 1º gráo, com os recursos de que dispõe, resolve plenamente o problema geral que o caracteriza.

Se a extensão dos calculos cresce rapidamente e torna-se fastidiosa, quando se passa do caso verdadeiramente usual de duas equações á duas incognitas, aos casos mais complexos; em compensação a resolução destes ultimos, embora sempre possivel, não apresenta utilidade real alem do typo ternario, o qual já poucas vezes temos necessidade de resolver.

A imagem que representa o quadro (M) servirá para melhor gravar no espirito a marcha geral de transformação que resume a phase eliminativa.

O systema considerado é de seis equações a seis incognitas, sendo estas representadas pelas letras x , y , z , u , v , w , e cada linha horisontal representa uma equação do 1º gráo.

O methodo que consideramos é o methodo por substituição.

As flexas collocadas á esquerda da figura indicão a marcha da eliminação, que começa tirando-se o valor de uma das incognitas na primeira equação e substituindo-se successivamente nas outras.

A é o systema dado. A linha pontuada a direita indica o systema que é substituido por um outro equivalente determinado pela eliminação de uma incognita; os pontos indicão o desaparecimento ou eliminação da incognita correspondente.

As figuras E_1 , E_2 , E_3 , E_4 são os systemas equiva-

lentes intermediarios e E_3 , o systema transformado final.

A flexa a direita deste ultimo systema indica a marcha da segunda phase ou da eliminação no systema transformado final, que é feita em sentido contrario a primeira.

A figura B representa o systema explicito de seis equações a uma incognita, equivalente ao systema primitivo, que resultou da eliminação no systema transformado final E_3 .

Como se vê na figura a eliminação da incognita x no systema proposto fornece o primeiro systema transformado equivalente E_1 . Considerando em E_1 o systema de cinco equações a cinco incognitas, marcado por uma linha pontuada a direita, a eliminação da incognita y fornece o systema equivalente E_2 , em que a questão fica redusida ao systema *punctuado* a 4 incognitas. Considerando em E_2 este systema de quatro equações, a quatro incognitas a eliminação da incognita z fornece o systema equivalente que substitue o systema anterior pelo systema E_3 , em que a questão se reduz ao caso mais simples a tres variáveis. Considerando em E_3 este systema de tres equações a tres incognitas, marcado á direita por uma linha pontuada, a eliminação da incognita u fornece um novo systema equivalente E_4 , que reduz a questão ao caso binario, o mais simples.

Considerando em E_4 o systema de duas equações a duas incognitas, marcado á direita por uma linha pontuada, a eliminação da incognita v fornece o systema equivalente E_5 , que finalmente reduz a questão ao caso fundamental em w . A eliminação, portanto, como nos deixa vêr a imagem, reduz pela sua repetição successiva, sempre entre duas equações,

o caso de seis equações a seis incognitas ao de cinco, o de cinco ao de quatro, o de quatro ao de seis, o de seis ao de duas e, portanto, todos ao de uma equação a uma incognita.

O systema final, da primeira phase contem, pois, o mesmo numero de equações que o proposto, a primeira tendo todas as incognitas e sendo commun dos dois systemas e a ultima tendo apenas uma, indo as incognitas desaparecendo successivamente uma a uma desde a primeira equação até a ultima.

O ponto de partida da primeira phase é a hypothese de que na primeira equação, por exemplo, todas as incognitas, excepção da que se quer eliminar, são conhecidas; resolve-se esta equação em relação a essa incognita e a elimina-se nas seguintes pela substituição.

A repetição da mesma operação no systema de cinco equações a cinco incognitas elimina uma outra incognita e assim por diante até o systema de duas equações em que pela eliminação fica uma *dellas* a uma incognita e a outra a duas.

Termina aqui a primeira phase e começa a segunda. O character de constante supposto as variaveis sendo uma hypothese na primeira phase torna-se na segunda uma realidade.

No começo da phase directa a unica variavel considerada na primeira equação do systema dado foi x e todas as outras foram consideradas conhecidas; na segunda equação de primeiro systema transformado, foi considerada como incognita y e todas as outras z, u, v, w , como conhecidas; na terceira equação do segundo systema transformado (E_2) foi z considerada variavel e u, v, w como constantes; e assim por diante até o penultimo systema (E_4) em que o systema estando

reduzido ao caso binario de duas incognitas v e w , uma destas v , foi considerada constante.

A segunda phase, em sentido contrario, vae tornando uma realidade cada uma dessas hypotheses, substituindo nas equações correspondentes os valores das incognitas que vão sendo obtidos a partir da ultima equação até a primeira em que só fica a incognita x sendo todas as outras conhecidas pela resolução equações anteriores.

Imagem mostrando a marcha geral da eliminação no cálculo do 1° grau

		(M)						
		x	y	z	u	v	w	
Systema implicito	}	x	y	z	u	v	w	(A)
		x	y	z	u	v	w	
		x	y	z	u	v	w	
		x	y	z	u	v	w	
		x	y	z	u	v	w	
		x	y	z	u	v	w	
		<hr/>						
	↓	x	y	z	u	v	w	(E ₁)
		.	y	z	u	v	w	
		.	y	z	u	v	w	
		.	y	z	u	v	w	
		.	y	z	u	v	w	
		<hr/>						
	↓	x	y	z	u	v	w	(E ₂)
		.	y	z	u	v	w	
		.	.	z	u	v	w	
		.	.	z	u	v	w	
		.	.	z	u	v	w	
		<hr/>						
	↓	x	y	z	u	v	w	(E ₃)
		.	y	z	u	v	w	
		.	.	z	u	v	w	
		.	.	.	u	v	w	
		.	.	.	u	v	w	
		<hr/>						
	↓	x	y	z	u	v	w	(E ₄)
		.	y	z	u	v	w	
		.	.	z	u	v	w	
		.	.	.	u	v	w	
		v	w	
		<hr/>						
	↓	x	y	z	u	v	w	(E ₅)
		.	y	z	u	v	w	
		.	.	z	u	v	w	
		.	.	.	u	v	w	
		v	w	
		<hr/>						
Systema explicito		x	
			y
				z
					u	.	.	.
						v	.	.
							w	.

Capitulo II

Transformação das formulas—Maximo commum divisor

Vimos no capitulo anterior que dado um systema de equações do primeiro gráo, por meio de um certo numero de transformações chega-se a dar a todas essas equações uma fôrma semelhante, em que um dos membros contém todos os termos affectos da incognita e o outro todos os termos conhecidos, ficando o systema proposto substituido por um outro equivalente desta fôrma. Depois, por novas transformações, este ultimo systema é substituido por um outro equivalente cuja resolução reduz-se a resolução de um certo numero de equações do primeiro gráo a uma incognita; systema este que, finalmente, é substituido por um outro equivalente de igual numero de equações, contendo cada uma em um dos membros apenas uma das incognitas e no outro sómente quantidades conhecidas, ou por outra, chega-se finalmente, a pôr em evidencia o modo de formação das incognitas por meio das quantidades constantes.

Estas expressões finaes em que está evidente o modo de formação das incognitas pelas quantidades conhecidas, e que constituem o segundo membro de cada uma das equações do ultimo systema, denominam-se *formulas* das raizes.

Constitue o objecto desta lição a transformação das formulas que, do mesmo modo que a transformação

das equações, tem por objecto a substituição de uma formula por uma outra equivalente.

Estas formulas consistem sempre na combinação mais ou menos complexa de um maior ou menor numero de formações simples, que constituem os elementos de todas as expressões por mais complicadas que pareçam ser.

Chama-se *termo* toda quantidade que não se acha ligada a outra pelos signaes de somma ou subtracção; ao termo dá-se tambem a denominação de monomio.

Dois ou mais termos ligados entre si pelos signaes de somma ou subtracção tomam a denominação geral de polynomio que no caso especial de conter apenas dois termos chama-se—*binomio*, no de tres—*trinomio*, no de quatro—*quatinomio* etc.

Um monomio ou polynomio tem em geral a denominação de expressão algebrica.

No nosso modo de entender a base logica de todas as transformações das formulas algebricas, consiste em conceber o termo algebrico o mais simples, e por ex., composto de tres partes essencialmente distinctas e inseparaveis: o coeeficiente, a letra e o expoente.

Assim a letra *a* para se tornar em um symbolo ou termo algebrico é necessario ter a forma :

$$1 \times a^1 = a$$

O numero collocado a esquerda ao lado da letra é o coeeficiente, o outro numero collocado a direita um pouco acima da letra é o expoente.

Quando esses dois numeros são iguaes a unidade não se escrevem e então o termo algebrico toma a fórma ordinaria da letra alphabetica.

Quer o coefficiente, quer o expoente podem ser um numero qualquer.

Podemos, portanto, com uma só letra formar uma infinidade de termos algebricos differindo apenas entre si pelo coefficiente e expoente, unicas partes do termo que se alteram em virtude das transformações; a parte litteral passa sempre de um a outro termo intacta, é sempre a mesma.

Estabelecida assim a base logica, vamos vêr como ella nos fornece um meio de dar a uma expressão das mais simples, uma infinidade de fórmulas equivalentes.

Na formação $y = a + x$ ou $y = 1 \times a^1 + 1 \times x^1$, fazendo $x = a$ temos: $y = 1 \times a^1 + 1 \times a^1$ (1); expressão esta que se representa abreviadamente sob a forma:

$$y = 2a^1 = 2a \quad (2)$$

Comparando as formulas (1) e (2) nos será facil deduzir o modo de derivar a formula (2) da formula (1). A comparação nos deixa vêr immediatamente que a primeira se compõe de dois termos e a segunda apenas de um, cuja parte litteral é a mesma que a parte litteral commum aos dois termos da primeira; o expoente do unico termo da segunda é o mesmo que o expoente commum as duas letras ou termos da primeira; e finalmente o coefficiente do unico termo da segunda é igual a somma dos coefficientes dos dois termos da primeira.

Tendo a fórmula $y = a + a$, portanto, para obtermos a sua equivalente $y = 2a$ basta sommar os coefficientes dos termos da fórmula (1) e dar essa somma como coefficiente do termo da nova formula, mantendo a letra, com o mesmo expoente, de um dos termos da formula (1).

Estas simples considerações sobre o modo de derivação da formula (2) da formula (1) são sufficientes para mostrar-nos immediatamente que a formula $y=2a$ tem uma infinidade de formulas equivalentes da forma $y=a+a$, differindo apenas entre si pelos coefficients dos dois termos, que estão sujeitos em cada uma dellas a unica condição de terem uma somma igual a 2, isto é, igual ao coefficiente do termo da formula derivada equivalente.

Assim a formula $y=2a$ é não só equivalente á formula $y=a+a$, como tambem ás formulas

$$y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a, \quad y = \frac{2}{5}a + \frac{8}{5}a, \quad y = \frac{2}{3}a + \frac{4}{3}a, \dots$$

ou de um modo geral: equivalente a uma infinidade de formulas da forma $y=na+ma$ sujeitas a unica condição de satisfazerem a igualdade $m+n=2$.

Um exemplo muito simples vae nos mostrar as vantagens que traz para o calculo a substituição da formula (1) pela formula (2). Supponhamos que resolvendo uma equação se encontre para resultado final

$$y = \frac{a+a}{2}$$

Se substituirmos no numerador da fracção a expressão $a+a$ pela sua equivalente $2a$ teremos:

$$y = \frac{a+a}{2} = \frac{2a}{2}, \quad y = a$$

Assim, a substituição de uma formula pela sua equivalente deu ao valor de y a forma a mais simples possivel.

Para passarmos da formula (1) para a formula (2) não fizemos consideração alguma sobre o numero de termos do formula (1), que, como vamos vér, de modo

algum influe sobre a formula (2), uma vez que os coefficients de todos os termos da formula (1) satisfacãm a condiçãõ de terem uma somma igual a 2.

Consideremos a expressãõ :

$$y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{5}a + \frac{13}{10}a \quad (3)$$

Substituindo os dois primeiros termos pela sua formula equivalente, deduzida como o fizemos anteriormente, isto é,

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}a \text{ por } \frac{7}{10}a$$

teremos :

$$y = \frac{7}{10}a + \frac{13}{10}a \quad (4)$$

Substituindo a formula (4) pela equivalente deduzida do mesmo modo temos $y=2a$.

Procedendo do mesmo modo com a expressãõ

$$y = \frac{1}{6}a + \frac{7}{6}a + \frac{1}{5}a + \frac{7}{15}a$$

acharemos ainda para formula final equivalente :

$$y = 2a$$

A formula $y=2a$ é, portanto, completamente independente do numero de termos da formula $y=a+a$ que pode ser qualquer, contanto que cada um delles tenha a mesma parte litteral que o unico termo de formula (2), respectivamente com o mesmo expoente, e os coefficients de todos os termos em cada uma das formulas equivalentes tenha uma somma igual a 2.

Ainda ha pouco chegamos a conclusãõ que a formula (2) tem uma infinidade de formulas binomias equivalentes, differindo apenas entre si pelos coef-

ficientes de seus termos ; concluiremos agora que essa mesma formula (2) tem uma outra infinidade de formulas equivalentes, differindo entre si nem só pelos coefficients de seus termos, como tambem pelo numero de termos.

Assim as formulas: $y=2a$, $y=a+a$, $y=\frac{7}{10}a+\frac{13}{10}a$,
 $y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{5}a+\frac{13}{10}a$, $y=\frac{1}{6}a+\frac{7}{6}a+\frac{1}{5}a+\frac{7}{15}a$,... são todas equivalentes.

Fazendo na formação $y=a+x$, $x=a+a$ temos $y=a+a+a$

Substituindo os dois primeiros termos pela formula equivalente $a+a=2a$ temos $y=2a+a$. Procedendo com esta formula do mesmo modo teremos: $y=3a$

A unica differença que se deu neste caso foi o acrescimo de uma unidade no coefficiente da formula final resultante, que corresponde ao coefficiente de mais um termo que sommamos a formula (1).

Todas as considerações que fizemos anteriormente têm logar neste caso, mudando apenas a condição relativa a somma dos coefficients dos termos das formulas equivalentes que, neste caso, deve ser igual a 3.

Se fôrmos accrescentando a formula (1) termos iguaes a a , ou fazendo na formação $y=a+x$, x successivamente igual a $3a$, $4a$, $5a$ etc., e procedendo do mesmo modo, iremos obtendo para formulas equivalentes, $y=4a$, $y=5a$, $y=6a$, etc., as quaes poderemos applicar todas as considerações feitas no primeiro caso, mudando apenas para cada um destes casos a condição relativa á somma dos coefficients que deve ser igual respectivamente a 4, 5, 6 etc.

Do mesmo modo que as anteriores as formulas

$$y=a, y=\frac{1}{2}a, y=\frac{2}{5}a, \text{ etc.}$$

tem cada uma, uma infinidade de formulas equivalentes de um numero qualquer de termos, tendo todos os termos em cada uma a parte litteral igual a a , com expoente 1, e differindo os termos apenas pelos coefficients, que para a primeira devem ter em cada formula equivalente uma somma igual a unidade; para a segunda igual a $\frac{1}{2}$, para a terceira igual a $\frac{2}{5}$, e assim por diante.

Assim as formulas :

$$y=\frac{1}{2}a, y=\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}a, y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{9}a+\frac{3}{54}a, \text{ etc.}$$

são equivalentes.

Como vemos todos estes casos não são mais que a operação fundamental $y=a+x$ repetida um maior ou menor numero de vezes.

Estas transformações por demais simples, nos deixam vêr já a vastidão infinita das transformações algebricas, mesmo nos casos da combinação dos elementos os mais simples, e o perigo e facilidade que ha em nos dedicarmos a combinação, as mais das vezes inutil, desses elementos, sem um ponto de vista util e determinado,

São inexgotaveis, como vemos, as combinações que podemos obter com os elementos os mais simples da algebra, que nesse sentido apresenta um campo infinito e que por isto mesmo deve com todo criterio ser restringido.

(Os coefficients assim considerados como parte integrante do simbolo algebrico. do mesmo modo que

a letra, e não indicando, como muitos querem, um numero de parcellas iguaes, tem mesmo como consequencia logica a serie de transformações que vimos de tratar; emquanto que no segundo caso apenas teremos para equivalente a formula $y=2a$, a formula $y=a+a$ ou vice versa, o que não é exacto.

Ainda mais, a formula $y=2a$ pode provir da somma de tres, quatro ou mais parcellas iguaes como nos casos:

$$y = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a, \quad y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a, \dots$$

Só em caso mui especial, aquelle em que os termos da formula $y=a+a$ têm para coefficiente a unidade, é que o coefficiente da formula $y=2a$ poderá indicar o numero de parcellas iguaes; facto este que, de modo algum, poderá constituir uma noção geral, para ser dado como definição de coefficiente.

Demais a derivação da formula (2) da formula (1) já suppõe os termos desta constituídos por coefficiente, letra e expoente.

Da formula (1) só se póde passar para uma formula equivalente da forma (2) quando as letras fôrem as mesmas para todos os termos da formula (1) e o expoente fôr o mesmo, respectivamente, para cada uma das letras em todos os termos.

A transformação por meio da qual se passa da formula (1) para a formula (2) é o que se denomina em algebra *reducção por somma*, transformação esta que apenas modifica os coefficientes não influindo de modo algum sobre as letras e sobre os expoentes.

Os termos que tem as mesmas letras respectivamente com os mesmos expoentes, são denominados *semelhantes*.

A redução por somma que não é mais que a formação pela somma de um novo termo por meio de outros, ou de um novo termo equivalente a somma de outros, só pode realizar-se entre termos semelhantes.

Se os termos considerados são formados por diversas letras e têm diferentes coefficients, mas são semelhantes, a transformação pratica-se do mesmo modo.

Assim $4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5$, $7a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5$, $3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5$, $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5$ tem para expressão da somma :

$$4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5 + 7a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5 + 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5 + \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5 = \frac{29}{2}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^5$$

Quando se trata de dois ou mais polynomios a expressão da somma obtém-se do mesmo modo escrevendo-se successivamente uns em seguida dos outros e separando-os pelo signal +. No caso em que haja termos semelhantes, substituem-se esses termos pela fórmula monomia equivalente, deduzida como vimos de estabelecer.

A expressão da somma dos polynomios :

$$2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 5a^4 \quad 3a^4 + 5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 4bc + 8d.$$

$$2bc + 8a^4 + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}, \text{ será :}$$

$$2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 5a^4 + 3a^4 + 5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 4bc + 8d + 2bc + 8a^4 + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo os termos semelhantes pelo monomio equivalente, temos : $9a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} + 16a^4 + 6bc + 8d$, ex-

pressão esta muito mais simples que a primeira á qual é equivalente.

A adição algebraica, portanto, é a transformação que tem por objecto dadas duas ou mais expressões determinar uma outra equivalente á somma das primeiras, isto é, uma expressão cujo valor numerico seja igual á somma dos valores numericos das primeiras; entendendo-se por valor numerico de uma expressão o resultado que se obtém todas as vezes que as letras são substituidas por valores particulares na expressão considerada.

Consideremos a formação $y = a - x$.

Fazendo $x = \frac{1}{4}a$, por ex. teremos:

$$y = a - \frac{1}{4}a \quad (1) \quad \text{ou} \quad y = \frac{3}{4}a \quad (2)$$

Comparando as formulas (1) e (2) nos será facil deduzir o modo de derivação da formula (2) da formula (1). Acomparação nos mostra que a primeira se compõe de dois termos e a segunda apenas de um; que a parte literal do unico termo da segunda é a mesma que a parte literal commum aos dois termos da primeira; que o expoente do unico termo da segunda é o mesmo que o expoente commum aos dois termos da primeira, e finalmente que o coefficiente do unico termo da segunda é igual a differença dos coefficientes dos dois termos da primeira.

Tendo a formula $y = a - \frac{1}{4}a$, portanto, para obtermos a sua equivalente (2) basta subtrahir os coefficientes dos termos da formula (1) e dar esta differença como coefficiente do termo da nova formula, a letra, sendo a mesma, com o mesmo expoente, de um dos termos da formula (1).

Este modo de derivar a formula (2) da formula (1) nos mostra que a formula $y = \frac{3}{4}a$ tem uma infinidade de formulas equivalentes da forma $y = a - \frac{1}{4}a$, differindo apenas entre si pelos coefficients dos dois termos, que estão sujeitos em cada uma dellas a unica condição de terem uma differença igual a $\frac{3}{4}$, isto é, igual ao coefficiente do unico termo da formula equivalente (2).

Assim a formula $y = \frac{3}{4}a$ é equivalente não só á formula $y = a - \frac{1}{4}a$ como tambem ás formulas

$$y = 2a - \frac{5}{4}a, \quad y = \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}a, \text{ etc.}$$

ou de um modo geral a uma infinidade de formulas da forma $y = ma - na$ sujeitas a condição unica de satisfazerem a igualdade $m - n = \frac{3}{4}$

Para passarmos da formula (1) para a formula (2) não fizemos consideração alguma sobre o numero de termos da formula (1), que, como vamos vêr, de modo algum influe sobre a formula (2) uma vez que os coefficientes de todos os termos, em cada uma formula, satisfaçam a condição de terem uma differença igual a $\frac{3}{4}$

Consideremos a expressão :

$$y = 2a - \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}a \quad (3)$$

Substituindo os dois primeiros termos pela sua for-

mula equivalente deduzida como o fizemos anteriormente, isto é,

$$2a - \frac{3}{4}a \text{ por } \frac{5}{4}a$$

emos :

$$y = \frac{5}{4}a - \frac{1}{2}a ;$$

procedendo do mesmo modo com esta expressão teremos para formula equivalente $y = \frac{3}{4}a$.

Praticando de um modo identico com a formula

$$y = 3a - \frac{5}{4}a - \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}a - \frac{1}{8}a$$

obteremos ainda para formula final equivalente :

$$y = \frac{3}{4}a.$$

A formula $y = \frac{3}{4}a$, portanto, é completamente independente do numero de termos da formula da forma $y = a - \frac{1}{4}a$, que póde ser qualquer, comtanto que cada um delles tenha a mesma parte literal que o unico termo da formula (2), respectivamente com o mesmo expoente, e os coefficients de todos os termos em cada uma das formulas equivalentes tenham uma differença igual a $\frac{3}{4}$.

Concluimos ainda ha pouco que a formula $y = \frac{3}{4}a$ tem uma infinidade de formulas binomias equivalentes differindo apenas entre si pelos coefficients de seus termos ; concluiremos agora que essa mesma formula tem uma outra infinidade de formulas equivalentes

differindo entre si não só pelos coefficients de seus termos como tambem pelo numero desses termos.

Assim as formulas $y = \frac{3}{4}a$, $y = 2a - \frac{5}{4}a$, $y = 2a - \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}a$, $y = 3a - \frac{5}{4}a - \frac{1}{8}a - \frac{1}{8}a$, ... são todas equivalentes.

Fazendo na formação $y = a - x$, $x = \frac{1}{2}$ e procedendo de modo identico ao anterior, obteremos para formula equivalente $y = a - \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}a$.

A unica differença entre este caso e o anterior, consiste na diminuição de $\frac{1}{4}$ no coefficiente da formula final, resultante do acrescimo igual dado ao coefficiente de x .

Todas as considerações, que fizemos anteriormente tem lugar neste caso, mudando apenas a condição relativa a differença dos coefficients dos termos das formulas equivalentes que neste caso deve ser igual a $\frac{1}{2}$.

Assim as formulas: $y = \frac{1}{2}a$, $y = 2a - \frac{1}{5}a - \frac{4}{5}a - \frac{1}{2}a$, $y = 4a - \frac{1}{8}a - \frac{7}{8}a - \frac{4}{5}a - \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}a$, etc são todas equivalentes.

Do mesmo modo as formulas $y = \frac{2}{5}a$, $y = \frac{1}{3}a$, etc que se obtem fazendo successivamente na formação $y = a - x$, x igual $\frac{3}{5}a$, $\frac{2}{3}a$, etc tem cada uma uma

infinitude de formulas equivalentes da forma $y=ma-na$, de um numero qualquer de termos, tendo todos os termos em cada uma a parte literal igual a a com expoente 1, e differindo os termos de cada uma entre si apenas pelos coefficients que nas formulas equivalentes a primeira devem ter uma differença igual a $\frac{2}{5}$, nas da segunda igual a $\frac{1}{3}$ e assim por diante.

No caso em que a formação $y=a-x$ tivesse a forma $y=5a-x$, por ex. fazendo successivamente x igual a $a, 2a, 3a, 4a$ obteriamos successivamente para formulas equivalentes das formulas $y=5a-a, y=5a-2a, y=5a-3a, y=5a-4a$ as formulas $y=4a, y=3a, y=2a, y=a$, as quaes podemos applicar todas as considerações que fizemos no primeiro caso, mudando apenas para cada uma dellas a condição relativa a differença dos coefficients que deve ser nestes casos respectivamente igual a 4, 3, 2 e 1

Assim, por ex, as formulas $y=a, y=2a-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}a, y=3a-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a$, etc, são todas equivalentes.

Se fizermos na formação $y=a-x, x=a$ teremos para formula equivalente deduzida como o fizemos anteriormente: $y=0 \times a$ ou $y=0$

A esta formula do mesmo modo que as anteriores, podemos applicar todas as considerações feitas no primeiro caso modificando apenas a condição relativa a differença dos coefficients dos termos das formulas equivalentes, que n'este caso deve ser igual a 0.

Assim as formulas $y=0 \times a, y=0, y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a$

$$y=2a-\frac{7}{10}a-\frac{13}{10}a,$$

$$y=3a-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}a-a-\frac{2}{3}a,$$

são todas equivalentes.

Todos estes casos como vemos reduzem-se á operação fundamental $y=a-x$ repetida um maior ou menor numero de vezes.

Da formula da fôrma (1) só se pôde passar para a formula equivalente da fôrma (2) como na transformação anterior quando os termos da formula $y=a-x$ forem semelhantes.

A transformação por meio da qual se passa da formula (1) para a formula da fôrma (2) é o que se denomina *reducção por subtracção*, transformação esta que apenas modifica os coefficients não influindo de modo algum sobre os expoentes e as letras.

A reducção por somma e por subtracção constituem de um modo geral, a operação denominada *reducção dos termos semelhantes*.

Esta transformação ainda uma vez vem mostrar-nos o quanto é erroneo dizer-se que na formula $y=2a$, por ex, o coefficiente 2 indica o numero de parcellas, pois, como acabamos de vêr, esse coefficiente pôde tanto ser resultado de duas parcellas iguaes como de muitas parcellas iguaes ou desiguaes, como ainda da differença de dois ou mais termos, isto é, $y=2a$ pôde provir tanto de $y=a+a$ como de $y=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a$,

$$y=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}a+\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}a,$$

$$y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a, \dots, y = 3a - a, y = 5a - a,$$

$$y = 4a - \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}a - \frac{4}{5}a - \frac{1}{5}a, \dots$$

Os resultados a que chegamos na segunda transformação, comparados com os da primeira, nos mostram immediatamente mais uma infinidade de formulas, consequentes da segunda transformação, equivalentes as diversas formulas que consideramos na primeira.

Assim a formula $y=2a$ é equivalente não só a uma infinidade de formulas da forma $y=m+n+\dots$ satisfazendo a condição unica, estabelecida pela igualdade $m+n+\dots=2$, como tambem a uma infinidade de formulas da forma $y=m-n-\dots$ satisfazendo a condição unica: $m-n-\dots=2$; a formula $y=a$ é equivalente nem só á uma infinidade de formulas da forma $y=m+n+\dots$ satisfazendo a condição unica estabelecida pela igualdade $m+n+\dots=1$, como tambem a uma infinidade de formulas da forma $y=m-n-\dots$ satisfazendo a condição unica estabelecida pela igualdade: $m-n-\dots=1$, e assim por diante.

Estes dois modos de redução podem combinados na pratica simplificar as transformações.

Seja por exemplo a expressão:

$$y = 2a - \frac{7}{10}a - \frac{13}{10}a \quad (3) \text{ d'onde } y=0$$

Para passar da formula (3) para sua equivalente $y=0 \times a$ ou $y=0$ substitue-se em primeiro lugar os dois primeiros termos pelo seu equivalente $\frac{13}{10}a$ deduzido pela subtracção, e depois por uma outra

reducção identica na formula resultante obtem-se a formula final $y=0 \times a$

Estas duas reducções por subtracção podem ser substituidas por duas outras: uma por somma e outra por subtracção.

Esta substituição basea-se no principio evidente:

Quando se subtrahе successivamente de uma quantidade diversas outras, obtem-se um resultado identico ao que se obteria si se subtrahisse da primeira a somma de todas as outras, do mesmo modo que quando se junta successivamente a uma quantidade diversas outras, obtem-se um resultado identico ao que se obteria si se juntasse a primeira a somma de todas as outras e vice versa.

Na expressão (3), portanto, podemos subtrahir de 2 a a somma dos termos $\frac{7}{10}a$ e $\frac{13}{10}a$ em vez de fazer a subtracção successiva de cada um destes termos.

Esta combinação das duas operações indica-se por meio de um parenthesis que comprehenda todos os termos que tem de ser sommados para depois serem subtrahidos.

Assim a expressão (3) toma a forma:

$$y=2a - \left(\frac{7}{10}a + \frac{13}{10}a \right)$$

O parenthesis, portanto, indica que devemos antes de realisar a operação indicada pelo signal que o precede, effectuar entre os termos que elle comprehende as operações indicadas pelos signaes que ligam esses termos.

Desta combinação das duas transformações deduz-se uma pratica systematica, que simplifica muito a reducção dos termos semelhantes, que consiste em

reduzir pela somma todos os termos positivos a um só, todos os negativos a um outro e finalmente os dois termos resultantes a um unico pela subtracção.

Da formação $y = a - x$ originão-se as quantidades denominadas negativas, isto é, precedidas do signal menos (—).

Suppondo na formação $y = a - x$ $x = a + b$ teremos: $y = a - (a + b)$ expressão que, como vemos, pode ser escripta sob a forma equivalente: $y = a - a - b$. Substituindo os dois primeiros termos pela expressão equivalente $a - a = 0$, teremos $y = -b$.

Suppondo ainda a formação $y = a - x$, e sendo $x = a - b$ teremos:

$$y = a - (a - b) \text{ ou } y = a - a + b = +b$$

Antas de apreciar as quantidades $-b$ e $+b$ que nos dão as transformações effectuadas, convém notar a modificação singular que apresentam os signaes do subtrahendo $a + b$ e $a - b$ nos casos que considerámos, e cuja explicação racional cumpre estabelecer.

Abstrahindo do character particular dos numeros para só considerar suas relações mutuas, o espirito humano sentiu a absoluta necessidade dos symbolos geraes com que os differentes modos de relação pudessem ser traduzidos, sem despertar a noção do valor dos elementos constitutivos, e desde então as letras passaram a representar as grandesas de um modo geral.

Este maior gráo de abstracção, comprehendendo-se, não podia de modo algum modificar as leis numericas já então conhecidas, mas simplesmente devia traduzil-as de um modo geral, que permittisse em uma mesma formula abranger todos os casos relativos a cada uma d'ellas, quando nestes a diversi-

dade só se manifestasse no valor numerico dos elementos.

Assim é que as leis de formação por *somma*, por subtracção, por multiplicação, etc., são traduzidas no dominio algebrico pelas formações simples de *somma*, *differença*, *producto*, etc., de cujas expressões é possível deduzir todos os casos numericos correspondentes.

Em arithmetica nós sabemos que a lei que liga os elementos de uma *somma* é a seguinte: a *somma* varia na razão directa das parcellas; e a que liga os termos de uma subtracção é a seguinte: o resto varia na razão directa do minuendo, e na inversa do subtrahendo. Estas leis nos são dadas em arithmetica pelo estudo comparativo dos valores numericos dos elementos considerados, ellas apresentam um modo de dependencia geral entre estes elementos.

Desde que a algebra abstrahе da noção de valor para só apreciær o modo de relação é claro, uma vez representados os elementos numericos por *symbolos* geraes, que as expressões da *somma* e do *resto* serão algebricamente constituidas de modo que as leis enunciadas se apresentem claramente indicadas entre os elementos parcellas, para a *somma*, e os elementos subtrahendo e minuendo, para a subtracção.

A lei da *somma* indicando que a *somma* varia na razão directa das parcellas, nos leva a caracterisar a *somma* de muitas parcellas quaesquer representando-a por uma expressão em que cada parcella conserva o seu signal de modo a exprimir a lei que as liga ao elemento resultante de sua concurrencia.

A lei da subtracção nos indica que o *resto* varia

directamente com o minuendo e inversamente com o subtrahendo.

A composição algebraica do resto deve, pois, indicar os dois modos distinctos de dependencia que a lei representa. Para traduzir o primeiro escreve-se a expressão do minuendo mantendo os signaes de todos os seus termos, o que mostra que na expressão do resto estão sommados ou subtrahidos todos os termos sommados ou subtrahidos ao minuendo; a outra parte da expresssão do resto devendo traduzir o segundo modo de dependencia, para obtel-a escreve-se, separada pelo signal correspondente á subtracção, a expressão do subtrahendo em seguida a do minuendo, tornando n'aquelle positivos todos os termos negativos, e negativos todos os termos positivos, de modo a indicar que todos os elementos que diviam augmentar o subtrahendo estão diminuindo o resto, e todos os que deviam diminuir o resto estão augmentando o resto.

Tal é a explicação racional que uma justa ligação entre a algebra e a arithmetica permite dar á modificação dos signaes nas transformações que estudamos.

Podemos agora passar a estabelecer o verdadeiro modo por que devemos considerar abstractamente as quantidades negativas.

E' isto tanto mais necessario quanto é este um dos pontos fundamentaes do dominio algebraico, ainda hoje obscurecido pelas divagações metaphysicas.

Consideremos a formação $y = a - x$. Suppondo $x = a + b$ temos $y = a - (a + b)$.

O termo b estando sommado ao subtrahendo deve ser subtrahido á expressão do resto, o termo a tambem estando sommado ao subtrahendo deve ser subtrahido á expressão do resto, onde o minuendo a virá

com o seu signal em virtude da lei numerica acima enunciada.

Teremos pois: $y = a - a - b = -b$ (1)

O signal menos que precede b indica, portanto, que esta grandeza deve ser subtrahida, do mesmo modo que o signal mais indica que deve ser somada.

Assim, pois, os signaes mais e menos que acompanham as quantidades indicam simplesmente operações a effectuar e de modo algum influem sobre seu valor numerico: $+a$ e $-a$ são duas grandezas de igual valor, indicando a diversidade dos signaes que ellas devem ser submettidas a duas operações contrárias.

As quantidades negativas resultam como mostra a expressão (1) de transformações tão normaes quanto as que originam as grandezas positivas. A questão está em não querer interpretal-as como typos abstractos isolados e sim como resultado de um conjuncto de transformações subtendidas.

Toda quantidade negativa, portanto, $-b$ por exemplo, pôde ser sempre substituida por uma formula equivalente da fórma $y = a - x$, satisfazendo a condição unica estabelecida pela igualdade $x = a + b$, do mesmo modo que toda quantidade positiva $+b$ pôde ser sempre substituida por uma formula equivalente da fórma $y = a - x$ satisfazendo a condição unica estabelecida pela igualdade $x = a - b$, representando b em qualquer dos dois casos uma grandeza qualquer.

Só existem quantidades positivas e negativas quando se deixa de considerar a quantidade algebrica em absoluto para consideral-a em relação as operações somma e subtração. A quantidade $+b$ é

tão impossivel de conceber como a quantidade $-b$, uma vez que não se ligue a cada uma dellas a ideia da operação indicada pelo signal, isto é, todas as vezes que deixar-se de considerar essas expressões como derivando-se ou sendo equivalentes de uma expressão da fórmula $y = a - x$ satisfazendo para cada uma respectivamente as condições $x = a + b$ e $x = a - b$, para consideral-as isoladamente. Este modo de vêr explica muito naturalmente todas as operações feitas sobre as quantidades negativas.

Supponhamos em primeiro logar que se tem de sommar $-b$ e $+d$.

Teremos $d + (-b)$ substituindo $-b$ pela formula equivalente temos :

$$d + (a - x) = d + [a - (a + b)] = d + a - a - b = d - b$$

Sommar, portanto, uma quantidade negativa a a uma positiva equivale a subtrahir-a.

Supponhamos que se tem de subtrahir $-b$ de $+d$.

$$d - (-b) = d - (a - x) = d - [a - (a + b)] = d - a + a + b = d + b$$

Subtrahir uma quantidade negativa de uma positiva equivale, portanto, a sommar-a.

Supponhamos agora o caso em que se tem de sommar $-b$ e $-d$.

$$-b + (-d) = (a - x) + (a_1 - x_1) = a - (a + b) + (a_1 - (a_1 + d)) = (a - a_1) - (a - a_1) - (d + b) = -(d + b)$$

Para ter a somma de duas quantidades negativas, portanto, sommam-se as quantidades e dá-se ao resultado o signal menos.

Supponhamos, finalmente, que se tem de subtrahir $-d$ de $-b$.

$$-b - (-d) = (a - x) - (a_1 - x_1) = a - (a + b) - a_1 - (a_1 + d) = (a - a_1) - (a - a_1) + d - b = d - b$$

Para subtrahir, portanto, uma quantidade negativa de uma outra troca-se o signal da quantidade subtrahendo e effectua-se a subtracção.

Tal é a noção positiva das quantidades negativas as quaes, como observa Comte, devemos sempre considerar, sob o ponto de vista puramente abstracto, como resultado de uma transformação supposta anteriormente effectuada.

Este modo de encarar estas quantidades crêmos que satisfaz aos votos de d'Alembert.

« Seria para desejar que nos tratados elementares se procurasse esclarecer a theoria mathematica dessas quantidades (negativas) ou pelo menos que não se a apresentasse de modo a deixar nos espiritos dos principiantes noções falsas....

« Quando considerámos a exatidão e simplicidade das operações algebraicas sobre as quantidades negativas, somos levados a crêr que a ideia precisa que se deve fazer dessas quantidades é uma ideia simples e não deduzida e de uma metaphysica alambicada.

« Para descobrir a sua verdadeira noção cumpre notar em primeiro logar que as quantidades denominadas negativas, e que são falsamente consideradas menores que zero, são muitas vezes representadas por quantidades reaes como na geometria onde as linhas negativas não differem das positivas senão pela sua posição relativamente a alguma linha ou ponto commum. »

Substituindo as duas operações contrarias do dominio abstracto pela contagem a partir de um ponto ou linha fixa em dois sentidos oppostos, teremos a noção concreta das quantidades negativas estabelecida por Descartes.

Neste caso $+a$ e $-a$, indicam duas quantidades

iguaes que devem ser contadas a partir de uma mesma origem em sentidos oppostos. Assim se $+a$ for contado para direita, $-a$ deve ser contado para a esquerda; se $+a$ for contada para cima, $-a$ deve ser contada para baixo.

Se na formação $y = a - x$ os termos fossem compostos de differentes letras a transformação se realisaria do mesmo modo.

Assim $4a^2b^{\frac{1}{2}}c^2 - 3a^2b^{\frac{1}{2}}c^2 = a^2b^{\frac{1}{2}}c^2$, etc.,

Quando os dois termos não são semelhantes a transformação reduz-se a escrever um em seguida do outro separando-os pelo signal menos. Para subtrahir um binomio ou um polynomio de um monomio ou polynomio qualquer escreve-se a expressão subtrahendo trocando-se os signaes de todos os seus termos em seguida a expressão minuendo separadas pelo signal menos.

A expressão do resto, como a da somma, pode ser simplificada todas as vezes que existir termos semelhantes e neste caso estes termos devem ser substituidos pela formula monomia equivalente, deduzida segundo as regras já estabelecidas.

Assim, por exemplo, o resto da subtracção entre os polynomios

$$7a^2 + 8a^{\frac{1}{3}}b^2 - \frac{1}{5}c^{\frac{1}{4}}a + b^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad 3a^2 + 7a^{\frac{1}{3}}b^2 + \\ + \frac{2}{5}c^{\frac{1}{4}}a - b^{\frac{1}{2}} + c^2$$

$$\text{será : } 7a^2 + 8a^{\frac{1}{3}}b^2 - \frac{1}{5}c^{\frac{1}{4}}a + b^{\frac{1}{2}} - 3a^2 - 7a^{\frac{1}{3}}b^2 - \\ - \frac{2}{5}c^{\frac{1}{4}}a + b^{\frac{1}{2}} - c^2 = 4a^2 + a^{\frac{1}{3}}b^2 - \\ - \frac{3}{5}c^{\frac{1}{4}}a + 2b^{\frac{1}{2}} - c^2$$

No caso em que não se queira effectuar a transformação indica-se simplesmente encerrando a expressão subtrahendo em um parenthesis, conservando os signaes de seus termos, e separando da expressão minuendo pelo signal menos.

A transformação algebraica por subtracção tem, pois, por objecto dadas duas ou mais expressões para subtrahir de uma outra, transformar estas expressões em uma unica que seja equivalente a differença entre os valores das primeiras. A simplicidade extrema das duas transformações que acabamos de estudar nos deixam vêr o quanto a abstracção da noção de valor é necessaria para facilitar a transformação das relações.

A possibilidade numerica de substituir dois ou mais numeros por um unico representando a sua somma ou a sua differença, fica algebraicamente restringida ao caso especial de semelhança dos diferentes termos combinados, do que resulta a vantagem extraordinaria de poder-se manter o modo final de relação por que o elemento procurado se acha constituido pelos dados conhecidos, dispensando assim a renovação do calculo sempre que se tratar de problemas que só diffirão pelos valores numericos dos dados.

Consideremos agora a formação $y = ax$. Fazendo $x = a$ teremos $y = a \times a$ (1), expressão que se representa abreviadamente sob a forma $y = a^2$ (2).

A comparação das formulas (1) e (2) nos vai permittir estabelecer o modo de derivar a segunda da primeira.

Comparando as duas vemos que a primeira se compõe de dois factores tendo a mesma parte litteral a , e que cada um destes factores tem o coefficiente e

o expoente iguaes a unidade, emquanto que a segundo contém apenas um factor tendo a mesma parte litteral commum aos dois factores da primeira, tendo para coeſiciente o producto dos coeſicientes deſes dois factores e para expoente a somma dos seus expoentes.

Para passarmos, portanto, da formula (1) para a sua equivalente (2) basta multiplicarmos os coeſicientes dos factores da primeira e dar esse producto para coeſiciente do unico factor da formula (2) que tem a mesma parte litteral commum aos dois factores da formula (1) e para expoente a somma dos expoentes deſes factores.

Entrando, portanto, com uma nova condição relativa aos expoentes e mudando a condição de igualdade de somma ou differença dos coeſicientes em condição de igualdade do producto deſes coeſicientes, podemos applicar a esta transformação considerações semelhantes as que fizemos para as duas transformações anteriores.

Assim, a formula $y=a^2$ tem uma infinidade de formulas equivalentes da formula $y=a \times a$, differindo apenas entre si pelos expoentes e coeſicientes dos factores, que devem satisfazer, em cada uma deſas formulas, os primeiros, a condição de terem uma somma igual a 2, expoente do unico factor da formula (2), e os segundos a de terem um producto igual a 1, coeſiciente do unico termo da formula (2).

Assim as formulas $y=a^2$, $y=\frac{1}{2}a \times 2a$, $y=3a^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$, ... são equivalentes.

A formula (2) não é modificada de modo algum pelo numero de factores da formula (1), que pode ser qual-

quer, contanto que os coefficients e expoentes dos factores, que devem ter a mesma parte litteral a , satisfaçam em cada uma das formulas as condições estabelecidas.

Assim as formulas $y=a^2$, $y=3a^{\frac{7}{10}} \times \frac{1}{3}a^{\frac{13}{10}}$, $y=a^2$

$\times \frac{1}{4}a^{\frac{1}{5}} \times 4a^{\frac{13}{10}}$ $y=2a^{\frac{1}{6}} \times \frac{1}{4}a^{\frac{7}{6}} \times 2a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{7}{15}}$, ...

são equivalentes.

Ou de um modo geral: a formula $y=a^2$ tem uma infinidade de formulas equivalentes da forma $y=ma^2 \times m_1 a^{n_1} \times m_2 a^{n_2} \times \dots$ satisfazendo todas as condições estabelecidas pelas igualdades $m \times m_1 \times m_2 \times \dots = 1$
 $n + n_1 + n_2 + \dots = 2$

Se juntarmos a formula (1) mais um factor a teremos $y=a \times a \times a$ substituindo $a \times a$ pela formula equivalente a^2 temos $y=a^2 \times a$, que transformada do mesmo modo nos dá $y=a^3$

Se juntarmos successivamente a formula (1) mais dois, tres, são, quatro etc, factores obteremos de um modo identico $y=a^4$, $y=a^5$, $y=a^6$ etc.

A todas estas formulas applicão-se as considerações que fizemos para a formula (2) fazendo apenas a modificação conveniente para cada caso nas igualdades condicionaes, isto é, fazendo no primeiro caso o primeiro membro da igualdade relativa aos coefficients igual a 1 e o da dos expoentes igual a 3; para o segundo igual a 1 e a 4 etc.

Todos os casos que vimos de considerar não são mais que a repetição da operação fundamental $y=a \times x$ Como vemos esta formação é mais complicada que as duas primeiras, porque nas primeiras só ha modificação nos coefficients, o termo formado tem a mesma parte litteral e o mesmo expoente que qual-

quer um dos termos que contribuíram para sua formação, emquanto que nesta ultima modificão-se os coefficients e expoentes.

As duas primeiras exigem a semelhança dos termos nas formulas; na ultima esta condiçãõ não é necessaria em relação aos factores; o termo formado nas primeiras é sempre semelhante a qualquer dos termos que concorreram para sua formação, na ultima o termo formado nunca é semelhante a nenhum dos factores que o formaram.

As formulas $y=a^2$, $y=a^3$, $y=a^4$ etc. tomam a denominação de potencias de a , e as operações

$$y=a \times a, y=a \times a \times a, \text{ etc.}$$

a de elevação a potencia, que constitue um modo de formação especial de que trataremos particularmente.

Assim se diz : *segunda potencia ou quadrado de a, terceira potencia ou cubo de a, quarta potencia de a etc.* Chama-se, pois, potencia a um producto de factores iguaes, e nesse caso o expoente toma a denominação de expoente da potencia.

A elevação á potencia destingue-se, pois, pelo character particular de serem todos os factores iguaes.

As duas igualdades condicionaes que estabelecemos nos mostram que, neste caso especial, para obter-se a formula transformada equivalente basta elevar á potencia considerada a coefficiente de um dos factores e multiplicar o seu expoente pelo expoente da potencia.

Si nas formulas que temos considerado os coefficients e expoentes dos factores não fossem iguaes a unidade a transformação teria lugar do mesmo modo.

Quando na formação $y=a \times x$ os factores não tem a mesma parte literal a transformação realisa-se de

modo identico ao anterior praticando-se em relação a cada letra tudo o que dissemos em relação a a .

Assim o coeſiciente do termo formado é igual ao producto dos coeſcientes de todos os factores que concorrerem para a sua formação e todas as letras entram no termo formado cada uma com um expoente igual a somma dos expoentes que têm nos differentes factores.

O seguinte exemplo tornará isto claro :

$$y = 5a^2b \times 2ac \times 3afc^2 = 30a^4bc^2f$$

Quando o expoente de uma quantidade apresenta-se sob a fórma fraccionaria tendo para numerador a unidade a expressão denomina-se raiz dessa quantidade.

Assim temos :

$$a, \frac{1}{2} a, \frac{1}{3} a, \frac{1}{4} a$$

são raiz segunda ou quadrada de a , raiz terceira ou cubica de a , raiz quarta de a , etc. A operação

$$(a), \frac{1}{2} (a), \frac{1}{3} (a), \frac{1}{4} \text{ etc.}$$

denomina-se extracção de raiz e constitue uma operação distincta, opposta a elevação á potencia. O denominador do expoente neste caso chama-se indice da raiz.

Quando o expoente fraccionario não tem para numerador a unidade, sempre indica duas operações: uma elevação a potencia e uma extracção de raiz. Assim

$a^{\frac{2}{3}}$, póde em virtude do que estabelecemos anteriormente substituir-se pela formula equivalente

$[a^2]^{\frac{1}{3}}$ ou $[a^{\frac{1}{3}}]^2$ isto é, a potencia $\frac{1}{3}$ ou raiz cubica do

quadrado de a ou o quadrado da potencia $\frac{1}{3}$ ou raiz cubica de a .

A cada um dos expoentes inteiros corresponde um outro de forma fraccionaria cujo numerador é a unidade e o denominador o expoente da potencia inteira

Assim a^2, a^3, a^4 , etc. correspondem a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc.

Cada uma das potencias inteiras e a sua correspondente fraccionaria, gosam da propriedade de praticadas successivamente em uma mesma quantidade se destruirém.

Denomina-se gráo de um termo a somma dos expoentes de todas as letras que entram nesse termo.

Os expoentes fraccionarios estão sujeitos ás mesmas leis de transformação que os expoentes inteiros e têm sido até hoje representados por um signal especial, denominado radical $\sqrt{\quad}$, o qual convém dispensar do dominio algebrico. Não ha razão alguma que justifique a separação estabelecida entre os expoentes inteiros e os fraccionarios. Só a concepção de expoente como um numero indicando os factores que entram na composição de um termo algebrico poderia levar ao estabelecimento de tão nociva separação, que traz consigo o grave prejuizo de romper a continuidade indispensavel no dominio scientifico. Quer os expoentes inteiros quer os fraccionarios, positivos ou negativos, estão sujeitos ás mesmas leis de transformação e como vimos, as expressões formadas por expoentes inteiros podem ter para equivalentes, expressões formadas por expoentes fraccionarios e vice-versa.

O uso dos radicaes traz ainda mais a necessidade de novas transformações para lidar com elles no calculo, além de que semelhante notação não tem

relação alguma com a transformação ou operação indicada, inconvenientes que já d'Alembert fazia sentir na encyclopedia.

Supponhamos agora, que se trata de multiplicar $a-b$ por c . Para obtermos a expressão do producto, é necessario multiplicarmos a por c e subtrahir do resultado o producto de c por b , porque $a-b$ sendo menor que a da quantidade b , o seu producto por c deve ser menor que o producto de a por c de uma quantidade $b \times c$. A expressão equivalente de producto vem a ser portanto $ac-bc$.

Seja em segundo lugar multiplicar $a-b$ por $c-d$. Representando o segundo binomio por m teremos reduzido a questão á determinação do producto de m por $a-b$. Como vimos a pouco temos para expressão d'esse producto $ma-mb$.

Substituindo em lugar de m o seu valor teremos $a(c-d)-b(c-d)=ac-ad-(bc+bd)=ac-ad-bc+bd$. Assim, pois, um simples artificio reduziu a segunda questão a repetir um certo numero de vezes a primeira e a uma subtracção.

Supponhamos em terceiro lugar que tenhamos de multiplicar $a-b+c$ por $d-e$. Representando por m o binomio $a-b$ fica esta questão reduzida á anterior, isto é, a determinação do producto de dois binomios $m+c$ por $d-e$. Determinando a expressão d'este producto como anteriormente o fizemos teremos :

$md+cd-me-ec$. Substituindo em lugar de m o seu valor teremos: $(a-b)d+cd-(a-b)e-ec=ad--bd+cd-ac+be-ec$.

Supponhamos, finalmente, que se tem de multiplicar $a+b-c$ por $d-e+k$. Representando $a+b$ por m e $d-e$ por u , temos reduzido a questão á determinação do producto das duas expressões $m-c$

por $n+k$ que nos dá $nm - nc + km - kc$. Substituindo m e n pelos seus valores, teremos $(a+b)(d-e) - (d-e)c + (a+b)k - kc$ effectuando as operações indicadas, temos $ad + bd - ae - be - cd + ce + ak + bk - kc$.

Assim, pois, por meio de contracções reduziríamos a multiplicação de dois polynomios quaesquer a um maior ou menor numero de multiplicações de um monomio por um binomio ou a uma serie de transformações da fórmula $c(a \pm b)$.

Ainda se reduz a este caso a multiplicação das quantidades negativas isoladas. Supponhamos que se tem de multiplicar $-d$ por $-h$. Como vimos podemos substituir $-d$ pela fórmula equivalente $a-c$, sendo $c = a+d$, e $-h$ por $e-f$ sendo $f = e+h$.

Temos portanto, $-d = a - c$ e $-h = e - f$ ou $d = c - a$ (1) $h = f - e$.

A questão está portanto reduzida a determinação do producto $(a-c)(e-f)$ que nos dá como vimos, $ae - ec - af + fc = fc - ec - (af - ae) = c(f - e) - (f - e)a$; substituindo $f - e$ pelo seu valor h (2) teremos

$$(a-c)(e-f) = ch - ah = (c-a)h$$

Substituindo $c - a$ pelo seu valor (1) teremos $(a-c)(e-f) = dh$ e portanto $-d \times -h = dh$.

Supponhâmos que se trata de multiplicar a por $-b$. Substituindo $-b$ por $c-d$ sendo $d = c + b$ temos $-b = c - d$.

Fica assim a questão reduzida a determinação do producto $(c-d)a$, o que nós dá $ac - ad = c - d/a = -ab$. A inspecção destes resultados nos mostra:

Primeiro que para obter a expressão do producto de dois polynomios é necessario formar todos os productos do multiplicando por cada um dos termo do multi-

plicador e sommar ou subtrahir no resultado final cada um destes productos conforme o termo do multiplicador que lhe corresponde é positivo ou negativo.

Segundo, que todos os termos do producto, que resultaram da multiplicação de dois termos affectos do mesmo signal, são positivos, e todos os que resultaram da multiplicação de dois termos de signaes contrarios são negativos, facto este consequente do primeiro, isto é, da somma algebrica de todos os productos parciaes de cada termo positivo do multiplicador pelo multiplicando, e da subtracção algebrica de todos os productos parciaes de cada termo negativo do multiplicador pelo multiplicando.

A origem, pois, da modificação dos signaes na multiplicação é a transformação por subtracção.

Este facto foi por muito tempo um dos pontos obscurecidos pelo intervenção metaphysica no dominio do calculo. No entanto nós vemos que elle nada tem de misterioso que exija subtilesas de argumentação para justificar-o cabalmente. Referida á transformação por subtracção a modificação dos signaes que apresenta a formula do producto, fica a ligação logica entre as transformações algebricas melhor e mais racionalmente estabelecida, mostrando claramente como o modo de relação entre os elementos dos factores determina uma modificação necessaria no modo de relação entre os elementos do producto. E isto tanto mais era de esperar quanto nós sabemos que em arithmetica um producto varia quando variam os seus factores, facto que algebricamente, onde o modo de dependencia é essencial, devia necessariamente se manifestar de uma maneira preciza.

Esta formação dos signaes dos termos do producto

pelos signaes dos termos factores, pode ser representada pela imagem :

$$\begin{array}{r} + \times + = + \\ - \times - = + \\ + \times - = - \\ - \times + = - \end{array}$$

D'aqui resulta a seguinte regra para determinar a expressão do producto de dois polynomios: multiplicão-se todos os termos de polynomio multiplicando por cada um dos termos do polynomio multiplicador e dá-se a cada termo assim formado o signal mais ou menos conforme os termos multiplicados têm os mesmos ou differentes signaes.

Apreciado o caso em que a multiplicação dá-se entre dois polynomios, todos os casos complexos a elle se reduzem por um artificio identico ao que se emprega na arithmetica para reduzir a multiplicação de muitos numeros ao caso fundamental, unico directo, de dois factores.

Assim considerando um numero qualquer m de polynomios a multiplicar, determina-se em primeiro logar a expressão do producto de dois d'entre elles, e esta expressão reunida aos $m-2$ factores restantes, reduzirá a questão á multiplicação de $m-1$ polynomios; determina-se a expressão equivalente ao producto de um dos $m-2$ polynomios pela expressão producto já obtida, e este novo polinomio reunido aos $m-3$ restantes reduzirá a questão a multiplicação de $m-2$ polynomios, e assim por diante até que, finalmente, a questão ficará reduzida á multiplicação de um dos polynomios dados, por um polynomio equivalente ao producto dos $m-1$ outros polynomios primitivos, e este caso por sua vez se reduz a uma serie de casos fundamentaes—multiplicação de um

monomio por outro, unico caso em que a multiplicação é directamente effectuada. A expressão do producto final sendo uma combinação por somma ou subtracção de um maior ou menor numero de termos, é claro que pode ser simplificada sempre que n'ella houver termos semelhantes.

O modo geral por que se effectua a transformação por multiplicação comporta um aperfeiçoamento systematico, que embora muito simples traz incontesteis vantagens para o calculo. Este aperfeiçoamento consiste em *ordenar* os polynomios dados em relação a uma mesma letra, de modo que o expoente desta letra vá decrescendo successivamente do primeiro termo ao ultimo. Disto resulta immediatamente que ha em um producto de dous polynomios, dois termos que não podem ter semelhantes e portanto não podem ser reduzidos: o primeiro como resultando da multiplicação dos termos em que os expoentes da letra ordenadora são maiores; e o ultimo como producto da multiplicação dos dous termos em que os expoentes da letra ordenadora são os menores.

Assim, pois, o menor numero de termos que pode ter o producto de dous polynomios é dois; e o maior numero é dado pelo producto do numero de termos do multiplicando pelo do multiplicador no caso de não haver redução de termos semelhantes.

Estes dois casos são caracterizadas nos dois exemplos:

$$\begin{array}{r}
 1^{\circ}. \quad x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \\
 \quad \quad x + 2 \\
 \hline
 \quad \quad x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x \\
 \quad \quad 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 32 \\
 \hline
 \quad \quad x^5 \qquad \qquad \qquad + 32
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2^{\circ}. \quad bx^2 + cx + d \\
 dx + e \\
 \hline
 dbx^3 + dcx^2 + d^2x \\
 + ebx^2 + ecx + ed \\
 \hline
 dbx^3 + dcx^2 + d^2x + ebx^2 + ecx + ed
 \end{array}$$

A multiplicação algebraica é, pois, a transformação que tem por objecto dadas duas ou mais expressões para multiplicar, determinar uma terceira equivalente ao producto das expressões dadas, ou por outra, dada uma expressão de forma $y=ab$, determinar uma expressão da forma $x=c \pm d$ tal que tenhamos a igualdade $ab=c \pm d$, sendo a, b, c, d , polynomios quaesquer.

Nós terminaremos a apreciação desta transformação considerando alguns casos especiaes de multiplicação em que se torna patente a vantagem do emprego dos symbolos geraes para facilitar a descoberta das leis no dominio abstracto.

Consideremos em primeiro logar a multiplicação de dois binomios iguaes a $(a+b)$.

Teremos :

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A inspecção deste resultado nos mostra que o quadrado de um binomio é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o dobro do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. O conhecimento desta lei fundamental, difficil de obter-se com o emprego dos algarismos, é, como vemos, clara e facilmente dado com o emprego dos symbolos geraes, de modo que uma vez ella conhecida, torna-se dispensavel effectuar a multiplicação directamente, constituindo-se immediatamente a formula final que traz algebricamente a lei.

Seja agora a multiplicação entre os binomios (a—b). Teremos

$$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

o que nos mostra que a lei é a mesma que no primeiro caso apenas differindo no signal do segundo termo, que aqui é negativo.

Seja, finalmente, multiplicar (a—b) por (a+b).

Temos:

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Este resultado nos indica a seguinte lei: o producto da somma de duas quantidades pela sua differença é igual á differença entre os quadrados das mesmas quantidades.

Todas estas leis, que tão facilmente obtemos com a annotação algebrica, trazem, como vantagem uma enorme economia de tempo, simplificando os calculos, dispensando muitas transformações directas e, finalmente, desde já nos vem confirmar no dominio abstracto, o facto importantissimo que diariamente se nos apresenta na sociedade do quanto o conhecimento de uma lei póde poderosamente concorrer para poupar os nossos trabalhos. Quem desconhece a commodidade que nos trouxe o conhecimento da lei de queda dos corpos, das astronomicas, das leis chemicas?

No calculo a questão é tambem evidente. O conhecimento da lei de formação das incognitas pelas coefficients nas equações do 1º gráo, dispensa a phase algebrica da resolução: o conhecimento da lei do quadrado, e da lei do producto da somma e da differença de duas expressões na multiplicação, dispensam de effectuar-se directamente a transformação. Esta observação se avoiumará a proporção que formos considerando outros casos mais complicados da algebra directa.

Consideremos, finalmente, a formação $y = \frac{a}{x}$. Fazendo $y = a$ teremos $y = \frac{a}{1}$ ou $y = a$ isto é, o resultado desta operação deve ser tal que multiplicado por a seja igual a a ou se representarmos por q esse resultado devemos ter $a \times q = a$. Em virtude do que estabelecemos na transformação anterior q deve ser igual a a^0 pois que o seu expoente e o de a devem satisfazer a igualdade $n + n_1 = 1$.

Sendo n o expoente de q e n_1 o de a temos $n + 1 = 1$ ou $n = 0$.

Teremos pois: $y = \frac{a}{1}$ (1) ou $y = a^0$ (2); a^0 equivale, portanto, a unidade.

A comparação das duas formulas (1) e (2) vai nos permittir deduzir o modo de derivação da formula (1), da formula (2). Comparando-as vemos que a parte literal do termo unico da formula (2) é a mesma que a dos dous termos da formula (1); que o coefficiente do termo unico da formula (2) é igual ao quociente dos coefficientes dos dois termos da formula (1) e, finalmente, que o expoente do termo da formula (2) é igual a differença entre o expoente do numerador e o do denominador da formula (1).

Para passar-mos, portanto, da formula $y = \frac{a}{x}$ (1) para a sua equivalente $y = a^0$ (2) basta dividir o coefficiente do numerador da formula (1) pelo do denominador e dar o quociente para coefficiente do termo unico da formula (2); subtrahir do expoente do numerador o do denominador e dar a differença para expoente do termo da formula (2), quanto a parte litteral do termo de formula é a mesma que a dos termos da formula (1)

Este modo de derivação nos deixa ver que as formulas $y = \frac{a}{x}$ e $y = a^0$ têm uma infinidade de formulas

equivalentes differindo todas entre si apenas pelos coeficientes e expoentes de seus termos, devendo os primeiros em cada uma das formulas terem um quociente igual a unidade e os segundos uma diferença igual a zero.

Assim as formulas

$$y = a^0, \quad y = \frac{a}{a}, \quad y = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a}, \quad y = \frac{4a}{\frac{1}{2}a},$$

$$y = \frac{5a}{\frac{3}{4}a}, \text{ etc.}$$

são equivalentes.

Ou de um modo geral as formulas (1) e (2) tem uma infinidade de formulas equivalentes da forma $\frac{ma^n}{m_1 a_1^{n_1}}$ satisfazendo todas as condições estabelecidas

pelas igualdades $\frac{m}{m_1} = 1$ $n - n_1 = 0$.

Fazendo na formação $y = \frac{a}{x}$ $x = a^1$ teremos

$$y = \frac{a}{a^1} = a^{1-1} = a^{-1}$$

Este resultado é confirmado por outro modo de deduzir a formula a^{-1}

$$y = \frac{a}{a^1} = \frac{a}{a \times a} = \frac{a}{a} \times \frac{1}{a}; \text{ substituindo } \frac{a}{a}$$

pela formula equivalente a^0 teremos

$$y = \frac{a^0}{a} = a^{0-1} = a^{-1}$$

Como vimos a^0 equivale a unidade e, portanto, a formula a^{-1} tem para equivalente a formula $\frac{1}{a}$

Suppondo $x=a^3$ teremos: $y=\frac{a}{a^3}=a^{-2}$ ou $\frac{1}{a^2}$; e assim por diante.

Se fizermos $x=a^{\frac{1}{2}}$ teremos $y=\frac{a}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}$; para

$x=a^{\frac{1}{3}}$ teremos: $y=\frac{a}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}}$, etc.

Qualquer destas formulas tem uma infinidade de formulas equivalentes satisfazendo cada um as condiçõs que estabeledemos anteriormente relativamente aos coefficients e expoentes, modificadas convenientemente para cada um dos casos considerados. Assim para a primeira as condições serão :

$\frac{m}{m_1}=1$ $n-n_1=-1$, para o segundo $\frac{m}{m_1}=1$ $n-n_1=-2$, etc. Se o numerador e o denominador da expressão $\frac{a}{x}$ se composesse de differentes letras a transformação se faria do mesmo modo : o termo unico da formula (2) teria para coefficiente o quociente do coefficiente do numerador e do denominador da formula (1), para parte literal todas as letras que entram nos dois termos da formula (1) cada uma com um expoente igual a differença dos expoentes que tiverem no numerador e no denominador, suppondo a letra que só existe em um dos termos existindo no outro com expoente zero.

Da simples inspecção da formula $y=\frac{a}{b}$ deduzimos immediatamente a definição desta operação algebraica que vem a ser a transformação que tem por objecto dada uma formula da forma $\frac{P}{Q}$ determinar uma outra formula $x=P' \pm Q'$ tal que tenhamos $\frac{P}{Q}=P' \pm Q'$

sendo P, Q, P, Q' polynomios quaesquer. Supponhamos agora que se trata de dividir—a por b.

A expressão x a determinar deve ser tal que tenhamos $x \times b = -a$, isto é, que multiplicada por b reproduza não só o termo dividendo como o seu signal.

Ora, sendo a negativo e b positivo, é claro que, em virtude da regra de signaes estabelecida anteriormente, x deve ser negativo. A expressão do quociente $\frac{-a}{b}$ vem a ser portanto—ab—. Si b fosse negativo e a positivo, isto é, se tivéssemos $\frac{-a}{-b}$ ou $x \times -b = a$, x ainda deveria ser negativo porque $- \times - = +$; si b e a fossem negativos, isto é, si tivéssemos $\frac{+a}{-b}$ ou $x \times -b = -a$, x deveria ser positivo porque $- \times + = -$; si, finalmente, a e b fossem positivos, isto é, si tivéssemos $\frac{+a}{+b}$ ou $x \times b = a$, x deveria ser positivo porque $+ \times + = +$. Todas as vezes, portanto, que os termos a dividir tiverem o mesmo igual o termo resultante ou quociente terá o signal mais, e todas as vezes que esses termos tiverem signaes diferentes o termo resultante ou quociente terá o signal menos. Tal é a regra dos signaes da divisão que se traduz pelas imagens seguintes:

$$\frac{+}{+} = +, \frac{-}{-} = -, \frac{+}{-} = -, \frac{-}{+} = -.$$

Temos, portanto, resumindo de um modo geral: as formulas da fórma

$$\frac{\pm m a^n}{\pm m_1 a^{n_1}}$$

têm uma infinidade de formulas equivalentes da fórma

$\pm m_1 a^r$ satisfazendo todas as regras dos signaes estabelecidas eas condições

$$\frac{m}{m_1} = m, n - n_1 = r.$$

Quando em vez de um termo composto de uma só letra no numerador e denominador tivermos termos compostos de diferentes letras com diferentes expoentes, isto é, quando nesses termos se combinarem as formações ax e x^a , como na expressão

$\frac{a^2b^3c^5}{a^3b^2c}$ procede-se em relação a cada uma das letras do mesmo modo que fizemos anteriormente. Assim praticando temos :

$$\frac{a^2b^3c^5}{a^3b^2c} = a^{-1} b^1 c^4$$

Quando uma letra qualquer entrar apenas em um dos termos suppõe-se ella existindo no outro com o expoente zero. A expressão $\frac{a^3b^2c^2}{a^2c^2d^3}$ tem para equivalente

$$\frac{a^3b^2c^2d^0}{a^2b^0c^2d^3}$$

que nos dá ab^2d^{-3} . A inspecção deste resultado nos mostra que os factores que só entram no numerador ou dividendo, apparecem no quociente sem alteração alguma; os que só entram no denominador ou divisor apparecem no quociente com o mesmo expoente tomado com signal contrario, e finalmente os factores iguaes que entram no dividendo e no divisor não apparecem no quociente, isto é, fazem parte delle com o expoente zero. Si o numerador e o denominador têm coefficients numericos diferentes da unidade, a transformação é a mesma dando-se para coefficiente do quociente o quociente do coefficiente do numerador pelo do denominador. O signal do quociente neste caso determina-se do mesmo por que fizemos quando considerámos apenas uma letra no numerador e no denominador.

Comparando os diferentes resultados que temos obtido no estudo destas transformações vê-se immediatamente que muitas vezes os diferentes modos de transformação podem se substituir dando resultados

equivalentes. Assim $x = a + a$, $x = \frac{4a^2}{2a}$, $x = 3a - a$,

$x = 2a \times a^0$ ou $x = \frac{1}{2}a^2 \times 4a^{-1}$ são todas expressões

equivalentes a $x = 2a$. Do mesmo modo o termo $2a^2 b^3 c^2$ é

equivalente a $\frac{4a^3 b^1 c^5}{2abc^3}$, $3a^2 b^3 c^2 - a^2 b^3 c^2$, $2ab^2 c \times abc$,

$a^2 b^3 c^2 + a^2 b^3 c^2$; esse termo, portanto, pode ser obtido

por qualquer um dos modos de formação considerados. Ainda mais, poderíamos substituir cada uma

das expressões equivalente, por uma infinidade de

outras, como vimos, de modo que o termo $2a^2 b^3 c^2$ pode

ser, algebricamente, formado por uma infinidade de

de modos diferentes. Partindo, portanto, da concep-

ção logica de considerar o termo algebrico o mais

simples como composto de tres partes inseparaveis-coef-

ficiente, expoente e letra, podendo os dois primeiros

serem qualquer numero inteiro, fraccionario, positivo

ou negativo e mesmo uma letra e zero, chegamos

não só ao estabelecimento de uma noção clara sobre

os expoentes, negativos, fraccionarios e zero, dei-

xando evidente a generalidade e variedade infinitas

das transformações algebricas, como tambem deixamos

vêr o quanto é verdadeiro o ponto de vista logico,

quando se consideram as expressões negativas como

comportando as mesmas transformações que as posi-

tivas.

Uma expressão toda original como $-a$ e que sob o

ponto de vista arithmetico não tem significação al-

guma, é, sob o ponto de vista algebrico, equivalente

a outras que todos aceitam como legítimas e normaes.

Algebricamente dadas duas expressões para dividir, é sempre possível achar a expressão do quociente. Julgamos, portanto, completamente inútil a restrição da possibilidade desta transformação somente aos casos que satisfazem as condições: 1° que no dividendo entrem todas as letras que contem o divisor; 2° que o expoente de cada letra no dividendo seja maior ou pelo menos igual ao seu respectivo no divisor, e, finalmente, que o coefficiente do primeiro termo do dividendo seja divisível pelo coefficiente do primeiro termo do divisor, estando ambos ordenados. Não vemos necessidade dessa particularização de uma transformação tão geral como as outras. Substituir a^{3-2} por a^0 na expressão do quociente é tão real algebricamente como substituir por a^{-3} $(a)^{2-5}$; pois que a^{-3} é tão equivalente a $(a)^{2-5}$ como a^0 a $(a)^{3-3}$.

Aquelles que dão para resto da subtracção $3a^3b^2 - 5a^3b^2$ a expressão $-2a^3b^2$ e que admittem a subtracção tão realizavel n'este caso como no caso $5a^3b^2 - 3a^3b^2$, porque consideram como impossível a divisão no caso $\frac{a^3}{a^5}$ e não dão como expressão do

quociente a^{-2} ? Não será uma expressão do quociente algebrico tão exacta como a que se obtém no caso $\frac{a^5}{a^3} = a^2$?

No caso particular, porém, em que se queira determinar um quociente inteiro, então é necessario a imposição das condições acima estabelecidas.

Mas querer-se restringir a possibilidade de uma transformação tão geral como outra qualquer, a este caso tão especial é desconhecer o verdadeiro

caracter do calculo algebrico e muito se deixar dominar pelos habitos arithmeticos.

Temos agora dois casos a considerar : a divisão de um polynomio por um monomio ; e a divisão de dois polynomios.

Em qualquer d'estes casos a questão reduz-se ao caso monomio fundamental, unico em que a divisão se effectua directamente. Para o 1º caso tomemos a expressão

$$\frac{Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + P}{Nab^2}$$

Esta expressão pode ser escripta :

$$\frac{Ax^m}{Nab^2} + \frac{Bx^{m-1}}{Nab^2} + \frac{Cx^{m-2}}{Nab^2} + \dots + \frac{P}{Nab^2}$$

onde a operação se realisa entre dois monomios.

Disto resulta uma transformação por vezes usada no calculo e que consiste em *por em evidencia um factor commun*.

Seja, por exemplo, o polynomio :

$$8a^4b^5c^4 + 10a^3b^3c^3 - 2a^2b^3c^2$$

Podemos considerar esta expressão como um dividendo equivalente ao producto do divisor $2a^2b^3c^2$, factor commun a todos os seus termos, pelo quociente que se obtem dividendo-a por este divisor, e teremos assim :

$$8a^4b^5c^4 + 10a^3b^3c^3 - 2a^2b^3c^2 = 2a^2b^3c^2 (4a^2b^2c^2 + 5ac - b)$$

Passemos á consideração do caso mais complexo da divisão de dois polynomios.

A reducção deste caso ao caso monomio fundamental obtem-se referindo esta nova transformação á transformação por multiplicação. Logicamente nós podemos sempre suppor a expressão dividendo como o producto das expressões divisora e quociente.

Sendo assim, ordenando-se o dividendo e o divisor em relação a uma mesma letra, o primeiro e o ultimo termo do dividendo, segundo as indicações da multiplicação, não soffrerão nenhuma redução, e, portanto, o coefficiente do primeiro deve representar o producto dos coefficientes dos primeiros termos do divisor e do quociente, e os expoentes de suas letras devem representar a somma dos expoentes correspondentes ás mesmas letras nos termos do divisor e quociente; o mesmo acontecerá com o ultimo termo do dividendo relativamente aos ultimos termos do divisor e do quociente.

Fica assim a determinação do 1º termo do quociente referida a estes dois problemas numericos; dado um producto de dois factores e um d'elles achar o outro; dada uma somma de duas parcellas e uma d'ellas achar a outra.

Disto resulta que para obter-se o termo quociente divide-se o coefficiente do 1º termo do dividendo pelo coefficiente do 1º termo do divisor e o quociente representará o coefficiente do 1º termo do quociente; subtrahese dos expoentes das letras do termo dividendo os expoentes correspondentes ás mesmas letras no termo divisor e os restos serão os expoentes d'essas mesmas letras no termo quociente, suppondo-se com o expoente zero no termo divisor as letras que só se acharem no termo dividendo.

Obtido o primeiro termo do quociente, formando o seu producto por todo o divisor e subtrahindo o resultado da expressão dividendo, teremos para resto uma nova expressão que representará o producto do divisor pelos termos restantes do quociente, que têm de ser determinados. Ordena-se este dividendo parcial em relação á mesma letra que o divisor

e por um identico raciocinio ao anterior obtem-se o segundo termo do quociente, que multiplicado pelo divisor e subtrahido o producto do dividendo considerado, nos dará uma outra expressão, que representará o producto do divisor pelos termos que restam a determinar no quociente; e assim por diante até que o resultado da subtracção seja nullo, e n'este caso o quociente terá um numero limitado de termos, ou até onde se queira no caso de ser este numero illimitado.

A regra da divisão é assim obtida pela consideração puramente logica de suppor-se o dividendo como o producto do divisor e do quociente, o que tem a vantagem de dar a esta transformação o mesmo character de generalidade com que são consideradas todas as outras, não restringindo-a ao caso especial do quociente inteiro como faz a maioria dos compendios especiaes.

Obtido o modo logico por que o quociente se deriva do dividendo e do divisor, a generalisação dos exponentes emanada das formações elementares nos permite estender a regra aos casos fraccionarios e negativos e outros quaesquer de modo que a transformação da divisão torna-se plenamente geral.

Nós devemos, pois, distinguir dois casos:

1.º A transformação da divisão é sempre possivel desde que não se sujeita a expressão do quociente a satisfazer condição alguma especial;

2.º A transformação da divisão, quando se exige que a expressão do quociente seja inteira, só é possivel satisfazendo o dividendo e o divisor determinadas condições.

A este ultimo caso, todo particular, é que geralmente se costuma reduzir a divisão algebraica. Isto é

tanto mais para admirar quando mesmo em arithmetica a divisão já se nos apresenta com certo caracter geral de transformação, pois que ahí o quociente pode ser inteiro como $\frac{8}{4}$, pode ser fraccionario como $\frac{2}{5}=0,4$ e, finalmente, pode ser uma dizima periodica como $\frac{7}{9}=0,7777\dots$ Ora, que em arithmetica, onde a noção de valor é ponto capital, só se considere a divisão possivel no caso de ser o quociente inteiro admitte-se; mas que se queira estender esta restricção a um dominio em que se tem em vista principalmente transformar umas formulas em outras sem que se altere o modo de relação por ellas traduzido, não é nada racional.

Assim como em arithmetica o quociente pôde apresentar a fôrma fraccionaria de um numero limitado ou illimitado de algarismos, do mesmo modo em algebra a expressão do quociente pôde ser fraccionaria e ter um numero limitado ou illimitado de termos.

Taes são os casos representados pelos exemplos:

$$\begin{array}{r} 24a^4x^5 - 6a^3x^4 + 12a^2x^3 \quad | \quad 8a^3x^2 - 2a^4x + 4a^4 \\ \hline -24a^4x^5 + 6a^3x^4 - 12a^2x^3 \quad | \quad 3a^{-1}x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \quad | \quad a+c \\ -a-c \quad | \quad \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{c^3}{a^3} + \dots \\ \hline +c + \frac{c^2}{a} \end{array}$$

Consideremos o primeiro exemplo.

O dividendo sendo considerado como um producto do divisor dado pelo quociente, o termo $24a^4x^5$ do producto, em que o expoente da letra ordenadora x é o maior, é um termo que não soffreu redução.

O coefficiente, pois, deste termo ou 24 é o producto de dois factores, um dado que é 8 , coefficiente do 1° termo do divisor, e o outro que se procura, e que se obtem dividindo 24 por 8 , o que dá 3 para coefficiente do 1° termo do quociente. O expoente de a no termo do dividendo sendo 4 representa a somma de duas parcelas, uma conhecida que é 5 , expoente de a no termo divisor e outra que se procura, e que se obtem subtrahindo algebricamente de 4 o expoente 5 , o que, segundo o artificio da subtracção, nos dá -1 para expoente de a no termo do quociente.

Determinando de um modo identico o expoente de x no termo do quociente, este termo será $3a^{-1}x^3$ que multiplicado pelo divisor e subtrahido o producto do dividendo nos dá um resultado nullo. O quociente é neste caso fraccionario em relação a a e tem um numero limitado de termos.

No segundo exemplo considerações analogas nos levam para determinar o 1° termo do quociente, a dividir o 1° termo a do dividendo pelo 1° termo a do divisor, o que nos dá 1 para 1° termo do quociente. O producto deste termo pelo divisor $a+c$, subtrahido do dividendo, nos dá um dividendo parcial $-c$, que dividido por a nos dá $-\frac{c}{a}$, para segundo termo do quociente. Este termo multiplicado pelo divisor e subtrahido o producto do dividendo $-c$ nos dá um segundo dividendo parcial $\frac{c^2}{a}$, que dividido por a nos dá $\frac{c^2}{a^2}$ para 3° termo do quociente etc.

Assim continuando nós veriamos logo que o quociente teria um numero illimitado de termos, o que certamente não constitue motivo para considerar-se a transformação impossivel, uma vez que a expressão

do quociente não foi de antemão sujeita á condição especial de ter um numero limitado de termos.

A transformação algebraica operou-se completamente mostrando-nos que a formula $\frac{a}{a+c}$ pode no calculo ser substituida pela formula $1 - \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} -$

$$- \frac{c^3}{a^3} + \dots$$

de numero illimitado de termos, substituição esta que constitue o caracter essencial das transformações algebraicas. Desde que algebraicamente a transformação da multiplicação é sempre possivel, sejam quaes forem os expoentes e coefficients das letras dos termos nos factores; desde que a transformação por subtracção nos dá as formulas equivalentes aos casos numericamente impossiveis em que o minuendo é menor que o subtrahendo, como acontece na subtracção $a - 2a$, não ha motivo algum logico para que tambem não se considere inteiramente geral a transformação por divisão, onde as modificações dos expoentes são determinadas pela subtracção.

Por conseguinte se entre os expoentes das letras nos dois polynomios dados alguns ou todos forem fractionarios ou negativos a transformação deve operar-se de um modo identico. Se, por exemplo, o expoente de uma letra no termo do dividendo fosse 3 e no do divisor fosse -5 , a subtracção algebraica nos daria para expoente dessa letra no termo do quociente $3 + 5 = 8$; se fossem $-\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, o expoente dessa letra no quociente seria

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{6}{15} - \frac{5}{15} = -\frac{11}{15}$$

e assim para outros casos quaesquer.

Embora sempre possível a transformação que estudamos pôde tornar-se mais ou menos laboriosa quando os coefficients da letra ordenadora são polynomios mais ou menos complexos. Tacs são os casos em que os polynomios dados apresentam a forma:

$$f(a, b, c \dots)x^m + f_1(a, b, c \dots)x^{m-1} + \dots + f_m(a, b, c \dots)$$

Nestes casos cada termo do quociente geral é obtido pela divisão de uma certa formação de a, b, c , etc., pela formação destas quantidades que representa o coefficiente do 1º termo do divisor, e nesta divisão parcial ainda pôde dar-se que a formação de a, b, \dots ordenada em relação a a por exemplo, apresente para coefficientes desta letra expressões polynomias formações de b, c, d, \dots , de modo a complicar notavelmente a transformação tornando-a demasiado laboriosa. Convem, porem, observar que estes casos, sendo os mais trabalhosos e complicados são tambem os menos uteis e frequentes.

Disto resulta, que uma vez que o quociente não é sujeito a condição alguma especial a sua expressão pôde ser sempre obtida segundo o modo estabelecido pela regra geral, logicamente instituida, podendo esta expressão ser inteira ou fraccionaria em relação a uma ou mais letras e ter um numero limitado ou illimitado de termos.

Estabelecido por esta forma o caracter geral da transformação da divisão, nós vamos agora considerar o caso particular em que o dividendo e o divisor são polynomios iuteiros, e em que a expressão do quociente fica sujeita a condição de tambem ser inteira.

Um polynomio diz-se inteiro em relação a uma letra quando em sua expressão esta letra se acha affecta sómente de expoentes inteiros e positivos, ou

por outra quando esta letra não está submettida a radical nem se acha em denominador.

A condição de ser inteiro imposta ao quociente de dois polynomios inteiros pode ser ou sómente relativa á letra ordenadora, ou a todas as letras que entram nas expressões dadas, caso mais particular ainda que o primeiro. No primeiro caso, ordenados os polynomios em relação a uma mesma letra, para que o quociente seja inteiro, como a divisão só se dá directamente entre os primeiros termos do dividendo primitivo e dos dividendos parciaes e o 1º termo do divisor, é necessario: 1º que os expoentes da letra ordenadora no 1º termo do dividendo dado e nos primeiros termos dos differentes dividendos parciaes sejam maiores que o expoente d'essa letra no 1º termo do divisor; 2º que o ultimo termo do dividendo dado dividido pelo ultimo termo do divisor dê para quociente um termo inteiro em relação a letra ordenadora.

No segundo caso é necessario: 1º as condições acima mencionadas estendendo-as a todas as letras dos termos considerados; 2º que no 1º termo do divisor não entre letra alguma que não se ache no 1º termo do dividendo dado e nos primeiros termos dos differentes dividendos parciaes.

Satisfeitas essas condições se no correr da transformação se obtiver para a expressão do quociente um termo em que a letra ordenadora tenha um expoente menor do que tem no termo directamente obtido pela divisão entre os ultimos termos do dividendo dado e do divisor ou maior no caso de se acharem as expressões dadas ordenadas segundo as potencias crescentes, isto indica que não é possível obter-se a expressão inteira do quociente; o mesmo será si se chegar a

um dividendo parcial em que o expoente da letra ordenadora no primeiro termo seja menor que o expoente dessa letra no 1º termo do divisor.

Neste caso o dividendo parcial considerado denomina-se *resto* e então a expressão do quociente pôde, de modo analogo ao que se dá em arithmetica, ser completada por uma fracção cujo numerador é o resto e cujo denominador é o divisor. Originadas assim as expressões fraccionarias o processo *systematico* por que se as simplifica constitue a *theoria* do maior divisor commum, que completará a nossa apreciação sobre as transformações algebricas.

Nós vamos agora considerar um caso particular da divisão cuja importancia no calculo exige uma apreciação especial. Este caso é o da divisão entre um *polynomio* inteiro em x e um *binomio* da forma $x-a$.

Seja o *polynomio* :

$$Ax^m + A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \dots + A_m$$

para dividir pelo *binomio* $x-a$.

Effectuando a divisão segundo a regra já estabelecida temos :

$$\begin{array}{r|l} Ax^m + A_0 & x^{m-1} + A_1 \\ Aa & \begin{array}{l} + A_0a \\ + Aa^2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^{m-2} + \dots + A_m & x-a \\ \hline Ax^{m-1} + (A_0 + Aa) & \\ x^{m-2} + (A_1 + A_0a) & \\ + Aa^2)x^{m-3} + \dots & \end{array}$$

A apreciação deste quociente nos mostra : 1º, que o *polynomio* quociente é de gráo inferior de uma unidade ao do dividendo; 2º, que o coefficiente do 1º termo do quociente é igual ao do 1º termo do dividendo; o coefficiente do 2º termo do quociente obtem-se multiplicando pelo 2º termo a do *binomio* divisor o coefficiente do termo anterior e sommando o producto ao coefficiente A_0 do termo da mesma ordem no dividendo; o coefficiente do 3º termo do

quociente, de um modo identico, obtem-se multiplicando por a o coefferente $A_0 + Aa$ da termo anterior e sommando o producto ao coefferente A_1 do 3º termo do dividendo dado, e assim por diante. Representando, pois, por $C, C_0, C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ os diferentes coefferentes do quociente, nós temos as seguintes igualdades :

$$C = A, C_0 = Ca + A_0, C_1 = C_0 a + A_1, C_2 = C_1 a + A_2, \\ \dots, C_{m-1} = C_{m-2} a + A_{m-1} \quad (1)$$

O resto obtem-se multiplicando C_{m-1} por a e sommando ao resultado A_m . Teremos pois :

$$R = C_{m-1} a + A_m \quad (2)$$

Substituindo na segunda das equações (1) C por seu valor A dado pela primeira ; substituindo o valor obtido para C_0 na 3ª equação e o valor dado por esta para C_1 na 4ª e assim por diante, nós chegamos ao valor seguinte para C_{m-1}

$$C_{m-1} = Aa^{m-1} + A_0 a^{m-1} + \dots + A_{m-1}$$

d'onde resulta para o resto a expressão :

$$R = Aa^m + A_0 a^{m-1} + \dots + A_m$$

que nos mostra ser o resto da divisão de um polynomio inteiro em x pelo binomio $x - a$ o resultado que se obtém substituindo no polynomio x por a .

Vejamos como d'Alembert demonstrou isto directamente e consideremos na demonstração o binomio divisor tendo a fórmula mais geral $(mx - a)$, que no caso particular de $m=1$ reduz-se a $x - a$.

Seja $F(x)$ o polynomio inteiro em x que deve servir de dividendo. Effectuando directamente a divisão, como o binomio divisor é do 1º grau em x , é claro que a expressão do resto pôde ser obtida independente de x . Chamando R o resto e $f(x)$ o quociente, nós temos:

$$F(x) = (mx - a)f(x) + R.$$

Fazendo n'esta igualdade $x = \frac{a}{m}$ o primeiro membro tomará um valor particular que chamaremos $F(\frac{a}{m})$; quanto ao 2º membro, o 1º termo se annullará, pois que o factor $(mx - a)$ para esse valor de x torna-se nullo, e $f(x)$ tem um valor determinado; o 2º termo que é o resto sendo independente de x não se altera, e a igualdade se transforma em: $F(\frac{a}{m}) = R$.

Este resultado nos mostra que o resto da divisão de um polynomio inteiro em x pelo binomio $(mx - a)$ é o resultado que se obtém substituindo no polynomio em lugar de x o quociente do 2º termo do binomio pelo coefficiente do seu 1º termo. Suppondo $m = 1$ nós teriamos o resultado anteriormente obtido. D'aqui resultam os seguintes e importantes corollarios:

1º Corollario—Se um polynomio inteiro em x , $F(x)$, se annulla quando nelle se substitue x pelo quantidade a , este polynomio é divisivel pelo binomio $x - a$.

Com effeito, sendo o resto da divisão de $F(x)$ por $x - a$ o resultado que se obetem substituindo x por a no polynomio, desde que este resultado é nullo o resto tambem é e a divisão é exacta.

2º Corollario—Se o polynomio $F(x)$ si annulla quando nelle se substitue successivamente x pelos quantidades diferentes a, b, c, \dots, k o polynomio é divisivel pelo producto $(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - k)$.

Considerando o valor a o 1º corollario nos dá:

$$F(x) = (x - a)f(x) \quad (1)$$

sendo $f(x)$ a polynomio inteiro que representa o quociente. Fazendo nesta igualdade x igual a b temos:

$$0 = (b - a)f_1(b)$$

As quantidades a, b, c etc sendo por hypothese diffe-

rentes, esta igualdade só se pode verificar sendo $f_1(b)=0$. E como $f_1(x)$ é um polynomio inteiro em x , nós temos pelo principio demonstrado:

$$f_1(x)=(x-b)f_2(x)$$

Sendo $f_2(x)$ o polynomio inteiro quociente.

Substituindo este valor na expressão (1) teremos:

$$F(x)=(x-a)(x-b)f_2(x)$$

Fazendo nesta igualdade $x=c$ o raciocinando como anteriormente chegaríamos a expressão:

$$F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)f_3(x)$$

Operando para com os outros valores de um modo identico teriamos finalmente a expressão:

$$F(x)=(x-a)(x-b)\dots\dots(x-k)$$

que demonstra o corollario.

Sobre este principio estão baseados tres theoremas que desde já devemos conhecer.

Theorema. — Se um polynomio inteiro em x do gráu m torna-se nullo para $m+1$ valores differentes de x , elle será nullo para um valor qualquer d'esta variavel.

Seja $F(x)$ um polynomio inteiro em x e de gráu m , cujo valor se annulla quando se substitue x por um qualquer dos valores differentes, a, a_1, a_2, a_{m+1} .

Segundo o principio estudado na divisão, nós temos :

$$F(x)=Q(x-a)(x-a_1)\dots\dots(x-a_m) \quad (1)$$

Sendo Q o quociente, independente de x , pois que o dividendo $F(x)$ e o divisor $(x-a)(x-a_1)\dots(x-a_m)$, são do mesmo gráu m em relação a x .

Suppondo $x=a_{m+1}$ na igualdade (1), teremos:

$$F(a_{m+1})=Q(a_{m+1}-a)(a_{m+1}-a_1)\dots(a_{m+1}-a_m).$$

Sendo, por hypothese, o primeiro membro nullo, o segundo tambem deve ser, e como este é um producto de dois factores Q e $(a_{m+1}-a_1)\dots(a_{m+1}-a_m)$,

e não podendo este ultimo factor ser nullo, pois supõe-se os valores a, a_1 etc., differentes, o factor Q deve necessariamente ser nullo. Sendo Q nullo, a igualdade (1) nos mostra que o polynomio $F(x)$ é nullo para qualquer valor dado a x , visto ser Q uma expressão independente d'esta variavel.

II. Theorema—Para que um polynomio inteiro em x e de gráo m se annule para $m+1$ valores differentes dados a x , é necessario que o seu termo constante seja nullo, e tambem os coefficients de todas as potencias da variavel.

Seja $Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Mx^2 + Nx^2 + Px + R$ (1) o polynomio dado, que se annula para $m+1$ valores differentes de x . Pelo principio 1º nós sabemos que este polynomio deve ser nullo para um valor qualquer de x e portanto em particular para o valor $x=0$.

Fazendo, $x=0$ o polynomio dado se reduzirá a R , e devendo o polynomio ser nullo é necessario que R seja igual a zero. A expressão (1) ficará assim reduzida a $Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Mx^2 + Nx^2 + Px$

Pondo x em evidencia, teremos:

$$x (Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Mx^2 + Nx + P)$$

Este producto devendo ser nullo para qualquer valor dado a x , é claro que para todo valor da variavel differente de zero, elle só se pode annular pela annullação, para estes valores, do factor $Ax^{m-1} + \dots + Nx + P$.

Disto resulta que $Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Mx^2 + Nx + P$, é um polynomio inteiro em x que se annula para um numero de valores de x superior ao seu gráo, e que por consequente deve ser nullo para todo e qual-

quer valor dado a x , sem exclusão do caso particular de $x=0$. Suppondo, pois, $x=0$, o polynomio fica reduzido ao termo P , e como elle deve ser nullo para este valor da variavel é necessario para isto que P seja igual a zero. Teremos assim o polynomio:

$$Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Nx$$

Pondo x em evidencia e fazendo um raciocinio identico nós chegaríamos a conclusão que N deve ser nullo; e, continuando do mesmo modo obteríamos $M=0, \dots, B=0, A=0$.

Em resumo : para que o polynomio inteiro em x , $Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q$ seja nullo para um numero de valores de x superior ao seu gráu é necessario que se tenha : $A=0, B=0, \dots, M=0, N=0, P=0, Q=0$.

III Theorema. - Se dois polynomios inteiros em x um do gráu m e o outro de gráu n , sendo m maior que n , dão os mesmos valores para $m+1$ valores diferentes de x , estes dois polynomios são identicos, isto é, são do mesmo gráu e tem respectivamente iguaes os coefficients das mesmas potencias de x .

Sejam os dois polynomios :

$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Rx^n + \dots + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q$$

$$f(x) = A_1 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + M_1 x^3 + N_1 x^2 + P_1 x + Q_1$$

Sendo iguaes os valores dados por estes dois polynomios para $m+1$ valores diferentes de x , é claro que para estes valores da variavel a differença entre elles deve ser nulla.

Tomando esta differença nós devemos, pois, ter :

$$Ax^m + \dots + (R - A_1)x^n + \dots + (M - M_1)x^3 + (N - N_1)x^2 + (P - P_1)x + Q - Q_1 = 0$$

Ora, sendo o 1º membro d'esta igualdade um polynomio do gráu m no maximo, e devendo ser nullo para

os $m+1$ valores diferentes de x , nós devemos ter, pelo principio anterior as seguintes relações :

$$A=0 \dots R-A_1=0 \dots M-M_1=0, N-N_1=0$$

$P-P_1=0$ $Q-Q_1=0$ d'onde conclue-se que os dois polynomios são do mesmo gráu n e tem os coefficients das diferentes potencias de x respectivamente iguaes, isto é, os polynomios são identicos.

O conhecimento destes principios, base de um grande numero de transformações importantes, tem a vantagem de nos facilitar os calculos dispensando muitas vezes o trabalho de effectuar directamente as operações.

Supponhámos, por exemplo, que se procura saber se a expressão $x^m - a^m$ é divisivel, com um quociente inteiro, por $x - a$. Substituindo na expressão dada x por a temos $a^m - a^m = 0$; o que nos mostra que a divisão é exacta pois sabemos que $a^m - a^m$ representa o resto da divisão de $x^m - a^m$ por $x - a$. Para obter a expressão do quociente sem effectuar directamente a divisão basta-nos, applicando a lei deduzida anteriormente, suppor que todos os termos intermediarios entre x^m e a^m , isto é, os termos affectos de x^{m-1} , x^{m-2} , \dots , x , tem para coefficients 0 . Applicando a lei obtida para a formação do quociente do polynomio inteiro por $x - a$, temos que para o nosso caso a expressão será :

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2} + a^{m-1}$$

Disto conclue-se o importante theoremata : *A differença entre as mesmas potencias de duas quantidades é sempre divisivel pela differença entre ellas.*

Si o binomio divisor fosse $(x+a)$ ou $x - (-a)$, o valor a substituir em $x^m - a^m$ seria $-a$ e teriamos para resto $(-a)^m - a^m$.

D'onde se conclue que se m é par este resultado sendo nullo, $x^m - a^m$ é divisivel por $x - a$; si m é impar a divisão exacta não é possivel e a expressão do resto será $-2a^m$. Si a expressão dada fôr $x^m + a^m$ a substituição de x por $-a$ nos dá para resto $(-a^m) + a^m$. Si m fôr impar a divisão de $x^m + a^m$ por $x + a$ é exacta pois o resultado da substituição é nullo, se n fôr par a divisão exacta é impossivel e o resto será $2a^m$.

Supponhâmos agora que se quer saber quaes os valores que devem ter os coefficients m e n para que a expressão $bx^3 + ax^2 + mx + n$ seja divisivel exactamente pelo producto $(x - c)(x - d)$, sendo a, b, c, d quantidades conhecidas. Estabelecendo algebricamente segundo os principios já estudados, as condições para que a expressão dada seja separadamente divisivel por $x - c$ e $x - d$ temos as equações do primeiro gráo em m e n ,

$bc^3 + ac^2 + mc + n = 0, bd^3 + ad^2 + md + n = 0$
que resolvidas nos darão os valores das incognitas, m e n .

O caso de um unico binomio para divisor e um unico coefficiente indeterminado daria para determinar este uma equação do primeiro gráo a uma incognita. Si se quizesse, por exemplo, saber o valor a dar a m para que $ax^2 + bx + m$ fosse divisivel por $x - c$ sendo a, b, c , quantidades dadas, a equação em m a resolver seria :

$$ac^2 + bc + m = 0.$$

Esta determinação das condições que devem satisfazer os coefficients indeterminados do dividendo para que a divisão seja exacta pode ainda ser obtida effectuando-se a transformação directamente e igualando o resto a zero. Resulta assim um polynomio identicamente nullo cujos coefficients iguallados a

zero nos darão as equações necessários para a determinação dos valores que devem ter os coefficients indeterminados do dividendo.

Este modo de resolver a questão tem sobre o anterior a vantagem de não exigir que a expressão divisor seja decomposta em factores binomios de primeiro grão, o que nem sempre é muito simples.

Quer-se, por exemplo, saber que valores devem ter os coefficients p , q , m , e n , para que o polynomio $12x^6 + px^3 + qx^2 + mx - n$ seja divisivel por $2x^5 - 3x^2 + x - 1$

Effectuando directamente a divisão, temos :

$$\begin{array}{r} 12x^6 + px^3 + qx^2 + mx - n \quad | \quad 2x^5 - 3x^2 + x - 1 \\ -12x^6 + 18x^3 - 6x^2 + 6x \quad | \quad 6x \\ \hline (p+18)x^3 + (q-6)x^2 + (m+6)x - n \end{array}$$

Para que a divisão seja exacta basta que o resto seja nullo, o que se exprime algebricamente por :

$$(p+18)x^3 + (q-6)x^2 + (m+6)x - n = 0$$

Segundo o theorema já estudado, para que esta igualdade se verifique qualquer que seja o valor de x é preciso termos separadamente :

$$p+18=0, \quad q-6=0, \quad m+6=0 \quad n=0.$$

D'onde se conclue que os valores pedidos são :

$p=-18, q=6, m=-6, n=0$. O polynomio exactamente divisivel pelo divisor dado será pois :

$$12x^6 - 18x^3 + 6x^2 - 6x$$

Esta determinação do valor de grandezas indeterminadas para que se verifique a divisão entre duas expressões, nos deixa ver o quanto, mesmo nos factos mais simples do dominio abstracto, o conhecimento de uma lei, pode nos permittir previsões precisas, estabelecendo de antemão quaes os valores que devem ter os coefficients de uma certa formula para

que se verifique um modo determinado de relação que se suppõe dever existir entre ella e uma outra expressão dada.

Estudada a transformação da divisão nós devemos dar como complemento necessario á sua completa apreciação a theoria do maximo commum divisor. Esta theoria em geral sobrecarregada de theoremas desnecessarios, pode ser, e assim convem, com facilidade caracterizada pela sua analogia com a theoria arithmetica correspondente, o que bastará para não suscitar mais tarde embarços quanto a sua applicação posterior á theoria das equações.

Uma fracção algebraica, como em arithmetica, representando a expressão de um quociente, apresenta dois termos: o numerador ou o dividendo, e o denominador ou divisor. As regras para sommar, subtrahir, multiplicar e dividir as expressões algebraicas fraccionarias são as mesmas que as da arithmetica, sendo as operações numericas substituidas pelas transformações algebraicas que lhes correspondem.

Desde que não é possivel substituir uma formula fraccionaria por uma expressão inteira equivalente ao quociente, e que não convem a substituição por um quociente fraccionario em relação ás letras que a constituem, mantem-se no calculo a divisão indicada pela annotação fraccionaria, e procura-se sem alterar a fracção reduzir os seus termos á forma mais simples.

Esta redução comporta dois modos, um espontaneo, consiste em dividir successivamente os termos da fracção pelos factores que lhes forem communs; o outro systematico consiste em procurar a expressão producto de todos os divisores communs ao dois termos da fracção, e dividir estes por esta expressão,

que recebeu por esta razão a denominação de maior divisor commun.

O primeiro processo vantajoso quando é possível á simples vista ou por facéis transformações separar-se os factores communs, torna-se fastidioso e na maioria dos casos inexequível quando os dois termos da fracção são polynomios mais ou menos complexos.

As considerações que vamos fazer referem-se as expressões fraccionarias cujos termos são polynomios inteiros, que é o caso normal e unico verdadeiramente util na questão do maior divisor commun.

Em algebra um polynomio inteiro diz-se *primo* quando só póde ter um quociente inteiro tendo para divisor a si mesmo ou a unidade; e dois polynomios são primos quando só apresentam como factor commun a unidade.

O maior divisor commun sendo o producto de todos os divisores communs aos dois polynomios, e não tendo outros factores, é claro que os quocientes da divisão entre cada um dos polynomios e o seu m. c. d. devem ser primos entre si.

Os principios em que se basea a indagação de m. c. d. algebrico são os seguintes :

1º. Se um polynomio P, divide o producto $R \times S$ de dois outros polynomios R e S, e é primo com um d'elles divide necessariamente o outro.

Seja R o factor primo com P. O m. c. d. entre R e S será igual a unidade. Multiplicando R e P por S é claro, pela diffinição do m. c. d., que este ficará tambem multiplicado por S. O m. c. d., pois, entre os polynomios $R \times S$ e $P \times S$ será $1 \times S$ ou S. Ora, P, por hypothese, divide $R \times S$ e portanto este producto contem os factores de P, divide o seu multiplo $P \times R$ e por conseguinte dividindo os polynomios

RS e PS deve necessariamente fazer parte como factor do m. c. d. entre estes dois ultimos polynomios. Sendo N este m. c. d., conclue-se que P divide N.

2º. O maximo commum divisor de dois polynomios inteiros P e P' é o mesmo que o m. c. d. entre P' e o resto R, da divisão de P por P' sendo P' menor que P.

Chamando Q o quociente da divisão entre P e P' temos: $P = P' \times Q + R$.

O m. c. d. entre P e P' dividindo P e P' e portanto $P' \times Q$, divide necessariamente a differença $P - P' \times Q$ ou o resto R.

Chamando D este m. c. d. vejamos se o m. c. d. entre P' e R póde ser differente d'elle. Supponhamos que o m. c. d. entre P' e R seja $D \times m$, sendo m um factor primo qualquer. Este m. c. d. dividindo R e P' e portanto $P' \times Q$ divide tambem a somma $P' \times Q + R$ ou P, d'onde se conclue que $D \times m$ será o m. c. d. entre P e P' o que é absurdo, pois, a hypothese suppõe ser D.

Baseada nestes principios a transformação por que se obtem o maior divisor commum é perfeitamente semelhante á operação arithmetica correspondente e consiste em uma serie de divisões successivas, sendo na primeira o maior polynomio dado o dividendo e o menor o divisor, e nas outras o divisor e o dividendo sendo respectivamente o resto e o divisor da divisão precedente.

Para tornar possivel a transformação e tambem facilitá-la pode-se, sem alteração da expressão procurada do m. c. d. cuja constituição especial assim permite, multiplicar o dividendo pelo coefficente do 1º termo do divisor elevado a uma potencia marcada pelo numero de divisões que se tem de fazer

antes de chegar ao resto; suprimir em um dos polynomios os factores que forem communs a todos os seus termos sem ser communs ao outro polynomio, finalmente pode-se supprimir todos os factores communs aos coefficients dos termos dos dois polynomios, determinar o m. c. d. entre elles assim simplificados e obtido este multiplicar-o pelos factores suprimidos communs aos dois polynomios.

Na indagação do m. c. d. temos dois casos a distinguir, segundo as expressões dadas são monomias ou polynomias. No primeiro caso a questão reduz se a determinar pelo processo arithmetico o m. c. d. entre os coefficients das expressões dadas, e obtido este escreve-se em seguida todas as letras differentes que entrão nos monomios dados dando a cada uma o menor expoente que ella apresenta nas duas expressões consideradas. Seção, por exemplo, as expressões dadas: $7524a^4x^3b^3$ e $918a^2xb^3$ Procurando o m. c. d. entre 7524 e 918 acha-se 18. O m. c. d. dos dois monomios será, pois; $18a^2xb^3$. Seção agora os polynomios: $5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3$ e $7a^2 - 23ab + 6b^2$

Na primeira divisão como 5 não é divisivel por 7, nós podemos multiplicar o dividendo por 7 e teremos, effectuando a transformação :

$$\begin{array}{r|l} 35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ -35a^3 + 115a^2b - 30ab^2 & 5a \\ \hline & - 11a^2b + 47ab^2 - 42b^3 \end{array}$$

Para continuar a divisão multiplica-se o resto por 7 e supprime-se o factor b commum a todos os seus termos e que não é commum ao divisor. Teremos:

$$\begin{array}{r|l} -77a^2 + 329ab - 294b^2 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ +77a^2 - 253ab + 66b^2 & -11 \\ \hline & 76ab - 228b^2 \end{array}$$

Agora passa o resto a servir de divisor e o divisor de dividendo, e podemos supprimir no resto o factor $76b$ que não é commum ao divisor. Teremos, então:

$$\begin{array}{r|l} 7a^2 - 23ab + 6b^2 & a - 3b \\ -7a^2 + 21ab & \hline \hline & -2ab + 6b^2 \\ & + 2ab - 6b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

O m. c. d. entre os polynomios dados será, pois, $a - 3b$.

No caso de serem muitos os polynomios considerados a questão se limitaria á repetição de um maior ou menor numero de operações identicas a que acabamos de fazer. Para obter esta redução determina-se em primeiro logar o m. c. d. entre dous dos polynomios dados, depois entre o maximo commum divisor obtido e um outro dos polynomios, depois entre este segundo m. c. d. e um terceiro polynomio e assim por diante,

Ficam assim as transformações expostas no primeiro capitulo, e que tem por fim passar a equação do estado implicito ao estado explicito, completadas pelas transformações das formulas que resultam deste ultimo estado, onde termina a phase algebrica de resolução da equação e começa a phase algebrica de simplificação das formulas indispensavel, sempre que fôr possível, para simplificar a avaliações numericas correspondentes.

Capitulo III

Lei binomial de Newton—Potencias e Raizes

Depois de havermos estudado as transformações algebraicas relativas aos dois primeiros conjugados de formações simples, é natural que nos occupemos com a apreciação da lei de Newton, que institue no dominio algebrico um meio fecundo de transformação e permite a generalisação indispensavel á completa coordenação da algebra directa.

Anteriormente estabelecemos o modo geral por que devemos elevar a uma potencia qualquer um termo monomio. Para obter isto não é necessario passar por todas as potencias intermediarias entre a primeira e a que se considera, basta elevar o coefficiente do termo á potencia considerada e multiplicar o expoente de cada uma das letras que o compõem pelo expoente da potencia. Desde, porém, que a expressão dada tem mais de um termo, para obtermos uma qualquer de suas potencias é necessario passarmos por todas as potencias inferiores, o que em geral dá logar a operações longas e fastidiosas. Se quizermos, por exemplo, a quarta potencia de um binomio, teremos de calcular primeiro o quadrado, depois o cubo, que multiplicado pelo binomio dado dará a quarta potencia.

Nowton foi quem primeiro determinou a lei geral que rege o desenvolvimento de uma potencia qualquer de um binomio, a qual fez desaparecer o

grande inconveniente acima mencionado, dispensando a passagem pelos desenvolvimentos das potencias precedentes.

O desenvolvimento algebrico geral de uma potencia, que pode ser qualquer, de um binomio, é o que se denomina de *binomio de Newton*.

No estudo das potencias distinguiremos dois casos; o primeiro é aquelle em que a expressão considerada é um binomio, o segundo aquelle em que esta expressão é um polynomio. Directamente estudado pelo theorema de Newton o caso binomial, a elle com facilidade pode ser reduzido o estudo do caso polynomio por meio de contracções provisórias.

Effectuando o producto de dois ou mais binomios, em cada um dos termos que compõem a expressão final temos a considerar o coefficente e o expoente, elementos estes que se podem modificar pela redução. Como procuramos determinar a lei geral que rege o desenvolvimento dos productos assim constituidos os casos que considerarmos, para maior evidencia e facilidade no estabelecimento da lei, serão taes, que não haja redução alguma, de sorte que os productos parciaes e total se comporão sempre do seu maximo numero de termos.

Esta escolha, porém, não indica de modo algum, uma impossibilidade de descobrir a lei da formação do desenvolvimento da potencia binomial, pela consideração de casos em que haja redução no producto, mas simplesmente que por ella chegaremos mais rapidamente a descoberta da lei pela consideração de productos satisfazendo aquella condição, que será obtida conservando-se differentes os segundos termos dos binomios multiplicados.

Multiplicando $(x+a)$ e $(x+b)$, depois $(x+a)(x+b)$

$(x+c)$, depois $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ $(x+d)$ e finalmente $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ $(x+d)$ $(x+e)$, obteremos os seguintes resultados.

$$(x+a)(x+b) = \begin{array}{l} x^2 + a \\ +b \end{array} \Big| x + ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = \begin{array}{l} x^3 + a \\ +b \\ +c \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^2 + ab \\ -ac \\ +ad \end{array} \Big| x + abc$$

$$\begin{array}{l} (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = \\ = \begin{array}{l} x^4 + a \\ +b \\ +c \\ +d \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^3 + ab \\ +bc \\ +ad \\ +bd \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^2 + abc \\ +abd \\ +acd \\ -bcd \end{array} \Big| x + abcd \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = \\ = \begin{array}{l} x^5 + a \\ +b \\ +c \\ +d \\ +e \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^4 + ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^3 + abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \\ +abe \\ -bce \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^2 + abcd \\ +abce \\ +abde \\ +acde \\ +bcde \end{array} \Big| x + abcde \end{array}$$

A inspecção destes desenvolvimentos nos mostra immediatamente: 1º. cada um dos productos compõe-se de um numero de termos superior de uma unidade ao numero de factores que entram em sua composição; 2º o maior expoente de x é igual em cada um ao numero de factores que concorrem para sua formação, e este expoente vae successivamente de termo em termo diminuindo de uma unidade até o ultimo em que é nullo; 3º os coefficients de x são

representados por sommas de productos cujo numero de factores vem diminuindo a partir do ultimo termo onde é igual ao numero dos factores multiplicados, até o primeiro que tem para coeﬃciente a unidade, seguindo assim uma marcha inversa a do expoente de x ; 4º que o coeﬃciente do 1º termo é igual a unidade o do 2º, que tem um termo antes de si e em que o expoente de x é menor de uma unidade que o numero dos factores, é igual a somma dos 2º termos dos binomios, ou ao numero de combinações dos 2º termos um a um; o do 3º termo, que tem dois antes, e cujo expoente de x é menor de duas unidades que o numero de factores, é igual ao numero de combinações dos 2º termos dois a dois; o do 4º termo é igual ao numero de combinações dos 2º termos 3 a 3, sendo 3 o numero de termos precedentes, e tambem a diﬀerença entre o expoente de x e o numero de factores binomios e, finalmente, o ultimo termo tem para coeﬃciente o producto dos segundos termos dos binomios multiplicados ou o numero de combinações destes 2º termos para uma taxa igual ao numero de factores multiplicados.

Se multiplicarmos seis, sete, oito etc, binomios acharemos resultados identicos, a lei será a mesma na formação dos productos, d'onde, por indução, podemos concluir que para um numero qualquer de binomios a lei é sempre a que acabamos de observar.

Obtida por indução, esta lei pode ser demonstrada directamente mostrando-se como suppondo-a verdadeira para um numero qualquer m de binomios ella será ainda a mesma para $m+1$.

Representando por C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 etc. respectivamente os numeros de combinações de m letras 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3 etc, a lei observada no producto

dos binomios terá como traducção algebraica a seguinte formula :

$$(x+a)(x+b)\dots(x+l) = x^m + C_1^m x^{m-1} + C_2^m x^{m-2} + \dots + C_m^m$$

tendo ella, $m+1$ termos.

Multiplicando esta formula por $x+k$, temos, para expressão do producto de $m+1$ binomios:

$$x^{m+1} + C_1^m x^m + C_2^m x^{m-1} + C_3^m x^{m-2} + \dots + C_m^m k$$

$$+k \quad | \quad \times C_1^m k \quad | \quad + C_2^m k$$

A inspecção deste producto nos mostra que nelle se realisa tudo quanto anteriormente observamos. O expoente de x no 1º termo é igual ao nº de factores multiplicados e vae diminuindo de uma unidade de termo a termo até o ultimo em que é zero; o coefficiente de um termo qualquer é igual ao numero de combinações dos segundos termos dos binomios multiplicados, combinados em numero igual ao dos termos que o precedem. Verificada, pois, a lei para m binomios ella verifica-se para $m+1$; donde conclue-se que obtida ella directamente para dois factores se verificará para tres; obtida para tres se verificará para quatro, e assim por diante para um numero qualquer de factores.

Substituindo na formula (1) C_1^m, C_2^m etc. pelas formulas correspondentes que nos dá a theoria das combinações, e fazendo nos binomios multiplicados;

$$a=b=c=\dots=l \text{ teremos:}$$

$$(x+a)^m = x^m + m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \dots + a^m \quad (2)$$

Tal é a formula geral denominada de binomio de Newton e que nos dá o desenvolvimento de uma potencia qualquer de um binomio. Basta uma sim-

ples inspecção para ver que ella reduz a elevação de um binomio $x+a$ a uma potencia qualquer á elevações a potencias dos monomios x e a , que o constituem, dispensando assim a formação das potencias anteriores do binomio dado. E' o preceito cartesiano da redução dos casos compostos em casos mais simples realisado de um modo admiravel pela lei de Newton.

Se fisermos nesta formula $m=1, 2, 3, 4...etc$, obteremos os desenvolvimentos do quadrado, cubo, quarta potencia etc. do binomio dado. Applicando esta lei de formação ao caso em que o segundo termo do binomio é negativo, é claro que no desenvolvimento todos termos affectos de potencias impares de a serão negativos e todos os termos affectos das potencias pares serão positivos. O desenvolvimento será então.

$$(x-a)^m = x^m - m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} - \dots \pm a^m$$

onde os termos são alternativamente positivos e negativos, até o ultimo que terá o signal mais ou menos conforme for a potencia m par ou impar.

A lei de Newton é geral e estende-se a um expoente qualquer. Convém notar, diz Comte a este respeito, o quanto o empirismo academico desvirtuou os melhores geometras do seculo XVIII, que inutilmente procuraram demonstrar uma tal extensão sem nada mais obter que transformar a difficuldade. Melhor inspirados, os geometras do seculo XVII a tinham espontaneamente admitido á medida que o aperfeiçoamento das formações algebricas instituia novas classes de expoentes.

O desenvolvimento (2) póde ainda tomar uma outra fórma em que os coefficients dos seus termos só dependam das permutações. Esta modificação tem a

vantagem de tornar mais facil de obter-se a lei do desenvolvimento das potencias dos polynomios, sempre reductiveis por contracções provisórias ao caso binominal.

Para obter a nova fórmula basta tomar a formula

$$C_n^m = \frac{P_m}{P_n \times P_{m-n}}$$

que nos dá a theoria das combinações e ahí fazer

$$n=1, 2, 3, 4 \text{ etc.}$$

Teremos assim :

$$C_1^m = \frac{P_m}{P_1 \times P_{m-1}} = m, \quad C_2^m = \frac{P_m}{P_2 \times P_{m-2}}, \quad C_3^m = \frac{P_m}{P_3 \times P_{m-3}}$$

Substituindo estes valores no desenvolvimento (2) teremos a formula :

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{P_m}{P_2 \times P_{m-2}} a^2 x^{m-2} + \frac{P_m}{P_3 \times P_{m-3}} a^3 x^{m-3} + \dots + a^m$$

onde os numeradores de todos os coefficients são os mesmos e igual ao numero de permutações correspondente ao gráo da potencia, e os denominadores o producto de permutações correspondentes aos exponents dos dois termos do binomio dado no termo considerado do desenvolvimento.

Estudemos alguns exemplos. Seja o binomio

$$a^3 x^2 + b^2 c^2 a^{\frac{1}{2}}$$

do qual se quer obter a quarta potencia.

Temos :

$$\begin{aligned} \left(a^3 x^2 + b^2 c^2 a^{\frac{1}{2}} \right)^4 &= (a^3 x^2)^4 + 4 \times (a^3 x^2)^{4-1} \times b^2 c^2 a^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{4(4-1)}{1.2} (a^3 x^2)^{4-2} \times \left(b^2 c^2 a^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3} (a^3x^2)^{4-3} \left(b^2c^2a^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$+ \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4} (a^3x^2)^{4-4} \left(b^2c^2a^{\frac{1}{2}} \right)^4$$

Como vemos a potencia binomial ficou reduzida, com a applicação da lei de Newton, á elevação dos

monomios a^3x^2 e $b^2c^2a^{\frac{1}{2}}$ ás 4^a, 3^a, e 2^a potencias, casos estes fundamentaes que dispensam para formação de uma potencia qualquer a determinação das potencias anteriores.

Effectuando as operações acima indicadas, temos:

$$\left(a^3x^2 + b^2c^2a^{\frac{1}{2}} \right)^4 = a^{12}x^8 + 4a^9x^6b^2c^2a^{\frac{1}{2}} + 6a^6x^4b^4c^4a$$

$$+ 4a^3x^2b^6c^6a^{\frac{1}{2}} + b^8c^8a^2$$

Se quizessemos applicar o desenvolvimento de Newton em formação das permutações, os coefficients para o nosso caso, seriam:

$$1, 4, \frac{1.2.3.4}{1.2 \times 1.2}, \frac{1.2.3.5}{1 \times 1.2.3}, \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}$$

Seja agora o binomio $\left(a^{\frac{1}{2}} + (b)^{\frac{1}{2}} \right)^3$. Applicando a lei, teremos:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + (b)^{\frac{1}{2}} \right)^3 = \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^3 + 3 \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^2 (b)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{3(3-1)}{1.2} \left(a^{\frac{1}{2}} \right) \left((b)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3} \left((b)^{\frac{1}{2}} \right)^3$$

Effectuando as operações, temos:

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + (b)^{\frac{1}{2}} \right)^3 = a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b + b^{\frac{3}{2}}$$

Por conseguinte por mais complicada que seja a expressão monomia de cada um dos termos do binomio dado, a lei é sempre a mesma. Como vemos, o conhecimento da lei obtida pelo estudo directo dos productos de dois, tres, quatro, etc., binomios iguaes, nos dispensa, para constituir uma potencia qualquer, todas as multiplicações que teriamos de fazer, caso não a conhecessemos, para chegar á potencia considerada, reduzindo o caso binomio ao caso monomio fundamental, ou por outra, decompondo o caso complexo em casos simples, segundo o preceito cartesiano.

Estes exemplos são sufficientes para não deixar duvida no modo por que se deve applicar a lei do eminente geometra inglez.

Antes de passarmos a considerar o caso em que a expressão dada é um polynomio estudemos o desenvolvimento de Newton.

Considerando um termo T, que se suppõe ter n termos precedentes, segundo a lei de formação do desenvolvimento, a sua formula será :

$$T = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} a^n x^{m-n} \quad (3)$$

A esta expressão dá-se o nome de *termo geral*, por que d'ella se póde deduzir, particularizando n, um termo qualquer sem necessidade de conhecer os termos precedentes. Este termo geral representa, pode-se dizer, a traducção algebrica, synthetica da lei do desenvolvimento. Convem fazer a distincção logica entre o desenvolvimento de uma formação ou função e a lei que o rege.

O desenvolvimento apresenta uma serie de termos diversos, mas estes estudados no modo por que se derivam uns dos outros, no modo por que se succe-

dem, nos deixam vêr que sob essa variedade existe no desenvolvimento um modo constante de relação, segundo o qual se constituem os seus elementos. Este modo de relação é a lei, e o termo geral a sua traducção algebraica. O mesmo acontece nos factos correctos,

Quando um corpo cahe, este phenomeno nos apresenta differentes espaços percorridos, differentes tempos; mas por entre esta variação do espaço e do tempo ha um modo constante de dependencia que os relaciona e que constitue a lei. Esta lei mathematicamente traduzida é representada por uma equação, que a exprime concisamente, e da qual é possível por particularisações numericas dos symbolos geraes que a constituem, deduzir differentes valores particulares para os elementos concretos relativos ao facto de onde ella emanou. Esta equação representa em relação ao phenomeno da quêda, o mesmo papel que representa no dominio puramente abstracto o termo geral para com o desenvolvimento do binomio.

Fazendo-se na formula (3) $n=m$, $n=m-1$, $n=m-2$, etc. obteremos para ultimo, penultimo, antepenultimo termos etc.

$$a^m, ma^{m-1}x, \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3 \text{ etc.}$$

O que nos mostra que os termos igualmente afastados dos extremos têm o mesmo coefficiente. Isto pode-se ainda verificar notando que o penultimo termo tendo $m-1$ termos precedentes o seu coefficiente representa o numero de combinações de m letras $m-1$ a $m-1$; o segundo termo tendo 1 antes de si tem para coefficiente o numero de combinações de m letras 1 a 1 . Ora, segundo a theoria das combinações, o numero de combinações de m letras

$m-1$ a $m-1$ é igual ao numero de combinações de m letras 1 a 1

Identico raciocinio applica se a todos os outros termos igualmente afastados dos extremos.

Vejamos agora como do termo geral podemos deduzir a lei segundo a qual um termo se forma do precedente.

Sendo o termo de ordem n : $T_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} a^n x^{m-n}$; o termo de ordem $n+1$ será

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{1.2.3\dots n \times (n+1)} a^{n+1} x^{m-n-1} = C_n^m \frac{m-n}{n+1} a x^{m-n-1}$$

o que nos mostra que um termo qualquer obtem-se do precedente multiplicando o coefficiente deste pelo expoente de x , dividindo o producto pelo numero que marca a ordem deste termo, augmentando de uma unidade o expoente de a e diminuindo o de x tambem de uma unidade.

Fazendo em (2) $x=a=1$ temos : $2^m = 1 + m +$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} + \dots$$

A somma, pois, de todos os coefficientes dos termos do desenvolvimento é igual a uma potencia de 2 de gráo igual ao da potencia a que se eleva o binomio.

Fazendo-se $x=1, a=-1$ temos :

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \dots + m - 1$$

O que nos mostra que a somma dos coefficientes de ordem impar é igual a somma dos coefficientes de ordem par.

Dividindo os coefficientes, C_n^m e C_{n+1}^m dos ter-

mos T_n e T_{n+1} de ordem n e $n+1$ temos $\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{m-n}{n+1}$, sendo R_{n+1} e R_n os coefficients.

Donde $R_{n+1} = \frac{m-n}{n+1} R_n$. A fracção $\frac{m-n}{n+1}$ sendo maior que a unidade para pequenos valores de n , é claro que para estes valores R_{n+1} será maior que R_n ; do que conclue-se que os coefficients no desenvolvimento vão augmentando. O limite deste crescimento apresenta-se quando fôr o valor da fracção igual ou menor que a unidade. A ordem do termo de maior coefficiente é, pois, igual ao menor valor de n que torna a fracção $\frac{m-n}{n+1}$ igual ou menor que a unidade, ou ao valor de n que torna $n+1$ igual ou maior que $\frac{m+1}{2}$. Algebricamente isto traduz-se do seguinte modo: $\frac{m-n}{n+1} = 1 - b$, sendo b uma indeterminada. D'esta igualdade tira-se facilmente:

$n+1 = \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}(bn+b)$; sendo o caso de igualdade entre $n+1$ e $\frac{m+1}{2}$ obtido suppondo-se $\frac{1}{2}(bn \times b) = 0$.

Se m é impar o numero de termos do desenvolvimento é par e a ordem do termo de maior coefficiente é: $n+1 = \frac{m+1}{2}$ (a) Neste caso ha dois termos medios cujos coefficients são os maiores, pois da igualdade (a) tira-se $\frac{m-n}{n+1} = 1$, donde $R_n^m = R_{n+1}^m$.

Se m é par o numero de termos é impar e a ordem do termo de maior coefficiente, que é o termo central, será:

$$p+1 = \frac{m}{2} + 1.$$

Procuremos, finalmente, qual a relação entre os coeficientes de uma potencia de um binomio e os coeficientes da potencia immediatamente superior.

Multiplicando (1) por $(x+a)$ temos:

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (m+1)ax^m + (C_2+m)a^2x^{m-1} + \dots + a^{m+1}$$

Formula que nos mostra, que o coefficiente de um termo qualquer do desenvolvimento da potencia $m+1$ de um binomio é igual ao coefficiente do termo da mesma ordem no desenvolvimento da potencia m do mesmo binomio, somado ao coefficiente do termo que o procede neste desenvolvimento. Esta relação traduz-se pela formula: $C_n^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m$, representando C as combinações.

Assim apreciado no que de mais interessante e util apresenta o desenvolvimento newtoniano, nós vamos abordar o caso complexo em que a expressão cuja potencia se tem de desenvolver é um polynomio. Este caso não exige uma solução directa, pois, com o emprego de contracções provisórias nos é sempre possível reduzi-lo ao caso binomial já estudado.

Supponhamos que se pede o desenvolvimento do quadrado de $c+b+a$.

Fazendo $x=b+a$, temos $(c+b+a)^2 = (c+x)^2 = c^2 + 2cx + x^2$. Substituindo x por seu valor temos: $(c+b+a)^2 = c^2 + 2c(b+a) + (b+a)^2$, expressão onde a questão está directamente reduzida ao caso de elevação de um binomio ao quadrado.

No caso do quaternomio teríamos $(a+b+c+d)^2 = (x+d)^2 = x^2 + 2xd + d^2$, sendo $x=a+b+c$.

Substituindo x por seu valor temos: $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2d(a+b+c) + d^2$.

Está assim a questão reduzida ao caso do trinomio,

que, como anteriormente, por uma nova contracção seria reduzido ao caso binomio. Do mesmo modo procederíamos para os casos mais complexos.

Se tivéssemos, por exemplo, um polynomio de oito termos, a primeira contracção reduziria a questão ao quadrado de um binomio cujo segundo termo seria o ultimo termo do polynomio dado, e o primeiro seria a contracção dos sete termos restantes. A questão ficava assim, substituindo depois de desenvolvido o quadrado a contracção pela sua expressão, reduzida a um polynomio de sete termos. Uma nova contracção reduziria este caso ao de um binomio cujo primeiro termo seria os seis primeiros termos da expressão dada, e o segundo o setimo da mesma expressão. Esta contracção passaria a questão para um polynomio de seis termos. Continuado do mesmo modo chegaríamos a final ao caso trinomio que immediatamente seria reduzido por uma nova contracção ao caso binomio.

Este modo de reducção como vê-se nada importa com o gráo da potencia; de modo que tanto applica-se ao quadrado como ao cubo, quarta potencia etc. Supponhamos, pois, uma potencia m qualquer do trimonio $a+b+c$. Fazendo $a+b=x$, temos:

$$(x+c)^m = x^m + mcx^{m-1} + \dots + c^m, \text{ substituindo } x;$$

$$(a+b+c)^m = (b+a)^m + mc(b+a)^{m-1} + \dots + c^m$$

No caso do polynomio $a+b+c+\dots+p+q$ de n termos teríamos, fazendo $x=a+b+\dots+p$:

$$(x+q)^m = x^m + mqx^{m-1} + \dots + q^m; \text{ substituindo } x;$$

$$(a+b+\dots+p+q)^m = (a+b+\dots+p)^m + m(a+b+\dots+p)^{m-1}q + \dots + q^m$$

Uma nova contracção reduziria este caso ao de um polynomio de $n-2$ termos; uma outra passaria

deste ao de um de $n-3$ e assim continuando, por contracções provisórias chegaríamos, como estado final, ao ultimo caso binomio que resolveria a questão. A elevação de um polynomio a uma potencia qualquer fica assim consistindo em um maior ou menor numero de desenvolvimentos da potencia de um binomio, unico caso directamente tratado pela lei de Newton.

Resta-nos agora resolver as duas questões: determinação do termo geral e do numero de termos do desenvolvimento.

Seja $a+b+c+d+\dots$ o polynomio dado e m a potencia considerada.

Fazendo-se: $x=b+c+\dots$ temos $(a+b+c+\dots)^m = (a+x)^m$. No desenvolvimento deste binomio o termo geral é da fórma (1) $C a^{m-n} x^n$, sendo $C = \frac{P_m}{P_n \times P_{m-n}}$ substituindo em (1) x por seu valor temos:

$C a^{m-n} (b+c+\dots)^n$. Fazendo a contração $y=c+d+\dots$ temos: $(b+c+\dots)^n = (b+y)^n$.

No desenvolvimento de $(b+y)^n$ o termo geral é da fórma: $C_1 b^{n-p} y^p$, sendo

$$C_1 = \frac{P_n}{P_p \times P_{n-p}}$$

Substituindo em (1) x^n por este termo geral que representa o seu desenvolvimento teríamos, para termo geral do desenvolvimento $(a+b+\dots)^m$, o seguinte (2)

$$C C_1 a^{m-n} b^{n-p} y^p$$

caso y fosse um termo monomio.

Mas como y tem para expressão $c+d+\dots$ nós devemos por uma nova contracção reduzir a po-

tencia p deste polynomio ao caso binomio. Fazendo, pois, $z=d+e+\dots$ temos $y^p=(c+d+\dots)^p=(c+z)^p$. O termo geral do desenvolvimento de $(c+z)^p$ terá a fórma $C_2 c^{p-q} z^q$, sendo :

$$C_2 = \frac{P_p}{P_q \times P_{p-q}}$$

Substituindo em (2) y^p por este termo geral correspondente ao seu desenvolvimento teriamos para expressão do termo geral de $(a+b+c+\dots)^m$

$$CC_1 C_2 a^{m-n} b^{m-p} c^{p-q} z^q \quad (3)$$

no caso de ser z uma expressão monomia. Suponhamos que isto se verifica. Teremos neste caso $z=1$ e substituindo em (3) C, C_1, C_2 por seus valores teremos para expressão do termo geral do desenvolvimento de $(a+b+c+d)^m$ a seguinte formula :

$$T = \frac{1.2.3\dots m}{1.2.3(m-n) \times 1.2.(n-p) \times 1.2\dots(p-q) \times 1.2\dots q} a^{m-n} b^{n-p} c^{p-q} d^q$$

de cuja constituição é facil concluir qual a expressão do termo geral de um polynomio de um numero qualquer de termos.

Esta formula nos mostra que os expoentes das constantes a, b, c e d , têm uma somma igual ao gráu da potencia, e o coefferente do termo tem para ao gráu da potencia, e para denominador o producto dos numeros de permutações correspondentes aos expoentes das constantes.

Considerando, pois, a potencia m de um polynomio $(a+b+c+\dots)$ a expressão do termo geral seria da fórma :

$$T = \frac{1.2.3\dots\dots\dots m.}{1.2\dots n \times 1.2\dots p \times 1.2\dots q \times 1.2\dots r\dots} a^n b^p c^q d^r \dots (1)$$

Satisfazendo os expoentes $n, p, q, \text{ etc.}$, a condição $n+p+q+\dots=m$.

A segunda questão, isto é, a determinação da formula que nos dá o numero de termos do desenvolvimento, é facilmente resolvida recorrendo-se ao problema arithmetico das repartições.

Suppondo que os expoentes n, p, q, r etc., são em numero n , é claro que a equação $p + \dots = m$, a que têm de satisfazer os diferentes valores inteiros e positivos que devem ser substituidos na expressão do termo geral, traduz a repartição de m em n partes, correspondentes aos valores dos n expoentes p, q , etc., que a satisfazem. E como a cada systema de valores d'estes expoentes, corresponde um termo do desenvolvimento $(a+b+\dots)^m$, uma vez que elles satisfaçam á equação de condição, a questão da determinação do numero de termos reduz-se a determinação da formula que nos dá o numero de repartições de m entre n partes.

Esta formula é seguinte :

$$R_n^m = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)}$$

a qual nos dá o numero de termos do desenvolvimento $(a+b+c+\dots)^m$, indicando o indice n o numero de termos do polynomio $a+b+c+\dots$ etc.

Querendo, por exemplo, o numero de termos dos desenvolvimentos $[a+b]^m$, $[a+b+c]^m$, $[a+b+c+d]^m$ etc., temos de fazer nesta formula n successivamente igual a 2, 3, 4, etc. O que nos dará as expressões :

$$R_2^m = m+1, \quad R_3^m = \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}, \quad R_4^m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Particularisando nestas formulas o expoente m temos o numero de termos do quadrado, cubo, quarta potencia etc. de um binomio, de um trinomio etc.

Tal é a lei de Newton e o alcance de sua applicação ao calculo das potencias. Ella nos apresenta, como vemos, a solução completa e racional da questão. A generalisação algebraica permittindo aos expoentes o poderem obter um valor qualquer, largos horisontes traçou á immorredoura descoberta do unico dos grandes geometras, como observa Comte, que não desdenhou cooperar na elaboração philosophica dos rudimentos mathematicos. Além do importante facto philosophico que ella realisa da reduçãõ do caso binomio ao caso mais simples, fundamental, monomio, ella consegue o resultado não menos valioso de unificar o dominio abstracto ligando o estudo das potencias ao estudo das raizes, caracterisado pelas potencias fraccionarias.

Antes de Newton, Viète e Stevin, seu discipulo, forão os que de mais perto tocaram a descoberta da lei binomial; Viète chegou até o desenvolvimento da 6ª potencia e Stevin foi alem: apreciou o producto de binomios tendo os segundos termos differentes e os primeiros iguaes.

A lei do desenvolvimento de uma potencia qualquer, porém, não foi determinada, porque elle não teve a inspiração, mais tarde realisada por Newton, de introduzir a modificação que devia permittir deduzil-a tornando iguaes os segundos termos dos binomios multiplicados, para depois estudar a lei que rege o desenvolvimento, após esta modificação.

Newton effectuou os differentes productos de binomios com os segundos termos designaes; obtido isto, suppoz iguaes estes segundos termos, e notando que os desenvolvimentos depois de passarem pela modificação a esta correspondente, seguiam uma mesma lei, no caso de dois, tres, quatro, cinco fac-

tores, concluiu por legitima inducção a lei geral para um producto de um numero qualquer de factores iguaes. Este é o verdadeiro methodo de indagação. Quando a observação do facto tal como elle é obtido ou se manifesta, não nos desvenda a lei que o rege, procura-se levar-lhe uma modificação, afim de vêr se sob o novo aspecto a lei torna-se patente.

A lei binomial para ser descoberta em productos de factores iguaes, se não era impossivel, certamente era mais difficil, pois que as reduções nos productos, de certa forma a mascaravam. Reconhecendo isto, Newton, a exemplo de Stevin, introduzio ligeira modificação, tornando desiguaes os segundos termos dos binomios factores. Obtidos e estudados os desenvolvimentos neste segundo estado, só restava passar ao facto primitivo tornando os segundos termos iguaes, e foi exactamente o que fez o eminente mathematico inglez.

« As leis geraes, diz Laplace, manifestam-se em todos os casos particulares: mas ahi ellas acham-se complicadas por tantas circumstancias estranhas, que muitas vezes é necessario a maior perspicacia para as poder apanhar. E' preciso escolher ou produzir os phenomenos os mais proprios para isso, multiplical-os, para variar as circumstancias, e observar o que elles apresentam de commum. Por esta fórma nos elevamos successivamente á relações de mais a mais latas, e chegamos finalmente as leis geraes que verificamos por provas ou experiencias directas, quando isto é possivel, ou examinado se ellas satisfazem a todos os phenomenos conhecidos.

« Tal é o methodo mais seguro que nos possa guiar na indagação da verdade. Nenhum philosopho

foi como Newton mais fiel a este methodo : elle o conduziu a suas descobertas na analyse, como tambem o levou a descobrir o principio da gravitação universal e as propriedades da luz. » (1)

II

Apreciada a lei por que se desenvolvem as diferentes potencias das expressões algebricas, nós passamos a considerar a extracção das raizes, transformação inversa a que deixamos estudada, e que tem por fim dado o desenvolvimento de uma potencia qualquer de uma expressão determinar a expressão primitiva que o originou.

Antes de tratar desta questão relativamente as expressões algebricas convém mostrar o quanto o theorema de Newton é eminentemente proprio a generalizar a extracção das raizes dos numeros, apenas apreciada no calculo dos valores para o caso verdadeiramente usual das raizes quadradas.

Comecemos pelo mais simples dos casos complexos.

Todo numero de dois algarismos póde ser sempre decomposto em uma somma de duas parcellas, sendo uma representada pelo numero de dezenas e a outra pelo numero de unidades. Representando o primeiro numero por a e o segundo por b nós podemos dar ao numero considerado a fórmula binomia $a + b$, e as suas potencias quaesquer poderão com facilidade ser obtidas pela lei de Newton.

Desde então a determinação da regra de extracção de raiz é obtida desenvolvendo-se a potencia correspondente ; estudando-se o desenvolvimento que resulta e fixando as transformações a effectuar para

(1) Laplace—Système du Monde—pag. 337.

passar do desenvolvimento ou da potencia dada ao numero primitivo ou raiz que o originou.

Seja em primeiro logar o caso simples da raiz quadrada tendo a raiz só dois algarismos, 68, por exemplo.

Fazendo a decomposição binaria e desenvolvendo segundo a lei Newton, temos :

$$(60+8)^2=(60)^2+2(60\times 8)+(8)^2=3600+960+64=4624$$

O quadrado, como vemos, compõe-se de tres partes: o quadrado das dezenas, o dobro das dezenas pelas unidades e o quadrado das unidades.

O desenvolvimento nos mostra:

1.º, que o quadrado das dezenas 3600 não contém nenhum algarismo significativo de ordem inferior as centenas, e que por conseguinte, para a determinação das dezenas podem ser separados os dois primeiros algarismos do quadrado dado, que se supõe ser 4624.

2.º, que o dobro das dezenas pelas unidades 960 não contém nenhum algarismo significativo de ordem inferior as dezenas e por conseguinte que no numero que o representa póde-se separar o algarismo das unidades ou o primeiro algarismo a direita. Nós vemos, ainda que as dezenas da raiz 68 obtem-se extrahindo a raiz quadrada do quadrado das dezenas $(60)^2$; e como já sabemos que este quadrado só póde estar contido nas unidades de ordem superior as dezenas a questão reduz-se a procurar o maior quadrado contido em 4600 e extrahir a raiz quadrada deste quadrado, a qual representará as dezenas da raiz. Obtem-se assim 6 para algarismo das dezenas. Elevando este numero ao quadrado e subtrahindo de 4624 temos o resto 1024 que con-

terá o dobro das dezenas pelas unidades e o quadrado das unidades, achando-se a primeira parte isto é, o dobro das dezenas pelas unidades contido em 1020, pois, como vimos o numero que o representa não contém unidades de ordem inferior ás dezenas.

Para determinar, pois, as unidades da raiz basta separar o algarismo 4 do resto 1024 e dividir o numero restante a esquerda pelo dobro das seis dezenas já obtidas, o quociente representará as unidades procuradas.

Consideremos o caso mais complexo em que a raiz tem tres algarismos. Seja o numero 423 a raiz pedida. A decomposição deste numero póde ser feita em centenas, dezenas e unidades, que assim reparadas nos darão para expressão do quadrado. $(400 + 20 + 3)^2$. Fazendo a contracção $400 + 20 = c$, e des- envolvendo pela lei de Newton temos :

$$\begin{aligned} (c+3)^2 &= c^2 + 2 \times 3c + 3^2 = (400+20)^2 + 2 \times 3 \\ (400+20)+3^2 &= (400)^2 + 2(400 \times 20) + (20)^2 + \\ + 2 \times 3(400+20) + 3^2 &= 160000 + 16000 + 400 + \\ &+ 2520 + 9 \end{aligned}$$

Este desenvolvimento se compõe do quadrado das centenas, do dobro das centenas pelas dezenas, do quadrado das dezenas, do dobro das unidades pela somma das centenas e dezenas e do quadrado das unidades. Extrahindo a raiz quadrada de 160000 ou de 16, que corresponde a um numero simples, o numero correspondente será as centenas da raiz. Elevando este numero ao quadrado e subtrahindo do desenvolvimento, temos o resto $2(400 \times 20) + (20)^2 +$ etc. cujo primeiro termo representa o dobro das centenas pelas dezenas. Para obter-se as dezenas da raiz

divide-se o primeiro termo deste resto pelo dobro das centenas já obtidas e o quociente multiplicado por si mesmo e pelo dobro das centenas e subtraído do desenvolvimento o reduzirá aos dois termos :

$$2 \times 3(400 + 20) + 3^2$$

o primeiro dos quaes representa o dobro das unidades pelas centenas e dezenas. Para obter-se as unidades da raiz divide-se o primeiro termo deste resto pelo dobro das centenas e dezenas já determinadas e o quociente multiplicado por este dobro e por si mesmo e subtraído do resto $2(400 + 20) \times 3 + 3^2$, deve dar um resultado nullo caso a potencia seja exacta.

Isto é o que nos indica o estudo do desenvolvimento pela lei de Newton. Supponhâmos agora que o numero dado é 178929 que é o quadrado de 423. O primeiro termo 160000 do nosso desenvolvimento nos indica que o quadrado das centenas não tem algarismo algum significativo de ordem inferior aos milhares, e que, portanto, para obter as centenas da raiz do numero dado pôde-se separar os quatro primeiros algarismos. Procura-se o maior quadrado contido em 17 o que nos dá 16, como indica o primeiro termo do desenvolvimento, extrah-se a raiz quadrada, e esta será o algarismo das centenas da raiz; eleva-se este numero ao quadrado e subtrahe-se do numero dado, o resto conterà o dobro das centenas pelas dezenas o quadrado das dezenas etc.

As dezenas da raiz obtêm-se separando neste resto o algarismo das unidades e dividindo o numero que ficar a esquerda pelo dobro das centenas achadas e assim por diante procedendo para com o numero de um modo identico ao acima indicado para com o desenvolvimento.

Para as raizes de 4, 5, 6, etc. algarismos, os racio-

cinios seriam perfeitamente semelhantes ao que deixámos feito, e as operações seriam identicas apenas variando a grandeza de elementos numericos e o numero de operações.

Fica por este modo a extracção da raiz quadrada de um numero qualquer reduzida a um unico caso fundamental da extracção da raiz quadrada de um numero de dois algarismos, a qual é feita pelo processo espontaneo, apreciado na arithmetica, e a una séria de divisões que será mais ou menos longa conforme fôr maior ou menor o numero de algarismos do numero dado.

Passemos á raiz cubica.

Vejámos o caso complexo mais simples em que a raiz só tem dois algarismos. Seja 14 a raiz considerada.

Effectuando a decomposição binaria e desenvolvendo o cubo segundo a lei de Newton.

Temos :

$$(10+4)^3=(10)^3+3(10)^24+3(4)^210+4^3=1000+1200+480+64$$

Este desenvolvimento compõe-se do cubo das dezenas, mais o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo do quadrado das unidades pelas dezenas mais o cubo das unidades.

Extrahindo a raiz cubica do cubo das dezenas $(10)^3$, nós obtemos o algarismo das dezenas da raiz procurada. o qual elevado ao cubo e subtrahido do desenvolvimento nos dá o resto :

$$3(10)^24+3(4)^210+(4)^3.$$

O primeiro termo deste resto sendo o producto do triplo do quadrado das dezenas pelas unidades, para obter estas, divide-se o primeiro termo do resto pelo triplo do quadrado das dezenas fornecido pelo pri-

meiro termo do desenvolvimento, e o algarismo obtido será as unidades da raiz, que unidas as dezenas já achadas, deve dar um numero cujo cubo seja igual ao numero dado, caso este seja um cubo perfeito.

Isto quanto ao desenvolvimento onde cada parte componente da potencia acha-se destacada. Supponhâmos agora que se pede a raiz cubica de 2744, cubo de 14.

Para obter as dezenas da raiz, segundo as indicações emannadas do estudo do desenvolvimento nós temos de extrahir a raiz cubica do cubo das dezenas, e como o termo 1000 do desenvolvimento correspondente a este cubo, nos indica que o numero que o representa não tem nenhum algarismo significativo de ordem inferior aos milhares, na indagação das dezenas nós podemos separar os tres primeiros algarismos á direita do numero dado. Procura-se então o maior cubo contido em 2 e a sua raiz cubica, obtida pelo processo espontaneo, representará as dezenas da raiz procurada.

Elevando este numero ao cubo e subtrahindo do numero dado temos o resto 1744. N'este resto o desenvolvimento nos indica que se deve achar o triplo do quadrado das dezenas pelas unidades e que o numero que representa este producto que no desenvolvimento vem a ser 1200, não contém nenhum algarismo significativo de ordem inferior ás centenas.

Para obter, pois, as unidades da raiz, separam-se os dois primeiros algarismos á direita do resto 1744 e o numero restante á esquerda divide-se pelo triplo do quadrado das dezenas obtidas, o quociente representará as unidades da raiz.

Vejamos o caso mais complexo em que a raiz tem tres algarismos.

Seja 222 a raiz pedida. Fazendo a decomposição ternaria e reduzindo pela contracção $(200+20)=c$, este caso ao caso binario, temos, desenvolvendo pela lei de Newton :

$$\begin{aligned} (200+20+2)^3 &= (c+2)^3 = c^3 + 3c^2 \times 2 + 3c \times (2)^2 + (2)^3 \\ &= (200+20)^3 + 3(200+20)^2 \times 2 + 3(200+20) \times 4 + 8 = (200)^3 \\ &\quad + 3(200)^2 \times 20 + 3(200)(20^2 + (20)^3) + 3(200)^2 \times 2 + 3 \times 2 \\ &\quad (200 \times 20) \times 2 + 3(20)^2 \times 2 + 3(200+20) \times 4 + 8 = 8000000 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Observando este desenvolvimento nos vemos que para obter as centenas da raiz procurada, tem-se de extrahir a raiz cubica do cubo das centenas $(200)^3$, e como este cubo, que é 8000000, não contém nenhum algarismo significantivo de ordem inferior aos milhões nós podemos, quando tivermos a considerar o numero dado ou o cubo de 222 para determinar as centenas da raiz, separar os seis primeiros algarismos, sendo os tres primeiros tambem separados pela consideração de que em todos os termos productos das centenas e dezenas não existe nenhum algarismo significantivo de ordem inferior as centenas.

Fica assim o numero dado dividido em classes de tres algarismos da direita para á esquerda, podendo a ultima classe á esquerda conter tres, dois ou um algarismo. Obtidas as centenas da raiz pela extracção da raiz cubica do maior cubo contido na primeira classe á esquerda, si as elevarmos ao cubo e subtrahirmos o resultado do numero considerado o resto conterà o triplo do quadrado das centenas pelas dezenas e outros termos. Para obter as dezenas separam-se os dois primeiros algarismos deste resto e

divide-se o numero a esquerda pelo triplo do quadrado das centenas achadas, o quociente representará as dezenas da raiz. Elevando as centenas e dezenas ao cubo ou elevando o binomio $(200+20)$ e subtrahindo do desenvolvimento este ficaria reduzido a

$$3(200+20)^2 \times 2 + \text{etc.},$$

onde o primeiro termo representa o triplo do quadrado das centenas e dezenas pela unidades 2. Considerando o numero dado ou o cubo de 222, em logar do desenvolvimento, a questão consiste em elevar $200+20$ ou 220 ao cubo e subtrahir do numero considerado. O resto, como nos mostra o desenvolvimento, deve conter além de outros termos o triplo do quadrado das centenas e dezenas pelas unidades; e como este producto não contem nenhum algarismo significativo de ordem inferior ás dezenas, para obter as unidades da raiz, separam-se no resto obtido pela subtracção do cubo das centenas e dezenas do numero dado, os dois primeiros algarismos á direita, e o numero restante divide-se pelo triplo do quadrado da raiz achada. Obtidas as unidades da raiz esta elevada ao cubo e subtrahida do numero dado deve dar um resultado nullo caso este numero seja um cubo perfeito.

Identicó raciocinio nos levaria a generalisar a mesma regra aos casos mais complexos em que a raiz procurada tem 4, 5, etc. algarismos, nos quaes a lei de Newton reduziria sempre, por meio de contracções, o desenvolvimento do cubo correspondente ao caso do cubo de um binomio.

O estudo, pois, do desenvolvimento do cubo de um numero qualquer pela lei do binomio, nos permite assim formular uma regra geral para extrahir a raiz cubica, operação sempre reduzida a um unico caso

fundamental de extracção da raiz cubica de um numero de um, dois, ou tres algarismos, obtida pelo processo espontaneo, correspondente ao caso em que a raiz só tem um algarismo, e a uma serie de divisões que serão tanto mais numerosas quanto maior fôr o numero de algarismos do numero dado.

Consideremos agora a raiz quarta. Supponhamos que a raiz procurada é 11 cuja quarta potencia 14641 é dada. A questão, como nos casos anteriores, é a seguinte: dado o numero 14641 quer se obter o numero 11 que elevado a quarta potencia o determinou. Para chegar á regra por que isto se obtem nós, identicamente ao que já fizemos para as raizes quadrada e cubica, supponmos a raiz 11 conhecida, desenvolvemos pela lei de Newton a sua quarta potencia, e do estudo do desenvolvimento que resultar concluiremos o modo systematico por que se pôde passar da potencia para a raiz correspondente.

Fazendo a decomposição binaria da raiz e desenvolvendo a quarta potencia, temos:

$$(10+1)^4 = (10)^4 + 4(10)^3 \times 1 + \frac{4(4-1)}{1.2.} (10)^2 (1)^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{2.3.} (10)(1)^3 + (1)^4 = 10000 + 4000 + \text{etc.} \quad (1)$$

Este desenvolvimento nos mostra que para obter as dezenas da raiz, tem-se de extrahir a raiz quarta da potencia quarta das dezenas comprehendidas no numero dado; e como o numero 10000 que representa esta potencia não contém nenhum algarismo significativo de ordem inferior ás dezenas de milhar, nós para obtermos as dezenas da raiz, podemos separar no numero dado 14641, os quatro primeiros algarismos.

Extrahindo a raiz quarta da maior potencia quarta contida nos algarismos restantes á esquerda, o nu-

mero que resultar será as dezenas da raiz, o qual elevado á quarta potencia e subtrahido do numero dado nos dará um resto, contendo como mostra o desenvolvimento (1) o quadruplo do cubo das dezenas pelas unidades.

Como o numero 4000, que representa este producto não contém nenhum algarismo significativo de ordem inferior aos milhares, separa-se os tres primeiros algarismos do resto obtido e divide-se este pelo quadrupulo do cubo das dezenas achadas, o quociente será as unidades da raiz procurada.

Para raizes de maior numero de algarismos o modo de indagação da regra seria identico. Para passar, pois da potencia quarta de um numero á raiz correspondente, divide-se o numero potencia em classes de quatro algarismos da direita para a esquerda; procura-se a maior quarta potencia contida na primeira classe á esquerda e a sua raiz quarta será o primeiro algarismo da raiz procurada; eleva-se este numero á quarta potencia e subtrahc-se do numero dado; divide-se o resto pelo quadruplo do cubo da raiz achada, tendo antes separado nesse resto os tres primeiros algarismos á direita, o quociente será o segundo algarismo da raiz, e assim por diante, estabelecendo uniformemente uma serie de divisões em que os dividendos são os restos obtidos nas subtracções e os divisores respectivamente o quadruplo do cubo da raiz anteriormente obtida.

Temos assim reduzido a extracção da raiz quarta de um numero qualquer á extracção da raiz quarta de um numero de um, dois, tres ou quatro algarismos, o que corresponde ao caso da raiz de um só algarismo, e é feito pelo modo espontaneo, e a uma

serie de divisões que serão em tanto maior numero quanto mais algarismos contiver o numero dado.

Subordinando, pois, a extracção das raizes numericas á lei de Newton, nós podemos, pelo estudo que deixamos feito, formular a regra gèral para extrahir uma raiz qualquer de um numero.

Supponhâmos m o numero dado de que se quer obter a raiz n , sendo n um numero inteiro qualquer positivo. Divide-se m em classe de n algarismos da direita para a esquerda, procura-se a maior potencia n contida na primeira classe á esquerda, e a sua raiz n será o primeiro algarismo da raiz procurada; eleva-se este algarismo á potencia n e subtrae-se de m ; no resto separa-se os $n-1$ primeiro algarismo á direita e o numero restante á esquerda divide-se por n vezes a potencia $n-1$ da raiz achada, o quociente será o segundo algarismo da raiz; eleva-se a raiz achada a potencia n e subtrahe-se de m , no resto separa-se os $n-1$ algarismos á direita e o numero restante á esquerda divide-se por n vezes a $n-1$ potencia da raiz achada, o quociente será o terceiro algarismo da raiz e assim por diante.

A questão, pois, da extracção de uma raiz qualquer de um numero reduz-se sempre a um unico caso fundamental, em que a raiz só tem um algarismo, e a uma série de divisões.

Uma simples apreciação do conjuncto de operações uniformes que constituem os processos de extracção de raiz, basta para nos fazer ver immediatamente o augmento crescente de trabalho quando cresce o indice da raiz ou o numero de algarismo do numero dado ou os dois conjunctamente.

Para tornar isto evidente basta-nos apreciar a raiz cubica.

Suppondo, por exemplo, 3 o primeiro algarismo da raiz, o divisor da primeira divisão será 27; sendo 4 o segundo algarismo da raiz, o divisor da segunda divisão será 3468; sendo 5 o terceiro algarismo da raiz, o divisor da terceira divisão será 348075, e assim por diante.

Este accrescimo de difficuldade para as divisões como já nos deixa ver a raiz cubica, torna-se muito mais rapido quando se passa ás raizes superiores.

Tal foi a difficuldade essencial que determinou a necessidade da instituição dos logarithmos para simplificar os calculos numericos.

Apreciada assim a reacção da algebra sobre a arithmetica, caracterisada pela generalisação que permite a lei binominal instituir no calculo dos valores, nós passamos a considerar as raizes algebricas.

Comecemos pelo caso mais simples da raiz quadrada de um monomio.

Para se elevar um monomio a uma potencia qualquer, eleva-se o coefferente a esta potencia e multiplica-se o expoente de cada letra que o compõe pelo gráo da potencia. Sendo as raizes representadas por potencias fraccionarias. é claro que a extracção da raiz quadrada não é mais que a elevação a potencia $\frac{1}{2}$, e, portanto, a transformação consiste em extrahir a raiz quadrada do coefferente numerico e dividir o expoente de cada letra por dois. Se quizermos, por exemplo, extrahir a raiz quadrada de $49a^3b^2c^5$, temos de extrahir a raiz quadrada de 49 e dividir por dois os expoentes 3, 2, 5, o que nos dá para expressão da raiz, $7a^{\frac{3}{2}}bc^{\frac{5}{2}}$.

Esta substituição do signal radical pelo expoente fraccionario tem a grande vantagem de mostrar o contraste entre a elevação á potencia e a extracção das raizes algebricas pelo contraste entre a multiplicação e a divisão. Assim é que para elevar $7a^{\frac{3}{2}}bc^{\frac{5}{2}}$ ao quadrado, eleva-se o coefficiente ao quadrado e multiplica-se os expoentes das letras por 2; para extrahir a raiz quadrada de $49a^3b^2c^5$ extrahe-se a raiz quadrada de 49 e divide-se os expoentes das letras por 2.

Estudado este caso fundamental para resolver os casos mais complicados basta-nos, segundo o preceito cartesiano, procurar reduzir todos os casos complexos a um maior ou menor numero deste caso simples.

Consideremos dos casos complexos o mais simples em que se procura a raiz quadrada de um trinomio. cuja raiz supõe-se ser o binomio $x+a$. Desenvolvendo o quadrado de $x+a$ temos:

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. A questão é a seguinte: dada a expressão $x^2 + 2ax + a^2$ obter a expressão $x+a$ que elevada ao quadrado deu logar a este desenvolvimento.

As considerações feitas para o caso numerico são aqui applicaveis. Para obter o primeiro termo do binomio raiz basta extrahir a raiz quadrada do primeiro termo do desenvolvimento, ordenado em relação a mesma letra x a que se acha a expressão da raiz. Obtido este termo eleva-se ao quadrado e subtrahindo do desenvolvimento resulta o resto $2ax + a^2$, cujo primeiro termo é o dobro do primeiro termo do binomio pelo segundo termo.

Para obter, pois, o segundo termo da raiz divide-se

este resto pelo dobro da raiz achada e o quociente será a segundo termo procurado. Nós vemos, portanto, que supposta a expressão raiz binomia ordenada em relação á mesma letra que o desenvolvimento trinomio correspondente ao seu quadrado, o primeiro termo deste desenvolvimento que não sofre redução, segundo as indicações do estudo da multiplicação, representará o quadrado do primeiro termo da expressão raiz e o ultimo o quadrado do segundo termo da mesma expressão. Fica assim a indagação da raiz quadrada no caso mais complexo em que ella apresenta dois termos, reduzido ao caso monomio fundamental e a uma divisão.

Supponhamos o caso em que a raiz quadrada apresenta tres termos, $a+b+c$. Elevando ao quadrado segundo a lei de Newton, tendo antes reduzido pela contracção $a+b=x$, este caso ao anterior, temos: $(x+c)^2 = x^2 + 2cx + c^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$ (1)

A questão é a seguinte: dado o desenvolvimento (1) obter a expressão $a+b+c$ que elevada ao quadrado o reproduza.

Para obter o primeiro termo da raiz basta extrahir a raiz quadrada do primeiro termo do desenvolvimento.

Isto feito, eleva-se a raiz ao qadrado e subtrae-se do desenvolvimento o que dá o resto $2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$ cujo primeiro termo é o dobro do termo já achado pelo segundo termo da raiz. Para obter, pois, o segundo termo da raiz, divide-se o 1º termo do resto pelo dobro da raiz achada, o quociente será o 2º termo da raiz, que sommado ao 1º termo e elevado o binomio que resulta ao quadrado e subtrahido do desenvolvimento o reduzirá á expressao $2(a+b)c+c^2$

cujo 1° termo é o producto do dobro da somma dos termos achados pelo terceiro termo da raiz.

Dobrando, por conseguinte, o binomio já obtido e dividindo por elle o primeiro termo do resto, o quociente será o terceiro termo da raiz.

Resulta d'este estudo que dado um polynomio cuja raiz quadrada tenha tres termos, se nós ordenarmos este polynomio em relação a uma mesma letra e supozermos que a expressão raiz acha-se tambem ordenada em relação á mesma letra, o primeiro termo do polynomio representará o quadrado do 1° termo da raiz; subtrahido este quadrado do polynomio dado, o primeiro termo do resto representará o dobro do 1° termo da raiz pelo seu 2° termo; subtrahido do polynomio dado o quadrado da somma algebrica dos dois primeiros termos da raiz, o primeiro termo do resto representará o dobro da somma considerada pelo 3° termo da raiz, finalmente o ultimo termo do polynomio representa o quadrado do ultimo termo da raiz.

Fica por este modo o caso mais complexo em que a raiz é trinomia, reduzido ao caso fundamental da extracção da raiz quadrada do monomio $(a)^2$ e a duas divisões.

Considerando o caso em que a raiz tem quatro termos, $a+b+c+d$, temos pela lei de Newton, reduzindo aos casos anteriores por contracções:

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = (a+b)^2 \\ &+ 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + \\ &2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 \quad [2] \end{aligned}$$

Extrahindo a raiz quadrada do 1° termo a^2 nós temos o 1° termo da raiz. Elevando este termo ao quadrado, subtrahindo do desenvolvimento [2] e divi-

dindo o 1º termo do resto pelo dobro do termo achado nos temos o 2º termo da raiz; elevando a somma algebraica $a+b$, destes dois termos ao quadrado, subtrahindo de [2] e dividindo o 1º termo $2[a+b]c$ do resto pelo dobro $2[a+b]$ desta somma nós obtemos o 3º termo c da raiz; elevando a somma algebraica $a+b+c$ dos tres termos achados ao quadrado, subtrahindo de (2) e dividindo o 1º termo $2(a+b+c)d$ do resto pelo dobro $2(a+b+c)$ desta somma, teremos o quarto termo d da raiz. Fica assim tambem reduzido este caso complexo ao caso fundamental monomio e a tres divisões.

Consideremos finalmente o caso geral em que a raiz apresenta n termos $a+b+c+d+\dots+e+f+g$.

Fazendo a contracção $a+b+\dots+e+f=x$, temos :

$$(x+g)^2 = x^2 + 2xg + g^2 \text{ ou } (x+g)^2 = (a+b+\dots+e+f)^2 + 2(a+b+c+\dots+e+f)g + g^2.$$

A questão, pois, está dependendo da extracção da raiz quadrada de um polynomio de $n-1$ termos.

Fazendo nova contracção $a+b+\dots+e=y$ temos :

$$(a+b+c+\dots+e+f+g)^2 = (y+f)^2 + 2(y+f)g + g^2 = y^2 + 2yf + f^2 + 2(y+f)g + g^2 = (a+b+\dots+e)^2 + 2(a+b+\dots+e)f + f^2 + 2(a+b+\dots+e+f)g + g^2$$

Para passar, pois, do desenvolvimeto do quadro á raiz correspondente, a questão está dependente da extracção da raiz quadrada de um polynomio de $n-2$ termos. Continuando de um modo identico á reduccão destes casos complexos aos anteriores mais simples, chegaríamos finalmente a um desenvolvimeto da fórmula.

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 \dots \dots \dots \\ \dots 2(a+b+c+\dots+e)f + f^2 + (a+b+\dots+e+f)g + g^2 \quad (1)$$

Este desenvolvimento nos mostra que o primeiro termo a^2 da expressão potencia é o quadrado do primeiro termo da raiz, que o ultimo termo g^2 da mesma expressão é o quadrado do ultimo termo da raiz.

Nós vemos pelo desenvolvimento (1) que para extrahir-se a raiz quadrada de um polynomio de um numero de termos qualquer, ordena-se este polynomio em relação a uma mesma lettra, extrahe-se a raiz quadrada do primeiro termo o que nos dá o primeiro termo a da raiz; eleva-se este termo ao quadrado, subtrahese do polynomio e o primeiro termo do resto, $2ab$, como mostra o desenvolvimento (1), dividido pelo dobro de a nos dá o segundo termo b da raiz; eleva-se $a+b$ ao quadrado, subtrahese do polynomio, e o primeiro termo do resto $2(a+b)c$ dividido por $2(a+b)$, dá o terceiro termo c da raiz; eleva-se $(a+b+c)$ ao quadrado subtrahese do polynomio e divide-se o primeiro termo $2(a+b+c)d$ do resto por $2(a+b+c)$ o que dá o quarto termo d da raiz; e assim por diante até que obtido o termo f da raiz, elevando-se ao quadrado a somma algebrica $(a+b+\dots+e+f)$, subtrahindo do polynomio o resultado e dividindo o primeiro termo $2(a+b+\dots+e+f)g$ do resto pelo dobro de $(a+b+\dots+e+f)$ obtem-se o ultimo termo g da raiz.

A questão da extracção da raiz quadrada, pois, nos casos complexos de polynomios de qualquer numero de termos reduz-se sempre, convenientemente apreciada, como acabámos de fazer, pela lei de Newton, a um unico caso fundamental, extracção da raiz de um monomio, e a uma série de divisões.

Deste estudo ainda resulta que se o polynomio dado ordenado em relação a uma mesma lettra, não tiver para primeiro e ultimo termos, monomios qua-

drados perfectos, esse polynomio não pôde representar o quadrado perfeito de nenhuma expressão. Caso estas condições sejam satisfeitas, como a questão depois da extracção da raiz do primeiro termo reduz-se a uma série de divisões, só as condições de divisibilidade podem indicar si a expressão dada é ou não um quadrado perfeito.

Si a raiz, portanto, é sujeita á condição de ser uma expressão inteira em relação a uma ou mais letras que nella tem de entrar, as condições estabelecidas no estudo da divisão para obter-se o quociente inteiro são as que determinam a possibilidade de obter-se a raiz pedida; se não se impõe á raiz condição alguma, a transformação da extracção de raiz effectua-se do mesmo modo, mas a raiz pôde ser fraccionaria em relação as letras que nella entrarem e pôde apresentar um numero illimitado de termos.

Estudemos um exemplo.

Seja $b^2x^4 + 4abx^3 + 4a^2x^2 - 2abx^2 + 4a^2x + a^2$ (1) o polynomio cuja raiz quadrada se pede.

Ordenado o polynomio como está em relação a x extrahe-se a raiz quadrada de b^2x^4 o que nos dá bx^2 para 1º termo da raiz; eleva-se bx^2 ao quadrado subtrahese de (1) e divide-se o 1º termo $4abx^3$ do resto por $2bx^2$, o quociente $2ax$ será o 2º termo da raiz; eleva-se $bx^2 + 2ax$ ao quadrado, subtrahese do polynomio (1) e o 1º termo $-2abx^2$ do resto divide-se por $2bx^2 + 4ax$, o quociente $(-a)$ será o 3º termo da raiz; eleva-se $(bx^2 + 2ax - a)$ ao quadrado subtrahese do polynomio (1) e o resto é nullo, o que nos indica que o polynomio dado é um quadrado perfeito.

Caso em nenhuma divisão o resto seja nullo, e se chegue a um dividendo para o qual o quociente pelo

dobro da raiz achada não seja inteiro, este dividendo é o que se denomina de resto da raiz.

Chamando $F(x)$ a expressão dada, $F_1(x)$ a parte inteira obtida e $F_2(x)$ o resto, temos: $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$. D'onde $F(x) - F_2(x) = F_1(x)$.

Esta equação caracteriza o resto da raiz como sendo uma formação inteira de x , cuja diferença para com o polynomio dado é um quadrado perfeito.

Como vamos ver este resto é um unico, em quanto que a raiz pode apresentar uma dupla expressão tendo signaes contrarios.

Seja $F(x)$ o polynomio inteiro dado, $F_1(x)$ a raiz e $F_2(x)$ uma expressão cujo quadrado seja igual ao polynomio dado.

Teremos: $F(x) - F_1(x) = 0$, e $F(x) - F_2(x) = 0$, donde segue-se $F_1(x) - F_2(x) = 0$, ou $(F_1(x) + F_2(x))(F_1(x) - F_2(x)) = 0$; equação que pode ser satisfeita por dois modos: $F_1(x) = F_2(x)$ ou $F_1(x) = -F_2(x)$. A raiz quadrada, pois, pode ter duas espessões differindo apenas pelo signal, o que era de esperar como consequencia da lei dos signaes na multiplicação.

Vejamos agora quanto ao resto. Seja $2m$ o gráo do polynomio $F(x)$: o gráo da raiz será m . Suppondo $F_1(x)$ e $F_2(x)$ as raizes, e $f(x)$ e $f_1(x)$ as duas expressões que se suppõe ter o resto, teremos:

$$F(x) = F_1(x) + f(x), \quad F(x) = F_2(x) + f_1(x), \quad \text{d'onde}$$

$$F_1(x) - F_2(x) + f(x) - f_1(x) = 0$$

D'aqui resulta :

$$f_1(x) - f(x) = [F_1(x) + F_2(x)][F_1(x) - F_2(x)] \quad (1)$$

Suppondo ser p o gráo do ultimo termo da raiz $F_1(x)$ é claro que o resto, que servio de dividendo para determinar este termo deve ter o gráo $m+p$, e portanto o dividendo seguinte ou resto da raiz deve ser do gráo $m+p-1$ no maximo. Resulta d'isto que o polynomio $f_1(x)-f(x)$ sendo a differença entre polynomios cujo gráo é no maximo $m+p-1$, será de gráo inferior a $m+p$. Quanto ao polynomio do segundo membro da relação (1) sendo m o gráo de $F_1(x)$ e tambem de $F_2(x)$, um dos factores $F_1(x)+F_2(x)$, e $F_1(x)-F_2(x)$ será do gráo m , e como p é o gráo do ultimo termo das raizes, segue-se que $F_1(x)$ e $F_2(x)$ serão pelo menos d'este gráo e porconsequente o producto representado pelo segundo membro da igualdade (1) será no minimo do gráo $m+p$. Temos assim a relação (1) exprimindo equivalencia entre dois polynomios de gráos differentes o que só se pode dar sendo os dois polynomios nullos, isto é, sendo :

$$f_1(x) \underset{m}{=} f(x) \text{ e } F_1(x) \underset{m}{=} \pm F_2(x).$$

O resto, pois, só pode ser um unico, emquanto a raiz pode apresentar uma dupla expressão.

Estudado por este modo o processo para directamente obter-se a raiz quadrada de um polynomio, nós passamos ao caso da raiz cubica.

Sob este novo aspecto a extracção de raiz effectua-se para o caso monomio de um modo semelhante ao anterior. Se para elevar ao cubo um monomio eleva-se ao cubo o coefficiente e multiplica-se os expoentes das letras pelo gráo da potencia, para extrahir a raiz cubica, isto é, para passar do cubo ao monomio raiz, extrahe-se a raiz cubica do coefficiente e divide-se os expoentes por tres.

Dado, por exemplo, o monomio $27a^2b^2c^5$, a sua raiz cubica será $3ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}$.

Para reduzir os casos mais complexos a este caso fundamental a marcha é perfeitamente analogia a empregada no estudo da raiz quadrada. Suppondo, pois, conhecida a raiz binomia $a+b$, e desenvolvendo o cubo segundo a lei de Newton, temos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (1)$$

A questão é a seguinte: dado o polynomio (1) obter a expressão $a+b$ cujo cubo é por elle representado.

Estudado o desenvolvimento (1) vemos que para obter o 1º termo a da raiz basta extrahir a raiz cubica do 1º termo do desenvolvimento, estando este ordenado em relação á mesma letra a que a raiz. Elevando-se a raiz cubica obtida ao cubo e subtrahindo de (1), o resto $3a^2b + \dots$ terá para 1º termo o triplo do quadro do 1º termo da raiz pelo 2º termo da mesma raiz. Dividindo, pois, o primeiro termo do resto pelo triplo do quadrado da raiz achada o quociente representará o 2º termo b da raiz.

Suppondo a raiz trinomia, teriamos:

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

Este desenvolvimento nos mostra que este caso complexo exige as duas operações anteriores, isto é, a extracção da raiz cubica do seu 1º termo e a divisão do 1º termo do resto pelo triplo do quadrado da raiz cubica obtida, para obter-se o primeiro e segundo termos a e b da raiz pedida. Estes termos determinados, a sua somma algebraica $(a+b)$ elevada ao cubo e subtrahida do desenvolvimento nos dá para resto a expressão $3(a+b)^2c + \dots$, cujo 1º termo é o triplo do quadrado da somma já obtida pelo

3º termo da raiz. Para obter este, pois, basta dividir o primeiro termo do resto pelo triplo do quadrado da raiz achada $a+b$.

Consideremos, finalmente, a raiz tendo n termos.

Seja $(a+b+c+\dots+e+f+g)$ a raiz pedida que se suppõe conhecida. Desenvolvendo pela lei de Newton, temos:

$$(a+b+c+\dots+e+f+g)^3 = (a+b+c+\dots+f)^3 + 3(a+b+\dots+f)^2g + 3(a+b+\dots+f)g^2 + g^3$$

Fazendo nova contracção no 1º termo e desenvolvendo o cubo temos:

$$(a+b+\dots+f+g)^3 = (a+b+\dots+e)^3 + 3(a+b+\dots+e)^2f + 3(a+b+\dots+e)f^2 + f^3 + 3(a+b+\dots+f)^2g + 3(a+b+\dots+f)g^2 + g^3$$

Continuando por contracções feitas no 1º termo a reduzir os casos complexos os casos anteriores mais simples chegaríamos ao desenvolvimento:

$$(a+b+\dots+f+g)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + \dots + 3(a+b+\dots+e)^2f + \dots + 3(a+b+\dots+f)^2g + 3(a+b+\dots+f)g^2 + g^3 \quad (1)$$

D'onde deduz-se:

$$(a+b+\dots+f+g)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + \dots + 3(a+b+c)^2d + \dots + 3(a+b+\dots+e)^2f + \dots + 3(a+b+\dots+f)^2g + \dots + g^3$$

Este desenvolvimento nos mostra que os 1º, 2º e 3º termos da raiz para este caso complexo são obtidos de modo identico ao anterior em que a raiz é trinomia. Estes tres termos obtidos elevados ao cubo, depois de sommados algebricamente, e subtrahidos do desenvolvimento nos dão para resto, como mostra a expressão (1), um polynomio cujo 1º termo $3(a+b+c)^2d$ é o triplo do quadrado dos tres termos achados, pelo quarto termo d da raiz, o qual é, portanto, obtido dividindo-se o primeiro termo do resto

pelo triplo do quadrado da somma dos termos já determinados. Este modo de proceder seria uniforme para a determinação dos outros termos da raiz, até que finalmente, obtido o termo $n-1$ da raiz a somma algebrica destes $n-1$ termos obtidos elevada ao cubo e subtrahida do polynomio dado nos daria um resto cujo 1° termo $3(a+b+\dots+f)^2g$, seria o triplo do quadrado dos $n-1$ termos achados pelo ultimo termo g da raiz, que seria obtido dividendo-se o primeiro termo do resto pelo triplo do quadrado dos termos da raiz já determinados.

Fica por esta forma a extracção da raiz cubica para um caso qualquer reduzida a um unico caso monomio fundamental e a uma serie mais ou menos longa de divisões. Por conseguinte, como na raiz quadrada as condições estabelecidas na divisão, e que regulão a possibilidade dos quocientes inteiros, são as que aqui regulão a possibilidade ou não possibilidade de ter o polynomio dado para raiz cubica uma expressão inteira. Si, porém, a expressão da raiz não é sujeita a condição alguma, a raiz cubica do polynomio pode ser sempre obtida sob a forma fraccionaria de numero limitado ou illimitado de termos, constituindo assim como mais adiante estudaremos um processo de desenvolvimento em serie.

Consideremos agora uma raiz qualquer m . O caso monomio fundamental resolve-se, como os anteriores, extrahindo-se a raiz m do coefferente da expressão dada e dividindo por m os expoentes das letras. Se o monomio dado é, por exemplo, $Ma^nb^pc^q$, M , n , p , podendo ser numeros quaesquer, a sua raiz m será

$$(M)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{\frac{q}{m}}$$

Para reduzir os casos complexos a este caso fundamental mais simples, a marcha é perfeitamente identica a seguida nos casos da raiz quadrada e cubica.

Supponhamos a raiz binomia $a+b$. Desenvolvendo a potencia m pela lei de Newton, temos :

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \text{etc.} \quad (1)$$

A questão, como sempre, é a seguinte: dado o polynomio $a^m + ma^{m-1}b + \text{etc.}$ determinar a expressão $a+b$ cuja potencia m elle representa.

O desenvolvimento (1) nos mostra que ordenado o polynomio e a raiz em relação á mesma letra a , para obter-se o 1.º termo da raiz basta extrahir a raiz m do 1.º termo a^m do desenvolvimento. Elevando-se este termo a á potencia m e subtrahindo de (1) o 1.º termo do resto $ma^{m-1}b + \text{etc.}$, representa m vezes o producto da potencia $m-1$ do 1.º termo da raiz pelo seu 2.º termo b , Para ter este termo divide-se o primeiro termo do resto por m vezes a potencia $m-1$ do termo já determinado.

Supponhamos o caso mais complexo em que a raiz tem tres termos, e seja $a+b+c$ esta raiz. Desenvolvendo a potencia m deste trinomio temos:

$$(a+b+c)^m = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}c + \dots + c^m \\ = a^m + ma^{m-1}b + \dots + b^m + m(a+b)^{m-1}c + \dots + c^m \quad (1)$$

Este desenvolvimento nos mostra que os dois primeiros termos da raiz são obtidos de modo identico ao anterior. Estes dois termos determinados, a sua somma algebraica elevada á potencia m e subtrahida de (1) nos dá um resto cujo 1.º termo é $m(a+b)^{m-1}c$, ou m vezes o producto da potencia $m-1$ da somma dos dois termos a e b , pelo 3.º termo da raiz.

Para obter, pois, este termo divide-se o primeiro termo do resto por m vezes a potencia $m-1$ de $(a+b)$ e o quociente será o termo procurado.

Consideremos, finalmente, a raiz com um numero qualquer n de termos, e seja $(a+b+c+\dots+e+f+g)$ esta raiz. Desenvolvendo a potencia m pela lei de Newton, temos :

$$(a+b+\dots+f+g)^m = (a+b+\dots+f)^m + m(a+b+\dots+f)^{m-1}g + \dots + g^m = (a+b+\dots+e)^m + (a+b+\dots+c)^{m-1}f + \dots + f^m + m(a+b+\dots+f)^{m-1}g + \dots + g^m$$

Continuando por contracções no 1º termo a reduzir a potencia m do polynomio $a+b+\dots+e$ aos casos mais simples, de menor numero de termos, chegaríamos á expressão :

$$(a+b+\dots+f+g)^m = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}c + \dots + c^m + m(a+b+c)^{m-1}d + \dots + d^m + \dots + m(a+b+c+\dots+f)^{m-1}g + \dots + g^m$$

D'onde deduz-se :

$$(a+b+\dots+f+g)^m = a^m + ma^{m-1}b + \dots + b^m + m(a+b)^{m-1}c + \dots + c^m + m(a+b+c)^{m-1}d + \dots + d^m + \dots + m(a+b+\dots+f)^{m-1}g + \dots + g^m$$

Esle desenvolvimento nos mostra que os tres primeiros termos da raiz são obtidos de um modo identico ao empregado no caso da raiz trinomia. Determinados estes tres termos, a sua somma algebraica $a+b+c$, elevada a potencia m e subtrahida de (1), nos dá um resto, cujo 1º termo $m(a+b+c)^{m-1}d$ é m vezes o producto da potencia $m-1$ d'essa somma pelo 4º termo d da raiz, o qual obtém-se dividindo o producto considerado por m vezes a potencia $m-1$ da somma dos termos já determinados.

Continuando de um modo analogo a operação, isto é, determinando cada um dos outros termos por

meio de uma divisão em que o divisor é m vezes a potencia $m-1$ da somma algebrica dos termos conhecidos, e o dividendo o primeiro termo do resto que resultou da subtracção entre o polynomio dado e a potencia m da mesma somma algebrica, chegaríamos finalmente a obter o ultimo termo g da raiz.

Dando a m os valores 2, 3, 4, 5, 6, etc., nós obtemos as regras para extracção da raiz quadrada, cubica, quarta, quinta, etc.

Nós vemos, pois, que dado um polynomio qualquer, ordenado este polynomio em relação ás potencias crescentes de uma mesma letra, a extracção de uma raiz qualquer d'esta expressão, reduz-se sempre á extracção da raiz correspondente do monomio que constitue o seu primeiro termo, e a uma serie de divisões.

Se a raiz pedida é sujeita a condição de ser um polynomio inteiro, o estudo que acabamos de fazer, nos indica que uma das condições necessarias é que o primeiro e o ultimo termo do polynomio dado sejam potencias perfeitas da ordem correspondente á raiz considerada, as outras condições sendo as mesmas que a divisão estabelece para os quocientes inteiros; se a raiz não é sujeita á condição alguma a sua expressão póde ser sempre obtida polendo apresentar a fórma fraccionaria de numero limitado ou illimitado de termos.

Tal é o modo por que a lei de Newton nos permite a elaboração completa da theoria das raizes.

Consideradas como representadas por expoentes fraccionarios, as raizes podem ser de um modo mais directo subordinadas á lei binomial. Este modo de realisar esta subordinação, tem uma dupla vantagem: a primeira de importancia ao mesmo tempo logica e dogmatica, consiste na reduccção, assim obtida, de

uma transformação mais difficil a uma transformação mais facil e já estudada: a segunda de importancia principalmente logica, consiste na coordenação do dominio da algebra directa pela uificação de duas theorias importantes, como seião a das potencias e raizes, por uma unica lei—a lei binomial.

Considerada por este modo, a raiz quadrada, por exemplo, do trinomio $x^2+2ax+a^2$ se obteria desenvolvendo pelo theorema de Newton a potencia $\frac{1}{2}$ d'esta expressão e tomando os dois 1.^o termos do desenvolvimento.

Dado, pois, um polynomio para extrahir a sua raiz m qualquer, calcula-se em primeiro lugar, pela formula dada no estudo das potencias, quantos termos deve ter a expressão raiz. Isto obtém-se contando o numero de termos do polynomio dado e depois particularisando para os diversos casos a formula que nos dá o numero de termos do desenvolvimento de uma potencia qualquer de um polynomio, até obter-se o mesmo numero de termos que o do polynomio dado. Feito isto desenvolve-se a potencia $\frac{1}{m}$ do polynomio dado e toma-se no desenvolvimento a partir do 1.^o termo um numero de termos igual ao numero de termos fornecido pela formula das potencias para a raiz considerada.

O estudo que deixamos feito, nos deixa vêr que a extracção de uma raiz qualquer, consiste em sua phase mais extensa em uma serie de divisões. Se a ultima divisão dá um resto nullo, a expressão é uma potencia perfeita; se isto não acontece, chega-se afinal a um resto em que a divisão com o quociente inteiro não é mais possivel; o polynomio dado não é uma potencia perfeita de uma expressão inteira e a raiz só póde ser obtida sob a fórma fraccionaria.

Esta analogia entre a phase principal da extracção de raiz e a divisão nos vai deixar mostrar que a primeira d'estas transformações como a segunda, comporta uma elaboração completa, quando mesmo fiquem indeterminados os coefficients do polynomio dado, o que permite determinar quaes os valores a dar a esses coefficients, para que o polynomio dado seja uma potencia perfeita da ordem da raiz considerada.

Para isto apreciar, basta-nos considerar o caso verdadeiramente usual da raiz quadrada.

Seja o polynomio $Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \dots + M$, cujos coefficients são indeterminados.

Quer se saber que valores se deve da a A, B, C , etc., para que este polynomio seja um quadrado perfeito. A raiz quadrada d'este polynomio será do gráu m e da fórmula $A_1x^m + B_1x^{m-1} + \dots + M_1$; o resto será, portanto, do gráu $m-1$, no maximo, e da fórmula :

$A_2x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \dots + M_2$. Representando o polynomio dado por $F(x)$, a raiz por $F_1(x)$ e o resto por $F_2(x)$, temos :

$F(x) = F_1(x)^2 + F_2(x)$. Como a condição para que $F(x)$ seja um quadrado perfeito é que o resto seja nullo temos: $F_2(x) = 0$. Ora, sendo $F_1(x)$ um polynomio do gráu $m-1$, o numero de seus termos é m e esta ultima equação nos dará m equações para determinar os coefficients A_1, B_1 , etc. Se o numero de equações fôr igual ao numero de coefficients pedidos, cada um d'estes terá um unico valor; se, porem, o numero de equações fôr inferior ao numero de coefficients, o problema será indeterminado e um ou mais d'estes coefficients ficarão arbitrarios.

Supponhamos que o polynomio dado seja $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$.

Extrahindo a raiz quadrada temos:

$$\frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{-Ax^4 - Bx^3} \left| \begin{array}{l} x^2(A)^{\frac{1}{2}} + \frac{Bx}{2(A)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4AC - B^2}{8(A^3)^{\frac{1}{2}}} \\ \hline \frac{1}{2(A)^{\frac{1}{2}}} x^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{\left(C - \frac{B^2}{4A}\right)x^2 + Dx + E}{\frac{1}{16A^2} \frac{B(4AC - B^2)}{x} + \frac{1}{64A^2} \frac{(4AC - B^2)^2}{x}}$$

O resto igualado a zero nos dá:

$$Dx + \frac{B(4AC - B^2)}{16A^2}x + \frac{(4AC - B^2)^2}{64A^2} + E = 0. \text{ D'onde}$$

$$D + \frac{B(4AC - B^2)}{16A^2} = 0, \quad \frac{(4AC - B^2)^2}{64A^2} + E = 0$$

Temos assim duas equações para determinar os cinco coefficients. O problema é indeterminado e tres d'entre os coefficients podem ficar arbitrarios.

Nós vemos que a questão para a extracção das raizes é analogá á questão estudada na divisão. Dada a expressão, effectua-se a extracção da raiz como se os coefficients fossem conhecidos, e chegado ao resto iguala-se este a zero, e desta equação tira-se as equações que devem dar os coefficients, igualando separadamente a zero os coefficients das diferentes potencias de x .

Capitulo IV

Fracções continuas--Calculo indeterminado do 1º gráo

I

Antes de encetar o estudo do calculo indeterminado do 1º gráo estudaremos as fracções continuas cuja theoria deve constituir o complemento indispensavel áquelle estudo, pois que sobre ella basêa-se um dos methodos de resolução do problema do calculo indeterminado do 1º gráo.

As fracções continuas foram introduzidas na mathematica no seculo XVII para aperfeiçoamento das transformações numericas.

Foi Brouncker quem primeiro as imaginou apresentando em fracção continua a expressão da relação entre o quadrado circumscripto a um circulo e a area desse circulo. A Wallis deve-se o methodo para reduzir toda fracção continua á fracção ordinaria; mas foi Huyghens quem primeiro estudou as principaes propriedades e vantagens que apresenta um tal desenvolvimento.

As fracções continuas constituem um modo muito precioso para obter-se as avaliações numericas, e em algebra, principalmente depois dos trabalhos de Lagrange, têm applicações importantes na theoria das equações.

A determinação do valor aproximado de uma grandeza cuja avaliação não comporta uma representação em números inteiros, originou naturalmente as fracções continuas, cujas propriedades mais tarde permitiram outras applicações e sua extensão ao dominio algebrico.

Seja M uma grandeza que se pretende avaliar. O meio mais simples e mais natural de obter-se um valor aproximado dessa quantidade é procurar o maior numero inteiro nella contido. Representando por n esse numero é claro que a differença $M-n$ será menor que a unidade, e, portanto, a fracção $\frac{1}{M-n}$, que representaremos por M_1 , será maior. Esta grandeza sendo maior que a unidade comporta uma avaliação semelhante a da primeira, isto é, nós podemos avaliar M_1 aproximadamente procurando qual o maior numero inteiro nella contido. Representando por a esse numero, a differença M_1-a será menor que a unidade e, portanto, a fracção $\frac{1}{M_1-a}$, que representaremos por M_2 , será maior. Procedendo com M_2 do mesmo modo que com as anteriores, obteremos uma differença M_2-b menor que a unidade, e a fracção $\frac{1}{M_2-b}$, que representaremos por M_3 , maior que a unidade; e assim por diante.

Temos pois :

$$\frac{1}{M-n} = M_1, \quad \frac{1}{M_1-a} = M_2, \quad \frac{1}{M_2-b} = M_3, \quad \frac{1}{M_3-c} = M_4, \quad \text{etc.} \quad (1)$$

Estas igualdades nos dão :

$$M-n = \frac{1}{M_1}, \quad M_1-a = \frac{1}{M_2}, \quad M_2-b = \frac{1}{M_3}, \quad M_3-c = \frac{1}{M_4} \quad \text{etc.}$$

ou

$$M = n + \frac{1}{M_1}, \quad M_1 = a + \frac{1}{M_2}, \quad M_2 = b + \frac{1}{M_3}, \quad M_3 = c + \frac{1}{M_4} \quad \text{etc.}$$

Substituindo na expressão de M , M_1 pelo seu valor,

na de M_2 , pelo seu valor, na de M_3 , M_4 , pelo seu valor etc. teremos :

$$M = n + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (2)$$

etc.

Resultado que nos deixa vêr que o valor calculado para M será tanto mais aproximado quanto maior fôr o numero de avaliações parciaes. As expressões desta forma denominam-se de *fracção continua*.

Na expressão (2) todos os termos do desenvolvimento são positivos; se nós, porém, em vez de tomarmos para valores aproximados de M , M_1 , M_2 , etc., o menor dos dois numeros entre os quaes cada uma dessas grandezas se acha contida, tomassemos o maior, isto é, se avaliássemos cada uma dellas com uma aproximação para mais e não para menos como fizemos, os denominadores a , b , c etc. seriam negativos.

Com effeito, neste caso, sendo n maior que M , $M - n$ será negativo e, portanto, o quociente M_1 , e a o serão tambem. Sendo a maior que M_1 , $M_1 - a$ será negativo e, portanto, M_2 e b o serão tambem; e assim por diante. As fracções $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ etc., denominam-se *fracções integrantes*, e os denominadores a , b , c etc. *quocientes incompletos*. Chama-se *reduzida* ou *fracção convergente* a toda fracção ordinaria equivalente a uma porção do desenvolvimento da fracção continua tomada a partir da origem.

Assim, por exemplo, as fracções ordinarias equivalentes as porções:

$$\frac{n}{1}, \quad n + \frac{1}{a}, \quad n + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad n + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

etc. são *reduzidas* da fracção continua M e denomi-

nam-se respectivamente de primeira, segunda, terceira etc. *reduzida*.

Os numeradores das fracções $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ etc. podem deixar de ser a unidade, isto é. a fracção continua pode ter a forma

$$M = n + \frac{p}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \text{ etc.}$$

Nós, porem, só consideraremos o caso em que esses numeradores são a unidade, pois que, como observa Lagrange, cuja exposição tomamos para norma, é este o caso de verdadeira utilidade em mathematica.

Se no desenvolvimento da fracção continua uma das grandezas M_1 , M_2 , M_3 etc fôr um numero inteiro a fracção continua terá um numero determinado de termos e neste caso a grandeza M será commensuravel.

Se M_2 , por exemplo, na expressão (2) fosse um numero inteiro a fracção continua teria a forma:

$$M = n + \frac{1}{a} + \frac{1}{M_2}$$

O denominador da *fracção integrante* seguinte seria igual ao infinito porque na expressão (1) de M_2 fazendo $b = M_2$ teremos $M_2 = \frac{1}{0} = \infty$.

As fracções continuas, pois, nos fornecem um meio de avaliação em que podemos tornar o gráo de aproximação o mais rigoroso possível.

Supponhamos, por exemplo, que se quer transformar a fracção ordinaria $\frac{X}{Y}$ em fracção continua. Temos em primeiro lugar de procurar o numero

inteiro que mais se aproxima d'essa fracção, o que obteremos dividindo X por Y. Representando o quociente por q e o resto por R teremos:

$$\frac{X}{Y} = q + \frac{R}{Y} = q + \frac{1}{\frac{Y}{R}} \quad (1)$$

Praticando com $\frac{Y}{R}$ de um modo semelhante, e representando por q_1 e R_1 o quociente e o resto desta segunda operação teremos $\frac{Y}{R} = q_1 + \frac{1}{\frac{R}{R_1}}$, valor este que substituído na expressão (1) nos dá:

$$\frac{X}{Y} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{R}{R_1}}}$$

Procedendo com $\frac{R}{R_1}$ do mesmo modo, obteríamos nova fracção integrante, e assim por diante poderíamos prolongar indefinidamente a fracção continua repetindo sempre o mesmo artifício.

A operação, como vemos, consiste no seguinte : divide-se o numerador da fracção que se quer transformar, pelo seu denominador e o quociente será a parte inteira da fracção continua ; divide-se depois o divisor da divisão anterior, denominador da fracção dada, pelo resto d'essa divisão e o quociente achado será o denominador da primeira fracção integrante ; divide-se o divisor da segunda divisão pelo resto da mesma divisão e o quociente será o denominador da segunda fracção integrante ; e assim successivamente se irá obtendo o denominador de cada fracção integrante, que será sempre dado pelo quociente de uma divisão em que o dividendo é o divisor da di-

visão que serviu para determinar o denominador da anterior e o divisor o resto d'essa divisão.

A questão, portanto, reduz-se a uma operação idêntica á do maior divisor commum. Se as duas grandezas X e Y tivessem um maximo commum divisor, chegaríamos finalmente a um resto zero e então teríamos para a expressão equivalente á fracção considerada uma fracção continua de um numero limitado de *integrantes*.

Os denominadores das fracções integrantes sendo obtidos por meio de uma divisão, n'essa divisão os quocientes podem ser tomados com aproximação para menos, que é o caso ordinario, ou para mais; no primeiro caso os restos serão sempre positivos e, portanto, os denominadores das fracções integrantes tambem o serão sempre, e no segundo os restos serão negativos e portanto, os denominadores das fracções integrantes o serão tambem.

Podemos calcular todas as fracções integrantes por um ou outro d'estes dois modos ou alternativamente por um e outro.

Obtido o desenvolvimento com denominadores negativos, podemos tornar positivo cada um d'esses denominadores trocando o signal do numerador correspondente bem como o do numerador seguinte:

Assim se tivéssemos a fracção continua:

$$n + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \text{etc}$$

poderíamos transformal-a na seguinte que lha é equivalente

$$n - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \text{etc}$$

Podese ainda fazer com que desapareçam todos os signaes negativos da fracção continua reduzindo-a á

uma outra tendo todos os termos positivos, e tambem substituir termos positivos por termos negativos.

Suppondo para a primeira transformação a fracção continua $n - \frac{1}{a} + \text{etc}$ podemos substitui-la pela seguinte que lhe é equivalente : $n - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{a-1} \text{ etc.}$

Supponhamos para a segunda transformação a fracção continua $n + \frac{1}{a} + \text{etc}$; esta fracção continua pode ser substituida pela seguinte que lhe é equivalente :

$$n + 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{a-1} \text{ etc.}$$

Estas transformações podem ser utilizadas para simplificação das fracções continuas e sua reducção a um menor numero de termos, o que se poderá fazer todas as vezes que a fracção continua considerada contiver denominadores iguaes a unidade positiva ou negativa.

Vamos vêr como estas transformações, em alguns casos podem nos poupar o trabalho de fazer o calculo da toda fracção.

Consideremos a expressão geral :

$$M = n + \frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1} \text{ etc.}$$

Para que esta fracção contiuaa seja o mais convergente possivel para o valor de M é necessario que $n, a_1, b_1, c_1, \text{ etc}$ sejam os numeros inteiros que mais se aproximem de $M, a, b, c, \text{ etc.}$ quer por excesso quer por differença. No caso em que n não fosse o numero inteiro mais proximo de M , o numero seguinte a_1 seria necessariamente igual a unidade, por que então a differença entre M e n seria maior que $\frac{1}{2}$ e nós teriamos, portauto, a fracção $a = \frac{1}{M-n}$

menor que dois e, portanto, a só poderia ser igual a unidade. Este descuido no calculo se manifesta pelo apparecimento na fracção continua de denominadores iguaes a unidade e neste caso a fracção pode ser simplificada augmentando-se ou diminuindo-se o denominador precedente de uma unidade o que se poderá executar pelas transformações precedentes sem necessidade de refazer todo o calculo.

Transformada uma quantidade em fracção continua nos aproximaremos tanto mais do seu valor real quanto maior fôr o numero de fracções integrantes que calcularmos. Se calcularmos successivamente uma, duas, tres, quatro etc fracções integrantes obteremos uma serie de quantidades convergentes todas, successivamente, para o verdadeiro valor da quantidade equivalente a fracção continua.

Essa lei de convergia se nos tornará mais evidente pela consideração das formulas:

$$M = n + \frac{1}{M_1}, \quad M_1 = a + \frac{1}{M_2}, \quad M_2 = b + \frac{1}{M_3}, \\ M_3 = c + \frac{1}{M_4}, \text{ etc}$$

n é o primeiro valor aproximado de M , cujo valor exacto é $\frac{nM_1+1}{M_1}$

Substituindo nesta expressão M_1 pelo seu valor aproximado a obteremos o seguinte valor mais aproximado de M que $n: \frac{na+1}{a}$; substituindo na mesma expressão M_1 pelo seu valor exacto $\frac{aM_2+1}{M_2}$ obteremos o seguinte valor mais aproximado de M que o anterior e que $n: \frac{(na+1)M_2+n}{aM_2+1}$

Substituindo nestas expressões M_2 pelo seu valor

aproximado b obteremos o seguinte valor mais aproximado de M que os anteriores:

$\frac{(na+1)b+n}{ab+1}$; se substituirmos na mesma expressão M_2

pelo seu valor exacto $\frac{bM_2+1}{M_2}$ obteremos o seguinte valor mais aproximado de M que o anterior:

$$\frac{[(na+1)b+nM_2+na+1]}{(ab+1)M_2+a}$$

Substituindo nesta expressão M_2 pelo seu valor aproximado c obteremos o seguinte valor mais aproximado de M que o anterior

$$M = \frac{[(na+1)b+n]c+na+1}{(ab+1)c+a}$$

E assim por diante.

Façamos, para simplificação dos calculos e facilidade dos raciocinios:

$$A=n, B=aA+1, C=bB+A, D=cC+B,$$

$$E=dD+C, \text{ etc.}$$

$$(1) A_1=1, B_1=a, C_1=bB_1+A_1, D_1=cC_1+B_1,$$

$$E_1=dD_1+C_1, \text{ etc.}$$

Dividindo respectivamente membro a membro estas igualdades obteremos a seguinte serie de fracções convergindo todas para a quantidade M :

$$(2) \frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{E}{E_1}, \text{ etc.}$$

A fracção continua será limitada todas as vezes que a quantidade M fôr racional e tiver uma forma fraccionaria qualquer $\frac{v}{v_1}$; e neste caso essa fracção será o ultimo termo da serie (2) o qual deve ser sempre equivalente a toda a fracção continua.

No caso, porém, em que M seja irracional ou trans-

cendente a fracção continua tendo um numero illimitado de termos nós podemos prolongar indefinidamente a serie de fracções convergentes (2).

Estudemos agora as fracções que constituem a serie (1).

A primeira consideração que se nos apresenta é que os numeros $A, B, C, D, \text{etc.}$ e $A_1, B_1, C_1, \text{etc}$ devem ir augmentando: 1º porque se os numeros n, a, b, c, etc são todos positivos os numeros A, B, C, etc e $A_1, B_1, C_1, \text{etc}$ o são tambem e, portanto, nós temos evidentemente: $B > A, C > B, D > C, \text{etc.}$ e $B_1 > A_1, C_1 > B_1, D_1 > C_1, \text{etc}$; 2º porque se todos os numeros n, a, b, etc são negativos ou em parte positivos e parte negativos, então entre os numeros $A, B, C, \text{etc.}$ e $A_1, B_1, C_1, \text{etc.}$ deve haver tambem positivos e negativos.

As expressões (2) nos dão.

$$(3) \quad \frac{B}{A} = a + \frac{1}{n}, \quad \frac{C}{B} = b + \frac{A}{B}, \quad \frac{D}{C} = c + \frac{B}{C}, \quad \text{etc.}$$

Estas formulas nos deixão vêr que se os numeros $n, a, b, \text{etc.}$ forem differentes da unidade, nós teremos necessariamente, abstracção feita dos signaes:

$\frac{B}{A} > 1$, logo $\frac{A}{B} < 1$ e, portanto, $\frac{C}{B} > 1$ e assim por diante.

Teremos consequentemente $B > A, C > B, \text{etc.}$

E' necessario, porém, distinguir o caso em que algum dos numeros $n, a, b, \text{etc.}$ sejam iguaes a unidade. Supponhamos que b seja o primeiro desses numeros igual a ± 1 . Neste caso temos $B > A$; mas C será menor que B se a fracção $\frac{A}{B}$ tiver o signal differente do de b , o que claramente nos deixa vêr a

igualdade $\frac{C}{B} = b + \frac{A}{B}$, porque $b + \frac{A}{B}$ será um numero menor que a unidade. D será maior que B porque sendo $b = \pm 1$ temos para valor de $M_2 = \pm 1 + \frac{1}{M_3}$,

igualdade que nos dá $M_2 - \frac{1}{M_3} = \pm 1$; sendo M_2 e M_3 quantidades maiores que a unidade, é evidente que esta igualdade só poderá subsistir tendo essas quantidades o mesmo signal; e sendo b e c valores inteiros aproximados das mesmas quantidades devem ter o mesmo signal como ellas.

A fracção $\frac{C}{B} = b + \frac{A}{B}$ deve ter o mesmo signal que b porque esta quantidade é um numero inteiro e $\frac{A}{B}$ uma fracção menor que a unidade. $\frac{C}{B}$ e c , portanto, terão o mesmo signal e consequentemente $\frac{cC}{B}$ será uma quantidade positiva. Multiplicando ambos os membros da terceira formula (3) por $\frac{C}{B}$ temos $\frac{D}{B} = c \frac{C}{B} + 1$

Ora, sendo $c \frac{C}{B}$ uma quantidade positiva é claro que $\frac{D}{B}$ será maior que a unidade e, portanto, $D > B$.

Do que vimos de expôr vê-se que se acontecer na serie A, B, C, etc existir um termo menor que o precedente, o termo seguinte será necessariamente maior; de modo que, pondo de parte esses termos menores, a serie não deixará de ir augmentando.

Finalmente, poderemos sempre evitar este inconveniente quer tornando os numeros n, a, b, c , etc todos positivos, quer tornando-os todos diferentes da unidade, o que é sempre possível. Os mesmos raciocinios se poderá fazer para com a serie A_1 ,

B_1, C_1 , etc na qual teremos igualmente :

$$\frac{B_1}{A_1} = a, \quad \frac{C_1}{B_1} = b + \frac{A_1}{B_1}, \quad \frac{D_1}{C_1} = c + \frac{B_1}{C_1}, \text{ etc}$$

Empregando os mesmos raciocinios chegariamos a conclusões semelhantes as precedentes.

Se multiplicar-mos em cruz os termos das fracções da serie $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}$, etc, isto é, se multiplicarmos em cruz as igualdades (1) e subtrahirmos depois os resultados dois a dois e membro a membro teremos para as duas primeiras :

$$\begin{aligned} BA_1 - AB_1 &= aA + 1 - an = an + 1 - an = 1; \text{ para a se-} \\ \text{gunda e terceira } CB_1 - BC_1 &= a(bB + A) - bB_1(aA + 1) \\ &= -A_1(aA + 1) = B_1[A + bB - abA - b] - \\ &= -A_1 B = AB_1 - BA_1 \end{aligned}$$

Do mesmo modo obteriamos :

$$\begin{aligned} DC_1 - CD_1 &= BC_1 - CB_1, \text{ etc; ou de um modo geral} \\ BA_1 - AB_1 &= 1, \quad CB_1 - BC_1 = -1, \quad DC_1 - CD_1 = 1, \\ ED_1 - DE_1 &= -1 \text{ etc} \end{aligned}$$

Resultado este que traduz uma propriedade notavel e da qual se deduz importantes consequencias:

1.º As fracções $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}$, etc devem estar expressas em os termos os mais simples que pode comportar a sua expressão; porque se, por exemplo, C e C_1 tivessem um divisor diferente da unidade o numero inteiro $CB_1 - BC_1$, seria tambem divisivel por esse numero o que é absurdo pois nós temos $CB_1 - BC_1 = -1$

2.º Se dermos as igualdades precedentes a forma :

$$\frac{B}{B_1} - \frac{A}{A_1} = \frac{1}{A_1 B_1}, \quad \frac{C}{C_1} - \frac{B}{B_1} = -\frac{1}{C_1 B_1}, \quad \frac{D}{D_1}$$

$$-\frac{C}{C_1} = +\frac{1}{C_1 D_1}, \frac{E}{E_1} \frac{D}{D_1} = -\frac{1}{E_1 D_1}$$

torna-se evidente a convergencia da serie $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1},$

$\frac{C}{C_1},$ etc pois que as expressões acima nos deixão vêr claramente que as differenças entre as fracções consecutivas dessa serie vão diminuindo.

Sendo a differença entre duas fracções consecutivas quaesquer a menor possivel, é impossivel que qualquer outra fracção, salvo o caso de ter um denominador maior, possa estar comprehendida entre duas consecutivas da serie.

Consideremos, por exemplo, as duas fracções $\frac{C}{C_1}$ e

$\frac{D}{D_1}$ cuja differença é $\frac{1}{C_1 D_1}$, e supponhamos, por hypothese, que entre as duas se ache comprehendida a fracção $\frac{p}{p}$ cujo denominador seja menor que C_1 e D_1 .

Para que $\frac{p}{p}$ possa achar-se comprehendida entre as fracções $\frac{C}{C_1}$ e $\frac{D}{D_1}$ é necessario que a differença entre essa fracção e $\frac{C}{C_1}$, que é igual a

$$\frac{pC_1 - pC_1}{pC_1} \text{ ou } \frac{pC_1 - pC_1}{pC_1}$$

seja menor que $\frac{1}{C_1 D_1}$, differença entre $\frac{C}{C_1}$ e $\frac{D}{D_1}$.

Não podendo a differença entre $\frac{p}{p}$ e $\frac{C}{C_1}$ ser menor que

$\frac{1}{pC_1}$ e sendo $p < D_1$, é evidente que ella será necessa-

riamente maior que $\frac{1}{C, D_1}$. Raciocinando do mesmo modo em relação a $\frac{D}{D_1}$ chegaremos a concluir que a diferença entre $\frac{0}{p}$ e $\frac{D}{D_1}$ não podendo ser menor que $\frac{1}{pD_1}$ será necessariamente maior que $\frac{1}{C, D_1}$, pois que $p < C_1$, quando devia ser menor.

Assim, pois, a fracção $\frac{n}{p}$ só poderia achar-se comprehendida entre as duas fracções consecutivas $\frac{C}{C_1}$ e $\frac{D}{D_1}$ se tivesse um denominador maior que C_1 ou D_1 .

Vamos agora ver qual o gráo de aproximação que nos fornece cada uma das fracções da serie $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}$, etc na avaliação do valor da quantidade M equivalente ao desenvolvimento em *fracção continua*.

As formulas (1) nos dão :

$$M = \frac{AM_1 + 1}{A, M_1}, \quad M = \frac{BM_2 + A}{B, M_2 + A_1}, \quad M = \frac{CM_3 + B}{C, M_3 + B_1},$$

$$M = \frac{DM_4 + C}{D, M_4 + C_1}, \text{ etc}$$

Para avaliarmos de quanto uma fracção qualquer da serie, $\frac{C}{C_1}$ por exemplo, se aproxima do verdadeiro valor da grandeza M , basta calcularmos a diferença entre esta quantidade e aquella fracção, tomando o valor de M sob a forma :

$$\frac{CM_3 + B}{C, M_3 + B_1}$$

Assim praticando, e notando que $BC_1 - CB_1 = 1$ temos :

$$M = \frac{C}{C_1} = \frac{CM_3 + B}{C_1 M_3 + B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{1}{C_1(C_1 M_3 + B_1)}$$

Sendo c o numero inteiro mais approximado de M_3 , é claro que a differença entre estas duas grandezas será menor que a unidade, e que o valor de M_3 se achará contido entre os dois numeros c e $c \pm 1$, servindo o signal $+$ para o caso em que o valor approximado c é menor que o verdadeiro valor de M_3 , e o signal $-$ para o caso contrario; consequentemente o valor de $C_1 M_3 \pm B_1$ se achará comprehendido entre os dois valores $C_1 c \pm B_1$ e $C_1(c \pm 1) \pm B_1 = C_1 c \pm B_1 \pm C_1$, isto é, entre D_1 e $D_1 \pm C_1$. A differença $M = \frac{C}{C_1}$, portanto, se achará comprehendida entre os dois limites :

$$\frac{1}{C_1 D_1} \text{ e } \frac{1}{C_1(D_1 \pm C_1)}$$

Resultado que nos deixa claro, e por meio do qual podemos avaliar, do quanto a fracção $\frac{C}{C_1}$ tomada para valor de M se aproxima do verdadeiro valor desta quantidade.

Temos, pois, de um modo geral :

$$M = \frac{A}{A_1} + \frac{1}{A_1 M_1}, \quad M = \frac{B}{B_1} - \frac{1}{B_1(B_1 M_2 + A_1)}$$

$$M = \frac{C}{C_1} + \frac{1}{C_1(C_1 M_3 + B_1)}, \quad M = \frac{D}{D_1} - \frac{1}{D_1(D_1 M_4 + C_1)}$$

e assim por diante.

Suppondo que no calculo os valores approximados de M : M_1, M_2 , etc são tomados sempre menores

que o valor real dessa quantidade, as grandezas $n, a, b, c,$ etc bem como as grandezas $M_1, M_2, M_3,$ etc e A_1, B_1, C_1 etc serão todas positivas e, portanto, as diferenças entre M e cada uma das fracções $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1},$ etc serão alternativamente positivas e negativas, isto é, estas fracções serão alternativamente menores e maiores que a quantidade $M.$

Ainda mais, suppondo $M_1 > a, M_2 > b, M_3 > c,$ etc teremos $M_1 > B_1, B_1 M_2 + A_1 > B_1 b + A_1 > C_1.$

$$C_1 M_3 + B_1 > C_1 c + B_1 > D_1, \text{ etc}$$

e sendo $M_1 < a+1, M_2 < b+1, M_3 < c+1,$ etc temos

$$M_1 < B_1 + 1, B_1 M_2 + A_1 < B_1 (b+1) + A_1 < C_1 + B_1,$$

$$C_1 M_3 + B_1 < C_1 (c+1) + B_1 < D_1 + C_1; \text{ etc}$$

Consequentemente os erros que commetteriamos tomando para valor da quantidade M uma das

fracções $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1},$ etc serão respectiva-

mente menores que $\frac{1}{A_1 B_1}, \frac{1}{B_1 C_1}, \frac{1}{C_1 D_1},$ etc e maiores respectivamente que:

$$\frac{1}{A_1 (B_1 + A_1)}, \frac{1}{B_1 (C_1 + B_1)}, \frac{1}{C_1 (D_1 + C_1)}, \text{ etc}$$

Qualquer uma das fracções $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1},$ etc., por

consequente, tomadas para valor da quantidade M não só nos dá este valor com uma grande aproximação, tanto maior quanto mais afastada estiver a fracção considerada do começo da serie, como tambem exprime esse valor mais exactamente do que

o faria qualquer outra fracção que tivesse o denominador menor que o da fracção da serie immediatamente seguinte a considerada; porque sendo as fracções da serie alternativamente menores e maiores que M , é evidente que o valor d'esta quantidade deve achar-se comprehendido entre duas fracções consecutivas quaesquer, e, como vimos, é impossivel que entre duas fracções da serie, n'essas condições, possa existir uma outra fracção qualquer de denominador menor que o maior denominador das fracções consecutivas consideradas.

Assim, por exemplo, a fracção $\frac{D}{D_1}$ nem só exprime o valor de M com uma aproximação muito grande e maior do que a que obteriamos se tomassemos uma qualquer das tres que a precedem, como tambem o exprime mais exactamente do que o poderia fazer outra qualquer fracção que tivesse o denominador menor que E_1 .

No caso, porém, em que os valores aproximados de M , M_1 , M_2 , etc., isto é, em que n , a , b , c , etc., são todos ou em parte, respectivamente tomados com approximação para mais, entre elles haverá alguns negativos, o que terá como consequencia o serem tambem negativos alguns dos termos das series:

A , B , C , D , etc e A_1 , B_1 , C_1 , etc. e, portanto, as differenças entre a quantidade M e cada uma

das fracções $\frac{A}{A_1}$, $\frac{B}{B_1}$, $\frac{C}{C_1}$ etc não serão mais al-

ternativamente positivas e negativas como no

caso anterior, de modo que as fracções $\frac{A}{A_1}$, $\frac{B}{B_1}$,

$\frac{C}{C_1}$, etc que anteriormente nos davão os limites

superior e inferior do verdadeiro valor da quantidade M , neste segundo caso não os podem dar, o que constitue uma desvantagem tão importante que faz com que na pratica se prefira sempre as fracções continuas do primeiro caso, isto é, as que tem todos os denominadores positivos, e que, por essa razão, serão as unicas que continuaremos a estudar.

Sendo os termos da serie, $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}$, etc, neste ultimo caso, alternativamente positivos e negativos, podemos decompol-a em duas: uma composta de todas as fracções menores que M , e que vão aumentando continuamente aproximando-se cada vez mais desta quantidade :

$\frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{E}{E_1}$, etc; a outra composta de todas as fracções maiores que M , e que vão diminuindo aproximando-se cada vez mais desta quantidade :

$$\frac{B}{B_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{F}{F_1}, \text{ etc}$$

Da primeira serie nós deduzimos, tendo em vista os valores (1) :

$$\frac{C}{C_1} - \frac{A}{A_1} = \frac{b}{A_1 C_1}, \quad \frac{E}{E_1} - \frac{C}{C_1} = \frac{d}{C_1 E_1}, \text{ etc.}$$

e da segunda

$$\frac{B}{B_1} - \frac{D}{D_1} = \frac{c}{B_1 D_1}, \quad \frac{D}{D_1} - \frac{F}{F_1} = \frac{e}{D_1 F_1}, \text{ etc.}$$

As grandezas a, b, c , etc. podem ser ou iguaes ou diferentes da unidade; no primeiro caso poderiamos demonstrar, como o fizemos anteriormente, que é impossivel que entre duas fracções consecutivas de qualquer dessas duas series possa existir uma outra

com o denominador menor que o maior denominador das duas fracções consecutivas ; no segundo, porém, longe de se dar isso, podemos inserir entre duas fracções consecutivas de qualquer das series, tantas fracções intermediarias quantas unidades tiverem os numeros $b-1$, $c-1$, $d-1$, etc e para isto basta substituir successivamente nos valores de C e C_1 : $C = bB + A$ e $C_1 = bB_1 + A$, os numeros 1, 2, 3, b em lugar de b ; do mesmo modo nos valores de D e D_1 , os numeros 1, 2, 3, c em lugar de c , e assim por diante.

Supponhamos, por exemplo, $b=4$; substituindo este valor nas expressões de C e C_1 , temos :

$$C = 4B + A, \quad C_1 = 4B_1 + A,$$

Entre as duas fracções consecutivas da primeira serie,

$\frac{A}{A}$ e $\frac{C}{C_1}$ poderemos inserir, portanto, tres fracções

intermediarias que serão : $\frac{B+A}{B_1+A}, \frac{2B+A}{2B_1+A}, \frac{3B+A}{3B_1+A}$.

Os denominadores dessas fracções, como vemos, formam uma serie crescente, desde A , até C_1 , e as proprias fracções, como vamos ver, formam tambem uma serie cujos termos vão crescendo continuamente

desde $\frac{A}{A}$ até $\frac{C}{C_1}$, de sorte que seria impossivel inserir

entre dois termos consecutivos da serie

$$\frac{A}{A}, \frac{B+A}{B_1+A}, \frac{2B+A}{2B_1+A}, \frac{3B+A}{3B_1+A}, \frac{4B+A}{4B_1+A}, \dots \text{ou } \frac{C}{C_1}$$

uma fracção qualquer cujo valor se achasse comprehendido entre os dois termos consecutivos da serie e cujo denominador fosse menor que os denominadores desses termos.

Tomando a differença entre essas fracções duas a duas e notando que $BA_1 - AB_1 = 1$ temos :

$$\frac{B_1 + A_1}{B_1 + A_1} - \frac{A_1}{A_1} = \frac{1}{A_1(B_1 + A_1)} \cdot \frac{2B_1 + A_1}{2B_1 + A_1} \cdot \frac{B_1 + A_1}{B_1 + A_1}$$

$$= \frac{1}{(B_1 + A_1)(2B_1 + A_1)}$$

$$\frac{3B_1 + A_1}{3B_1 + A_1} - \frac{2B_1 + A_1}{2B_1 + A_1} = \frac{1}{(2B_1 + A_1)(3B_1 + A_1)}$$

$$\frac{C_1}{C_1} - \frac{3B_1 + A_1}{3B_1 + A_1} = \frac{1}{C_1(3B_1 + A_1)}$$

Este resultado nos mostra : 1º que as fracções que constituem a serie vão augmentando, pois que as differenças entre ellas tomadas duas a duas são sempre positivas: 2º que sendo essas differenças iguaes a unidade dividida pelo producto dos denominadores das fracções consideradas, podemos provar de um modo identico ao que fizemos anteriormente que é impossivel achar-se comprehendida entre duas fracções consecutivas dessa serie uma outra fracção qualquer cujo denominador se ache comprehendido entre os denominadores dessas fracções, isto é, cujo denominador seja menor que o maior dos denominadores das duas fracções consideradas ; 3º finalmente, que sendo todas as fracções consideradas menores que o verdadeiro valor da quantidade M , e sendo a fracção $\frac{B}{B_1}$ maior que esta quantidade, a aproximação que se obtem tomando uma dessas fracções para o verdadeiro valor de M será tal, que a differença entre a fracção considerada e esta quantidade será sempre menor que a differença entre a mesma fracção e $\frac{B}{B_1}$.

Tomando a differença entre cada uma das fracções da serie considerada e $\frac{B}{B_1}$ temos.

$$\frac{A}{A_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{A_1 B_1}, \quad \frac{B+A}{B_1+A_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{B_1(B_1+A_1)},$$

$$\frac{2B+A}{2B_1+A_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{B_1(2B_1+A_1)}$$

$$\frac{3B+A}{3B_1+A_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{B_1(3B_1+A_1)}, \quad \frac{C}{C_1} - \frac{B}{B_1} = \frac{1}{B_1 C_1}$$

As differenças, como vemos, neste caso são tambem iguaes a unidade dividida pelo producto dos denominadores das fracções respectivas e, portanto, poderemos provar do mesmo modo que anteriormente que é impossivel que entre qualquer uma das fracções da serie considerada e a fracção $\frac{B}{B_1}$ possa achar-se comprehendida uma outra fracção cujo denominador seja menor que o denominador da fracção considerada; donde se conclue que qualquer uma das fracções consideradas nos dá o valor de M com uma aproximação muito maior do que a que obteriamos tomando para este valor uma outra fracção qualquer de denominador menor, isto é, expressa em termos mais simples.

Os mesmos raciocinios que temos até agora feito relativamente as fracções $\frac{A}{A_1}$ e $\frac{C}{C_1}$, e suas intermediarias empregariamos para as fracções $\frac{C}{C_1}$ e $\frac{E}{E_1}$, $\frac{E}{E_1}$ e $\frac{D}{D_1}$ etc no caso em que d , f , etc fossem maiores que a unidade.

A' outra serie $\frac{B}{B_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{F}{F_1}$, etc podemos applicar tudo o que acabamos de estabelecer em relação a serie $\frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}$ etc.

Assim, se os numeros c, e , etc forem maiores que a unidade poderemos inserir entre as fracções $\frac{B}{B_1}$ e $\frac{D}{D_1}, \frac{D}{D_1}$ e $\frac{F}{F_1}$, etc diferentes fracções intermediarias, todas maiores que M , mas que irão continuamente diminuindo aproximando-se cada vez mais desta quantidade.

Qualquer uma dessas fracções tomada para valor da quantidade M , nos dá uma aproximação muito maior do que a que daria uma outra fracção qualquer expressa em termos mais simples.

Se a tambem fôr um numero maior que a unidade podemos ainda collocar antes de $\frac{B}{B_1}$ as fracções $\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3} \dots \dots \frac{aA+1}{a}$ ou $\frac{B}{B_1}$ fracções que gosarão das mesmas propriedades que as *intermediarias* anteriores.

Deste modo temos as duas seguintes series de fracções convergindo para a quantidade M .

Fracções crescentes e menores que M :

$$\frac{A}{A_1}, \frac{B+A}{B_1+A_1}, \frac{2B+A}{2B_1+A_1}, \text{ etc}$$

$$\frac{bB+A}{bB_1+A_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D+C}{D_1+C_1}, \frac{2D+C}{2D_1+C_1}, \text{ etc}$$

$$\frac{dD+C}{dD_1+C_1}, \frac{E}{E_1}, \frac{F+E}{F_1+E_1}, \text{ etc}$$

Fracções decrescentes e maiores que M :

$$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}, \text{ etc}$$

$$\frac{aA+1}{a}, \frac{B}{B_1}, \frac{C+B}{C_1+B_1}, \frac{2C+B}{2C_1+B_1}, \text{ etc}$$

$$\frac{cC+B}{cC_1+B_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{E+D}{E_1+D_1}, \text{ etc}$$

Para estas series devemos distinguir dois casos :
 1º M é irracional ou transcendente : 2º M é racional e igual a uma fracção qualquer $\frac{L}{N}$: no primeiro caso as duas series acima serão infinitas pois que nesse caso a serie $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \text{ etc}$ é infinita : no segundo a serie $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \text{ etc}$ será limitada e terá para ultimo termo a fracção $\frac{L}{N}$ que necessariamente tambem terminará uma das duas series acima, e a outra poderá sempre prolongar-se ao infinito, como vamos ver.

Supponhamos que c seja o ultimo denominador da fracção continua; neste caso a serie

$$\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1}, \frac{E}{E_1}, \text{ etc}$$

será limitada pela fracção $\frac{D}{D_1}$ que limitará tambem a serie das fracções maiores que M. A serie das fracções menores que M ficará naturalmente limitada pela fracção $\frac{C}{C_1}$ que precede a $\frac{D}{D_1}$; mas nós podemos continuar-a ao infinito se considerarmos que o denominador d que deveria seguir-se ao ultimo denominador

e é infinito, de sorte que a fracção $\frac{E}{E_1}$ que segueria a $\frac{D}{D_1}$ na serie das fracções principaes $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}$, etc seria $\frac{\infty D + C}{\infty D_1 + C_1} = \frac{D}{D_1}$; ora é claro que sendo $d = \infty$ podiamos, pela lei das fracções intermediarias, inserir entre as fracções $\frac{C}{C_1}$ e $\frac{E}{E_1}$ uma infinidade de fracções intermediarias que seriam:

$$\frac{D+C}{D_1+C_1}, \frac{2D+C}{2D_1+C_1}, \frac{3D+C}{3D_1+C_1}, \text{ etc}$$

e assim prolongar ao infinito a serie de fracções menores que M collocando nessa serie depois de $\frac{C}{C_1}$ essas fracções intermediarias.

Pelo methodo que acabamos de expôr podemos reduzir a fracções continuas nem só os numeros decimaes como tambem as quantidades incommensuraveis, expediente este que vantajosamente emprega-se na avaliação aproximada das grandezas.

Como os numeros decimaes exprimem um valor aproximado, augmentando de uma unidade o ultimo algarismo do numero considerado, este numero assim augmentado e o numero dado constituirão os dois limites entre os quaes deve achar-se o valor que se procura determinar.

Isto feito, transformão-se os dois numeros decimaes obtidos em fracções ordinarias e reduzem-se estas a fracção continua, considerando nos desenvolvimentos achados apenas os termos que tiverem respectivamente o mesmo denominador.

Supponhamos que se procura determinar a relação

entre a circumferencia e o diametro. Tomando para essa relação o valor aproximado dado por Viète 3, 14 1592 6 e augmentando o ultimo algarismo de uma unidade temos 3, 1 4 1 5 9 2 7.

O verdadeiro valor da relação acha-se comprehendido entre estes dois limites. Reduzindo estes dois numeros á fracções ordinarias e transformando estas em fracção continua teremos para parte commum aos dois desenvolvimentos :

$$3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{22}{7}$$

Calculando as differentes reduzidas acharemos $3, \frac{22}{7}$

$\frac{333}{106}$, $\frac{335}{113}$. A segunda reduzida foi o valor dado por Archimedes para essa relação ; em virtude do que estabelecemos, commetteu elle, portanto, nessa avaliação um erro comprehendido entre $\frac{1}{742}$ e $\frac{1}{791}$. Adriano Metius deu para valor da relação a quarta reduzida e, portanto, commetteu um erro comprehendido entre

$$\frac{1}{3740526} \text{ e } \frac{1}{3739936}$$

Vamos ver finalmente, como se desenvolve as quantidades irrationaes em fracções continuas.

Supponhamos que se quer desenvolver a raiz quadrada de 2 em fracção continua. A raiz quadrada de 2 está comprehendida entre 1 a 2 e por conseguinte podemos igualal-a a uma expressão composta de uma parte inteira igual a 1 e de uma parte fraccionaria indeterminada ; esta expressão constituirá uma primeira aproximação.

$$(1) \quad (2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{x} \text{ donde } x = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{2}} - 1} + 1$$

Fica a questão reduzida a calcular um valor aproximado do x que substituído na expressão (1), nos dê um valor mais aproximado de $(2)^{\frac{1}{2}}$. O valor de x está compreendido entre 2 e 3; nós podemos, portanto, igualar essa quantidade a uma expressão composta de uma parte inteira igual a 2 e de uma parte fraccionaria indeterminada o que nos dá

$$x = (2)^{\frac{1}{2}} + 1 = 2 + \frac{1}{x} \text{ donde } x' = \frac{1}{(2)^{\frac{1}{2}} - 1} = (2)^{\frac{1}{2}} + 1$$

Fica reduzida a questão a determinar um valor aproximado de x' que substituído no de x nos daria um outro mais aproximado d'esta quantidade, que por sua vez substituído na expressão (1) nos daria um valor mais aproximado de $(2)^{\frac{1}{2}}$.

Procedendo com x' do mesmo modo que fizemos com x temos $x'' = 2 + \frac{1}{x'}$ e assim por diante; do mesmo modo obteríamos $x''' = 2 + \frac{1}{x''}$ etc

Fazendo as substituições temos :

$$(2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{etc}$$

Este exemplo basta para deixar patente a marcha a seguir para determinar o desenvolvimento em fracção continua equivalente a uma quantidade irracional qualquer.

O desenvolvimento da raiz quadrada de uma quantidade que não é um quadrado perfeito, apresenta a propriedade notavel de ser periodico, isto é, os deno-

minadores das fracções integrantes são sempre os mesmos ou se repetem periodicamente. periodicidade que se torna de mais a mais complexa a proporção que as quantidades consideradas vão sendo mais compostas.

Euler calculou uma taboa contendo o desenvolvimento em fracção continua da raiz quadrada de todos os numeros inteiros não quadrados perfeitos desde 2 até 120, taboa que se encontra nas notas de Lagrange á Algebra de Euler.

Assim caracterizado o desenvolvimento em fracção continua nós passamos a occupar-nos com o estudo do calculo indeterminado do 1º gráo.

II

Quando apreciamos o calculo determinado do 1º gráo, nós vimos que a algebra directa, com os recursos de que dispõe, resolve completamente o problema geral que o caracteriza; vamos agora mostrar que ainda na segunda parte do calculo do 1º gráo o problema geral do calculo indeterminado fica plenamente resolvido.

Como já tivemos occasião de dizer o calculo indeterminado do 1º gráo é caracterizado pelo facto de ser o numero de equações ou modos de relação distinctos entre variaveis e constantes, inferior ao numero de variaveis.

A este respeito a antiguidade nos apresenta sobre tudo os trabalhos de Diophante. Embora numerosos, os trabalhos d'este sabio, não forneceram á mathematica nenhum dos methodos geraes que conhecemos, para resolução do problema indeterminado, os quaes só mais tarde apparecem com os trabalhos de Bachét de Meziriac, Fermat, Euler e Lagrange.

Desde então ficou completo o estudo do calculo indeterminado do 1º gráo, e ainda mais firmada a difficuldade crescente do problema considerado para gráos superiores ao 1º, onde torna-se patente a insufficiencia dos recursos da algebra directa.

Tendo em vista o facto que caracteriza o calculo indeterminado do 1º gráo, nós podemos formular o seu problema geral do seguinte modo: Dado um systema de m equações a n variaveis, sendo n maior que m , determinar os valores que substituidos respectivamente em logar das variaveis satisfaçam as equações dadas.

Assim estabelecido o problema geral, a questão, como no calculo determinado, consiste em decompor em elementos simples o facto geral complexo por elle traduzido; estudar directamente o facto mais simples d'entre os que resultarem d'esta decomposição e procurar depois um modo de reduzir todos os outros casos complexos a dependerem de um maior ou menor numero deste caso fundamental. O estudo, pois, d'esta questão, apresenta naturalmente duas partes distinctas: a primeira consistindo na elaboração dos processos empregados para resolver o caso fundamental, a segunda consistindo na apreciação dos meios por que todos os mais aspectos de indeterminação se reduzem a este ultimo caso.

O enunciado do problema geral nos deixa immediatamente ver que elle comporta diversos gráos de complicação, pois que a differença entre o numero de equações e incognitas pode ser de 1, 2, 3, 4 etc unidades. Se a differença é igual a 1 a indeterminação é do 1º gráo, se é igual a 2, a indeterminação é do 2º gráo e assim por diante. N'estes differentes gráos de indeterminação ainda a questão comporta

uma decomposição. Assim é que no 1º gráo a indeterminação pode se apresentar por uma só equação a duas incognitas, que será o caso fundamental mais simples da decomposição do problema geral, por um systema de duas equações a 3 incognitas etc ; no segundo gráo, do mesmo modo, a indeterminação pode se apresentar por uma equação a 3 incognitas, por duas equações a 4 incognitas, etc e assim para os demais gráos de indeterminação.

A primeira parte do nosso estudo consiste, pois, na resolução do caso fundamental representado por uma equação do 1º gráo a duas incognitas.

Para simplificar a questão nós nos limitamos ao caso verdadeiramente usual em que as soluções procuradas são sujeitas á condição de serem inteiras, ficando assim excluídas as soluções fraccionarias.

Seja $ax + by = c$ (1) a equação dada, sendo a , b , e c inteiros, pois caso não sejam pode-se sempre obter isto pelas transformações proprias ao calculo determinado. Se as constantes a , b e c têm um factor commun deve-se eliminá-lo pela divisão ; se o factor só é commun a b e a , as soluções inteiras são impossiveis, pois que o 2º membro seria sempre fraccionario, quaesquer que fossem os valores inteiros dados as variaveis, e a equação não poderia ser satisfeita. Supponhamos, pois, d'aqui por diante os coefficients a e b primos entre si ;

Seja $a < b$ na equação considerada. Resolvendo esta equação em relação a y , temos : $y = \frac{c - ax}{b}$ (2). Dividindo a por b e representando por q e r o quociente e o resto respectivos, temos : $a = bq + r$; substituindo este valor na equação (2) temos :

$$y = \frac{c - (bq + r)x}{b} = \frac{c - bqx - rx}{b} = -qx + \frac{c - rx}{b} \quad (3)$$

Ora, tendo-se por fim determinar os valores inteiros de y correspondentes aos valores inteiros de x , e achando-se o valor de y decomposto em duas partes, uma inteira, $-qx$, para todos os valores inteiros de x e outra fraccionaria, fica a questão reduzida a determinar quaes os valores de x que tornão inteira esta ultima parte. Representando por z o quociente $\frac{c-rx}{b}$ temos: $\frac{c-rx}{b}=z$; d'onde $c-rx=bz$ (4). E' preciso, pois, determinar as soluções inteiras da equação (4).

Se r fosse igual á unidade esta equação teria a forma $x+bz=c$. e então a questão estaria resolvida, porque esta ultima equação nos daria os valores inteiros de x correspondentes aos valores inteiros directamente attribuidos a z , e estes valores de x substituidos na equação (3) nos darião os valores inteiros correspondentes de y .

Não sendo, porém, $r=1$, a questão consiste em repetir para com a equação (4) a mesma transformação empregada para com a equação (1).

Resolvendo, pois, a equação (4) em relação a x , temos: $x=\frac{c-bz}{r}$ (6). Dividindo b por r e representando por q' e r' o quociente e o resto respectivos, temos: $b=rq'+r'$: valor este que substituido na formação (6) nos dá;

$$x = \frac{c - (rq' - r')z}{r} = \frac{c - rq'z - r'z}{r} = q'z + \frac{c - r'z}{r} \quad (7)$$

Como o fim que se tem em vista é determinar os valores inteiros de x correspondentes aos valores inteiros de z , é claro que a questão semelhantemente á anterior, acha-se reduzida a determinar quaes os valores inteiros de z que tornam inteira a segunda parte

do valor de x , isto é, a determinar as soluções inteiras da equação $r'z + rz' = c$ (8), que se obtém fazendo

$$z = \frac{c - r'z'}{r}$$

Se r' fosse igual a unidade estava a questão resolvida: mas não se realisando esta hypothese procederemos com a equação (8) do mesmo modo por que fizemos com as anteriores, e teremos: $z = \frac{c - rz'}{r'}$ (9)

$$z = \frac{c - (r'q'' + r'')z'}{r'} = \frac{c - r'q''z'}{r'} = -q''z' + \frac{c - r''z'}{r'} \quad (10)$$

Fica a questão reduzida a determinar os valores interiores de z' que tornam inteira a segunda parte do valor de z , isto é, a determinar as soluções inteiras da equação $r''z' + r'z'' = c$ (11), equação esta que tratada do mesmo modo que as precedentes daria lugar a introdução de uma nova indeterminada; e assim por diante, repetindo successivamente a mesma transformação, chegaríamos afinal a uma equação em que o coefficiente de uma das incognitas seria igual a unidade, isto é, chegaríamos, finalmente a reduzir a questão á determinação das soluções inteiras de uma equação de forma $ax_1 + y_1 = c$. Este resultado será sempre obtido, pois, que os coefficientes das diferentes variaveis auxiliares são respectivamente os restos successivos, r, r', r'' etc, que se obtém, praticando entre os coefficientes a e b da equação primitiva uma serie de divisões analogas á indagação do maior divisor commum, operação esta que, numericamente, chega sempre a apresentar uma divisão em que o resto é a unidade.

Suppondo, por exemplo, $r'' = 1$ a equação (11) nos dá $z' = r'z'' + c$ (12). Attribuindo nesta equação a z''

todos os valores inteiros possíveis obteríamos os valores inteiros de z' , que substituídos na equação (10) nos dariam todos os valores inteiros de z , pois que esses valores de z' substituídos no segundo termo do segundo membro d'aquella formação dão sempre para resultado uma quantidade inteira. Todos os valores de z assim determinados substituídos na formação (7) nos darião os valores inteiros de x , e estes, finalmente, substituídos na formação (4) nos dariam os valores inteiros de y .

A equação proposta $ax + bx = c$, portanto, tem uma infinidade de soluções inteiras.

Se em vez de termos chegado a um resto igual a unidade chegassemos a um resto igual a zero este resultado nos indicaria a existencia de um factor commum entre a e b , que seria o divisor da ultima divisão. Representando este factor por r'' e soppondo $r' = kr''$ a equação (11) nos dará $z' = \frac{c - r'z''}{r''} =$

$$-kz'' + \frac{c}{r''};$$

Resultado que nos deixa vêr claramente que só no caso em que o factor r'' é commum a todos os termos da equação (1) é que esta equação poderá ter soluções inteiras, como já tínhamos estabelecido anteriormente.

Para resolvermos, portanto, a equação (1) estabelecemos o seguinte systema de equações:

$$y = -qx + z \quad (1) \quad x = -q'z + z' \quad (2)$$

$$z = -q''z' + z'' \quad (3) \quad z' = -r'z'' + c \quad (4)$$

systema que se prolongaria se não tivessemos feito a hypothese de $r'' = 1$.

Para obter os valores inteiros de x e y em formação

dos valores inteiros directamente attribuidos a ultima indeterminada auxiliar z'' , procede-se do seguinte modo:

Substituindo na equação (1) z' pelo seu valor (4) temos $z = -q''(-r'z'' + c') + z''$ (5); substituindo na equação (2) z' e z pelos seus valores (4) e (5) temos:

$$x = -q'[-q''(-r'z'' + c') + z''] + (-r'z'' + c) = - (q'q''r' + q' + r')z'' + (1 + q'q'')c \quad (6)$$

Substituindo na equação (1) x e z pelos seus valores (6) e (5) temos:

$$y = -q[-(q'q''r' + q' + r')z'' + (1 + q' + q'')c'] + -q''(-r'z'' + c') + z'' = (qq'q''r' + qq' + qr' + +q''r' + 1)z'' - (qq'q'' + q'' + q)c \quad (7)$$

Reciprocamente se eliminarmos entre as equações (7) e (6) a variavel z'' obteremos a equação primitiva $ax + by = c$. A solução da questão consiste, pois, em substituir esta ultima equação pelas duas primeiras onde cada uma das variaveis se acha com o coefficiente reduzido á unidade.

Para passar das equações (7) e (6) á equação primitiva nós vamos simplificar as nossas equações substituindo os coefficientes das ultimas indeterminadas nas equações (4) e (7) respectivamente pelos coefficientes b e a das variaveis na equação primitiva. Consideremos as equações já obtidas $a = bp + r$ $b = rq' + r'$, $r = r'q'' + 1$ (a). Substituindo na expressão de b , r por seu valor dado pela ultima equação, temos: $b = q'q''r' + q' + r'$; substituindo b e r por seus valores na expressão de a temos: $a = qq'r'q'' + qq' + +qr' + q''r' + 1$.

As equações (6) e (7) tomão, pois, as formas:

$$x = -bz'' + (1 + q'q'')c, \quad y = az'' - (qq'q'' + q'' + q)c \quad (8).$$

Eliminando agora z'' entre estas duas equações temos: $ax + by = [a + aq'q'' - bqq'q'' - bq'' - bq]c$. As equações (a) nos dão $bq = rqq' + r'q$, $bq'' = r'q'q'' + r'q'' = r'q'q'' + r - 1$, $aq'q'' = bqq'q'' + r'q'q''$, $a = bq + r = rqq' + r'q + r$.

Substituindo no coefficiente de c estes valores e reduzindo obtem-se para resultado: $ax + by = c$.

As equações (8) nos mostram que os coefficientes das variaveis na equação primitiva se achão nos valores finaes ligados a ultima variavel z'' de modo inverso, isto é, o coefficiente a de x na equação primitiva é o coefficiente da variavel final no valor de y , e o coefficiente b de y na equação primitiva é o coefficiente de z'' no valor de x .

Ora, compondo-se os valores de x e y dados pelas equações (8) de uma parte constante e de uma parte variavel, constituida pelo producto de um factor variavel z'' e de um factor constante a ou b , é claro que quando dermos a z'' valores inteiros, os valores de x e y constituirão progressões arithmeticas, sendo em cada uma d'ellas a razão igual ao coefficiente da outra incognita na equação primitiva. Para verificar esta lei representemos $1 + q'q''$ por M , e $-(qq'q'' + q)$ por N temos: $x = Mc - bz''$, $y = Nc + az''$.

Dando agora a z'' valores inteiros: 0, 1, 2, 3, 4, 5...
temos: $x = Mc, Mc - b, Mc - 2b, Mc - 3b$ etc.

$$y = -Nc, Nc + a, Nc + 2a, Nc + 3a \text{ etc.}$$

Dando a z'' valores negativos: -1, -2, -3, -4...
temos: $x = Mc + b, Mc + 2b, Mc + 3b$ etc.

$$y = Nc - a, Nc - 2a, Nc - 3a \text{ etc.}$$

Esta lei pode ser directamente obtida com facilidade do seguinte modo: Supponhamos que A e B sejam dois valores correspondentes a x e y , e que satis-

fazem a equação dada $ax + by = c$ (1). Substituindo x e y por estes valores temos : $aA + bB = c$. Subtraindo esta igualdade membro a membro da equação (1) temos $a(x - A) + b(y - B) = 0$. Resolvendo esta equação em relação a y : $y = B + a \frac{a(A - x)}{b}$ (2); resultado que nos mostra que os valores de y serão inteiros se $a(A - x)$ for divisível por b . Ora sendo a supposto primo com b , esta divisão só será exacta sendo $(A - x)$ um multiplo de b ou, em linguagem algebrica, se tivermos $A - x = bz$, sendo z um numero inteiro qualquer.

Esta ultima equação nos dá $x = A - bz$ (3). Este valor substituido na expressão (2) de y nos dá $y = B + az$; (3) formulas que traduzem a lei acima obtida, nos indicando que se dermos a z valores inteiros, os valores inteiros de x e y constituirão duas progressões arithmeticas, sendo a razão de cada uma d'ellas o coefficiente da outra incognita na equação dada.

Conhecida esta lei a questão da resolução do caso fundamental fica limitada á determinação da primeira solução, sendo as outras obtidas pelas formulas (3) que traduzem a lei que liga entre si todos os valores pedidos.

Este facto nos permite dispensar toda a phase de transformação que carecterisa o methodo que estudamos, desde que a simplicidade da equação dada é sufficiente para com facilidade deixar obter por tentativas a primeira solução binaria. Se na equação dada tivermos, por exemplo $c = 0$, isto é, se tivermos $ax + by = 0$, a simples inspecção nos mostra que ella é satisfita para $x = 0$ e $y = 0$. Fazendo, pois, nas equações (3) $A = 0$ e $B = 0$ temos : $x = bz$, $y = az$, formulas

que nos dão immediatamente os valores inteiros de x e y fazendo-se $z = 1, 2, 3, 4$ etc.

Se tivermos na equação dada $c = ma$, sendo m um numero inteiro, a simples inspecção da equação $ax + by = ma$, nos mostra que ella é satisfeita para os valores $x = m, y = 0$. Fazendo nas equações 3) $A = m, B = 0$, as formulas que nos dão todas as outras soluções são: $y = az, x = m - bz$.

Se, finalmente, c tivesse a forma $nb \pm ma$, sendo n e m numeros inteiros quaesquer, a inspecção da equação $ax + by = nb \pm ma$ nos daria immediatamente a primeira solução $x = \pm m, y = n$, e as formulas $x = \pm m - bz$ e $y = n + az$, nos darião todas as outras soluções.

Nos casos tambem em que os coefficients de x e y são muito pequenos pode-se com facilidade obter por tentativas, o primeiro par de soluções.

Resolvendo a equação (1) em relação a x temos $x = \frac{c - by}{a}$. O meio consiste em procurar qual o valor de y que substituido nesta formula torna $c - by$ divisivel exactamente por a , o que é simples sendo c e b sufficientemente pequenos.

Se tivermos $b = 3, a = 2, c = 21$, o valor de x será $x = \frac{21 - 3y}{2}$. Fazendo-se successivamente nesta formula $y = 0, 1, 2, 3$ etc. teremos:

$$x = \frac{12}{2}, \quad x = \frac{18}{2} = 9.$$

Os dois valores inteiros, das variaveis são portanto: $y = 1, x = 9$. Estes valores substituidos nas formulas (3) nos dão todas as outras soluções inteiras da equação considerada.

Restringidos áos numeros inteiros e positivos as soluções da equação indeterminada, o processo que deixamos estudado exige um aperfeiçoamento systematico o qual consiste no estabelecimento dos limites entre os quaes se devem achar os valores inteiros da ultima indeterminada ou variavel independente, capazes de dar para x e y valores inteiros e positivos, quando substituidos nas formações (3). Estas formações escriptas sob as formas equivalentes:

$$x = b\left(\frac{A}{b} - z\right), \quad y = a\left(z - \frac{-B}{a}\right),$$

nos deixam ver que os valores de x e y só serão inteiros e positivos para os valores de z menores que $\frac{A}{b}$ e maiores que $-\frac{B}{a}$. As soluções inteiras e positivas são,

pois, em numero limitado e mesmo podem não existir como acontece no caso de se acharem os limites de taes valores comprehendidos entre dois numeros inteiros consecutivos.

Para obter o numero de soluções inteiras e positivas que admite a equação dada, supponhamos m e n dois numeros inteiros respectivamente inferiores de uma unidade aos limites $\frac{A}{b}$ e $-\frac{B}{a}$. Os valores inteiros de z comprehendidos entre $-\frac{B}{a}$ e $\frac{A}{b}$ serão $n+1, n+2, n+3, \dots, m$, e o numero de soluções inteiras e positivas será $m-n$. Tomando a differença entre $\frac{A}{b}$ e $-\frac{B}{a}$ temos:

$$\frac{A}{b} + \frac{B}{a} = \frac{Aa+Bb}{ab} = \frac{c}{ab}.$$

Representando por q a parte inteira do quociente $\frac{c}{ab}$ o numero de soluções inteiras e positivas da equa-

ção dada será $q+1$, isto é, será igual a parte inteira do quociente da divisão do termo conhecido pelo producto dos coefficients das variaveis, augmentada de uma unidade.

Se a equação dada tiver a forma $ax-by=c$, o processo de resolução é o mesmo, mas as formulas

finaes serão $x=A+bz$ $y=-B+az$ ou $x=b\left(z-\frac{-A}{b}\right)$.

$$y=a\left(z-\frac{B}{a}\right)$$

Estas expressões nos mostram que neste caso os valores de x e y serão inteiros e positivos para todos os valores de z superiores á maior das duas quantidades $-\frac{A}{b}$ e $\frac{B}{a}$, isto é, nos mostram que o numero de soluções inteiras e positivas da equação dada é infinito.

Para melhor gravar no espirito o processo que acabamos de estudar nós vamos considerar um exemplo.

O typo especial dos problemas indeterminados apresenta-se no problema que consiste em fazer um certo numero de pagamentos com moedas de diferentes valores. Este problema eminentemente modificavel pode apresentar os diferentes gráus de indeterminação desde que se faça variar convenientemente as especies de moedas e os pagamentos a fazer.

Para o primeiro gráo de indeterminação sob o aspecto mais simples que estamos estudando, a questão pode ser formulada procurando-se, por exemplo por quantos modos diferentes se pode fazer um pagamento de 200 mil reis com moedas de 7 e 12 mil reis.

Designando por x e y o numero de moedas de 7 e 12 mil reis, a equação do problema será:

$$7x + 12y = 200. \quad (1)$$

Para obter desde já o numero de soluções inteiras e positivas que a questão pode admittir bastanos dividir 200 pelo producto 7×12 o que nos dá para quociente 3, se a aproximação é tomada para mais, e 2 se a aproximação é tomada para menos. O problema, pois, só admittit 3 ou 2 soluções.

Resolvendo a equação (1) em relação a x temos:

$$x = \frac{200 - 12y}{7} = 28 - y + \frac{4 - 5y}{7} = 28 - y + z,$$

sendo $z = \frac{4 - 5y}{7}$. Esta ultima equação nos dá

$$y = \frac{4 - 7z}{5} = -z + \frac{4 - 2z}{5} = -z + z', \quad \text{sendo } z' = \frac{4 - 2z}{5}$$

$$\text{Desta relação tira-se } z = \frac{4 - 5z'}{2} = 2 - 2z' - \frac{z'}{2} =$$

$$= 2 - 2z' - z'', \quad \text{sendo } z'' = \frac{z'}{2} \text{ ou } z' = 2z''.$$

Eliminando todas as variaveis auxiliares a excepção da ultima temos: $x = 32 - 12z''$ (1) e $y = 7z'' - 2$ (2)

Os valores de x e y serão inteiros e positivos para os valores de z'' comprehendidos entre $\frac{2}{7}$ e $\frac{8}{3}$, isto é, para os valores 1 e 2 de z'' . Substituindo estes valores de z'' nas formulas (1) e (2) temos, para $z'' = 1$; $x = 20$ $y = 5$; para $z'' = 2$; $x = 8$, $y = 12$. O pagamento pode, pois, ser feito por dois modos: ou

com 20 moedas de 7 mil reis e 5 de 12 mil reis, ou com 8 moedas de 7, e 12 moedas de 12 mil reis.

Tal é o primeiro methodo empregado para resolver o caso fundamental do calculo indeterminado. Elle consiste como vemos, em resolver a equação dada em relação á incognita de menor coefficiente; de compôr pela divisão o valor obtido em duas partes, uma inteira e outra fraccionaria; igualar esta parte fraccionaria, formação da outra variavel, a uma indeterminada auxiliar e resolver a equação obtida em relação á segunda variavel primitiva que n'ella entra, e repetir para com esta equação as mesmas transformações empregadas para com a equação dada, e assim por diante, até chegar á uma equação á duas incognitas em que uma d'ellas tenha o coefficiente igual á unidade.

Obtido isto, elimina-se entre as equações que resultarem todas as variaveis auxiliares, á excepção da ultima, e as equações finaes serão entre as variaveis primitivas, tendo para coefficientes a unidade, e a ultima variavel auxiliar, cujo coefficiente será na equação de y o coefficiente de x da equação dada, e na equação de x o coefficiente de y d'essa mesma equação.

O conhecimento da lei que seguem as soluções inteiras de uma equação do primeiro gráu a duas incognitas, reduzindo a resolução á determinação de um unico valor para cada uma das variaveis x e y , d'onde todas os outros podem ser obtidos mediante as formulas que traduzem essa lei, nem só veio dar ao processo *espontaneo* ou por tentativas uma maior efficacia, simplificando extraordinariamente a indagação, como tambem inspirou ao incomparavel Lagrange, um methodo muito simples

para a determinação d'esta primeira solução, baseado na principal propriedade das fracções continuas.

Seja a equação dada $ax+by=c$, sendo a e b primos entre si. Desenvolvendo $\frac{a}{b}$ em fracção continua, obtém-se um desenvolvimento de numero limitado de termos, que terá para ultima reduzida a propria fracção $\frac{a}{b}$. Representando por $\frac{m}{n}$ a penultima reduzida, temos:

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{na - mb}{nb} = \frac{\pm 1}{nb}, \text{ d'onde } na - mb = \pm 1 \quad (2)$$

Se a reduzida $\frac{m}{n}$ fôr de ordem par se adoptará o signal mais do segundo membro, e o signal menos se fôr de ordem impar.

Considerando o primeiro caso e multiplicando ambos os membros de (2) por c temos: $lca - mcb = c$. A comparação d'esta equação com a equação dada $ax+by=c$, nos mostra que ellas serão identicas se fizermos $x=nc$, $y=-mc$. Estes valores, pois, constituirão uma solução da equação dada.

Obtida esta primeira solução todos as mais nos serão dadas pelas formulas: $x=nc-bz$, $y=-mc+az$.

Se $\frac{m}{n}$ fôr de ordem impar teremos: $nca - mcb = -c$ ou $mcb - nca = c$: a solução para a equação dada será então: $x=-nc$, $y=mc$.

Estudemos um exemplo. Seja $39x - 56y = 11$ a equação dada.

Desenvolvendo $\frac{56}{39}$ em fracção continua temos:

$$\frac{56}{39} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

As duas ultimas reduzidas sendo $\frac{23}{16}$ e $\frac{56}{30}$ e sendo a penultima de ordem par, as soluções procuradas são $x=23 \times 11$, $y=16 \times 11$, isto é, iguaes ao segundo membro da equação dada respectivamente multiplicados pelos termos da penultima reduzida. As outras soluções nos serão dadas pelas formulas $x=23 \times 11 + 56z$, $y=16 \times 11 + 39z$.

São estes os methodos com que resolvemos o caso fundamental mais simples do problema geral do calculo indeterminado.

Comparando os dois methodos que acabamos de estudar vê-se que o ultimo offerece uma serie de operações numericas identicas ao primeiro, pois que exige o desenvolvimento em fracção continua do quociente $\frac{a}{b}$ e aquelle uma serie de divisões identica a que se effectuaria indagando o maior divisor commun entre a e b; o segundo evita a phase algebrica da introduccão das variaveis indeterminadas, e sua eliminação final, a qual ahi é substituida pela operação muito mais simples da formação das reduzidas correspondentes á fracção continua considerada.

O segundo methodo, posterior ao primeiro, lhe é, pois, superior por sua maior simplicidade, embora lhe seja inferior sob o ponto de vista philosophico. O primeiro é um methodo directo, aborda a questão de um modo mais racional, substituindo por uma serie de transformações successivas, a equação dada pelas formulas das variaveis, que traduzem a lei que seguem todas as soluções procuradas; o segundo é um methodo indirecto, e só fornece uma solução da equação primitiva sendo as outras obtidas pela formula analytica da lei dos valores obtida deducti-

vamente ou inductivamente dada pelo primeiro methodo.

Fica assim completamente resolvida a primeira parte do problema geral do calculo indeterminado, representada pela resolução do caso fundamental; a segunda parte, como dissemos, consiste em estabelecer o modo por que se pode reduzir todos os casos complexos a dependerem deste caso simples, sendo então indifferente o methodo empregado para resolver este ultimo.

Como dissemos cada gráu de indeterminação apresenta differentes aspectos. Assim no primeiro gráu o numero de equações e o de incognitas pode variar mantendo-se sempre a differença entre o numero de equações e incognitas igual á unidade. Temos assim no 1º gráu os casos successivamente mais complexos de 2 equações a 3 incognitas, 3 equações a 4 incognitas etc.

Vejamos como todos estes casos se reduzem ao caso fundamental, principiando pelo caso mais simples, de 2 equações a 3 incognitas. Sejam $F(x, y, z)=0$ e $F_1(x, y, z)=0$ as equações dadas. Considerando z como constante na 1ª equação e passando o termo correspondente para o segundo membro teremos: $F_2^*(x, y)=f(z)$ (1). Resolvendo esta equação por um dos methodos obtem-se expressões da forma:

$$x=f_1(z)+mz', \quad y=f_2(z)+nz'$$

sendo z' a ultima variavel auxiliar e m e n os coefficients respectivos de y e x na equação (1). Substituindo estes valores de x e y na segunda equação, o systema dado fica substituido pelo equivalente:

$$x=f_1(z)+mz', \quad y=f_2(z)+nz', \quad F_3(z, z')=0 \quad (2)$$

representando as duas primeiras equações o estado explicito da equação $F(x, y, z)=0$; e a segunda o resultado da substituição dos valores de x e y na outra equação dada.

Fica com este systema a questão reduzida ao caso fundamental representado pela ultima equação, e começa então uma phase retrogada. Resolvendo a equação $F_3(z, z')=0$ teremos para formulas das variaveis $z=M+hz''$, $z'=M_1+h_1z''$, sendo z'' a ultima variavel auxiliar, M e M_1 constantes e h e h_1 os coefficients respectivos de z' e z na equação dada.

Substituindo estes valores nas formulas de x e y que são as equações seguintes do systema (2), temos para systema explicito final :

$$x=L+L_1z'', \quad y=R+R_1z'', \quad z=M+hz'',$$

que nos dará as soluções inteiras das variaveis primitivas, correspondentes aos valores inteiros directamente attribuidos a ultima indeterminada z'' .

Passemos ao caso mais complexo de tres equações a quatro incognitas. Sejam as equações dadas :

$$F(x, y, z, u)=0, \quad F_1(x, y, z, u)=0, \quad F_2(x, y, z, u)=0 \quad (1)$$

Considerando na 1ª equação z e u como constantes e passando os termos correspondentes para o segundo membro, temos uma equação da forma $F_3(x, y)=f(z, u)$, que resolvida nos dará :

$$x=f_1(z, u)+my', \quad y=f(z, u)+ny'$$

Estes valores substituidos nas duas outras equações substituem o systema dado pelo seguinte :

$$x=f_1(z, u)+my', \quad y=f_2(z, u)+ny', \quad F_4(z, u, y')=0 \\ F_5(z, u, y')=0 \quad (2)$$

Fica com este systema a questão reduzida ao caso anterior mais simples de duas equações a tres incognitas.

Considerando y' constante, passando para o 2º membro o termo correspondente e resolvendo a equação F_1 temos:

$z=f_6(y')+ry''$, $u=f_7(y')+sy''$; valores que substituidos no equação F_2 , substitue o systema (2) pelo systema:

$$\begin{aligned} x=f_1(z,u)+my', y=f_2(z,u)+ny', z=f_6(y')+zy'', \\ u=f_7(y')+sy'', F_6(y', y'')=0 \end{aligned}$$

Com este systema fica finalmente a questão reduzida ao caso fundamental representado pela equação F_6 . Esta equação tratada por um dos methodos nos dá:

$$y'=M+hy''', y''=M_1+h_1y'''$$

Estes valores substituidos nas expressões u e z nos dão os valores destas variaveis em formação da ultima variavel y''' ; os valores de z , u e y' assim obtidos, substituidos nas expressões de x e y nos dão estas variaveis em formação d'aquella variavel de modo que o systema final será da forma:

$$\begin{aligned} x=M_2+m_2y''', y=M_3+m_3y''', z=M_4+m_4y''', \\ u=M_5+m_5y''' \end{aligned}$$

Do mesmo modo seria sempre possivel reduzirmos todos os outros aspectos do primeiro gráo de indeterminação ao caso fundamental, por intermedio dos casos anteriores mais simples. Esta apreciação geral do modo por que é feita esta reduçãõ, deixa bem patente o acrescimo rapido de complicação que adquire o calculo pelo simples augmento de uma equação, o que pouco é para lamentar, pois raras

vezes as questões que temos a resolver nos levão a considerar systemas complexos alem do typo ternario.

Passemos á apreciação do 2º gráo de indeterminação. Este caso como o primeiro admite typos mais ou menos complexos, sendo o mais simples uma equação a tres incognitas, depois duas equações a quatro incognitas etc.

Consideremos o caso mais simples de uma equação a tres incognitas. Seja $ax+by+cz=d$ a equação dada, na qual suppremos que a , b e c não têm nenhum factor commun e são numeros inteiros, o que é sempre possivel obter expellindo os denominadores.

Para reduzir este caso ao caso fundamental, basta passar para o segundo membro o termo affecto de uma das variavéis, o que nos dá: $ax+by=d-cz=d^1$, sendo $d^1=d-cz$. Resolvendo em relação a y , temos: $y=\frac{d^1-ax}{b}$. Praticando sobre esta equação as transformações que constituem o primeiro methodo, teriamos finalmente:

$$x=f(d^1)-bz^1, \quad y=f(d^1)+az^1.$$

Substituindo em $f(d^1)$ e $f_1(d^1)$, d^1 pelo seu valor, teremos: $x=f_2(z)-bz^1$, $y=f_3(z)+az^1$; formulas que nos dariam os valores inteiros de x e y correspondentes aos valores inteiros dados a z e z^1 .

Consideremos o segundo methodo. Desenvolvendo $\frac{a}{b}$ em fracção continua e suppondo $\frac{m}{n}$ a penultima reduzida, temos: $an-bm=\pm 1$. Multiplicando ambos os membros por d^1 : $a \times nd^1 - b \times md^1 = \pm d^1$.

Suppondo a reduzida $\frac{a}{b}$ de ordem par, temos: $a \times nd^1 + b(-md^1) = d^1$. A comparação d'esta equação

com a equação dada, nos mostra que a solução procurada é $x=nd'$, $y=-md'$.

Substituindo d' por seu valor, e levando os valores obtidos ás formulas geraes $x=A-bz'$, $y=B+az'$ que nos dão as soluções inteiras do caso fundamental, nós obteríamos as formulas inteiras das variaveis x e y em formação de z e z' .

Disto conclue-se que para effectuar-se na equação dada as transformações que constituem os methodos de resolução de modo a chegar-se ás formulas inteiras das variaveis, não é necessario que o segundo membro da equação seja numericamente determinado.

Feita esta observação, vejamos como se reduz ao caso fundamental o caso mais complexo de duas equações a quatro incognitas. Sejam as equações dadas: $F(x,y,z,u)=0$, $F_1(x,y,z,u)=0$.

Passado na primeira equação o termo conhecido e os termos affectos de z e u para o segundo membro, teremos uma equação da fórmula $F_2(x,y)=f(z,u)$.

Esta equação tratada por um dos methodos, nos daria expressões da fórmula :

$$x=f_1(z,u)+mz', \quad y=f_2(z,u)+nz'$$

Estes valores substituidos na segunda equação, nos dão o systema :

$x=f_1(z,u)+mz'$, $y=f_2(z,u)+nz'$, $F_3(z,u,z')=0$, (1) com o qual fica a questão reduzida ao caso anterior, mais simples, de uma equação a tres incognitas, representada por F_3 .

Reduzindo este caso ao caso fundamental, obtém-se expressões da fórmula :

$$x=f_4(z')+Mz'', \quad u=f_5(z')+M_1z'',$$

as quaes substituidas nas expressões de x e y , nos dão para systema explicito final :

$$x = F_4(z') + Nz'', \quad y = F_5(z') + N_1 z'', \quad z = f_4(z') + Mz'', \\ u = f_5(z') + M_1 z''$$

composto de expressões inteiras das variaveis primitivas em formação das indeterminadas z' e z'' .

Consideremos o terceiro aspecto sob que se pôde apresentar o segundo gráu de indeterminação.

Sejam as equações dadas :

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \quad F_1(x, y, z, u, v) = 0, \quad F_2(x, y, z, u, v) = 0.$$

Passando para o segundo membro da primeira equação os termos conhecidos e os termos affectos de z , u e v , temos : $F_3(x, y) = f(z, u, v)$.

Applicando a esta equação um dos methodos, obtém-se expressões da fórmula :

$$x = f_1(z, u, v) + mz', \quad y = f_2(z, u, v) + nz'$$

as quaes substituidas nas duas outras equações, nos dão o systema :

$$x = f_1(z, u, v) + mz', \quad y = f_2(z, u, v) + nz', \\ F_4(z, u, v, z') = 0, \quad F_5(z, u, v, z') = 0$$

com o qual fica a questão reduzida ao caso anterior mais simples, representado pelas duas ultimas equações.

Passando na equação F_4 para o segundo membro o termo conhecido e os termos affectos de v e z' , obtém-se :

$$F_6(z, u) = f_6(v, z'). \quad \text{Applicando um dos methodos a esta equação; tem-se } z = f_7(v, z') + Mz'', \quad u = f_8(v, z') + M_1 z''.$$

Estes valores substituidos na ultima equação nos dão o systema :

$$x = f_1(z, u, v) + mz', \quad y = f_2(z, u, v) + nz', \quad z = f_7(v, z') + Mz'', \\ u = f_8(v, z') + M_1 z'', \quad F_7(v, z', z'') = 0$$

com o qual fica a questão reduzida ao caso mais simples de uma equação a tres incognitas representado pela equação F_7 .

Resolvendo este caso pelo modo já estudado obtem-se:

$$v = f_9(z'') + Rz''', \quad z' = f_{10}(z'') + R_1 z'''$$

Estes valores substituidos na expressão de u , e z nos dão as expressões inteiras destas variaveis em formação de z'' e z''' ; os valores de v , z' , u e z assim obtidos substituidos nas expressões de x e y nos dão as expressões inteiras destas variaveis em formação das mesmas indeterminadas.

De um modo identico se redusiria todo outro qualquer gráo de indeterminação ao caso fundamental. Nós vemos, que desde que os coefficients das incognitas sejam numericamente dados, é sempre possivel substituir o systema considerado por um outro de equações em que o menor dos coefficients é a unidade, e do qual podem ser obtidas as equações primitivas pela eliminação das variaveis consideradas arbitrarias.

A resolução de um systema indeterminado apresenta, pois, duas phases: uma em que se reduz o caso de indeterminação considerado ao caso fundamental de uma equação a duas incognitas, por meio de todos os casos intermediarios mais simples; outra retrograda em que por substituições sucessivas estabelece-se as formações das variaveis dadas para com a ultima indeterminada auxiliar obtida. No caso, por exemplo, do terceiro gráo de indeterminação, em um systema de tres equações a seis incognitas, a primeira phase consistiria em reduzir este caso ao caso anterior mais simples de duas equações a cinco

incognitas, depois este ao anterior de uma equação a quatro incognitas, o qual reduzido ao caso fundamental nos daria as farmações inteiras de duas variaveis com uma ultima indeterminada auxiliar. A segunda phase consistiria em substituir nos valores anteriormente obtidos, essas duas variaveis pelas suas formulas em formação da ultima indeterminada de modo a obter as formulas inteiras das outras variaveis, ligadas directamente a esta ultima indeterminada.

O problema dos pagamentos, nos dá, convenientemente modificado todo os casos que pode apresentar o calculo indeterminado. O caso, por exemplo, do 1º gráo de indeterminação em um systema de duas equações nos é dado pelo problema : pagar 527 mil reis com 53 moedas de 5, 2, e 7 mil reis. As equações do problema são $x+y+z=53$, $5x+2y+7z=527$.

O caso do 2º gráo de indeterminação seria apresentado no problema : pagar 219 mil reis com moedas de 7, 5, e 2 mil reis. A equação do problema é $7x+5y+2z=219$.

Para ter o segundo aspecto do 2º gráo de indeterminação o problema seria : pagar 421 mil reis com 45 moedas de 3, 7, 5 e 11 mil reis. As equações são :

$$x+y+z+u=45 \quad 3x+7y+5z+11u=521.$$

E assim obter-se-ha todos os outros casos, modificando conveniente o numero de sommas a pagar.

Fica por esta forma completamente resolvido o problema geral do calculo indeterminado do primeiro gráo. Nas questões deste dominio, como vemos, o ponto de vista algebrico combina-se com o ponto de vista arithmetico; a phase de transformação não é, como no calculo determinado, distincto da phase de avaliação

chegando mesmo a solução da equação a ser obtida sem necessitar passar a equação do estado implicito ao estado explicito correspondente, pelo desenvolvimento em fracção continua do quociente entre os coefficients das variaveis.

O estudo que deixamos feito nos mostra que no calculo indeterminado mais que no calculo determinado do 1º gráo, a difficuldade das questões cresce sensivelmente com o simples augmento de uma equação, de modo que nos casos complexos a elaboração da resolução torna-se excessivamente laboriosa, embora sempre possivel. Esta difficuldade se avoluma quando se procura resolver questões identicas relativamente as equações do 2º gráo, onde os resultados obtidos muito longe estão de apresentar a generalidade e simplicidade dos methodos instituidos para o caso do 1º gráo. Quanto as equações de gráos superiores, até hoje tem sido patente a impotencia dos recursos da algebra para sua solução geral.

Nós podemos, pois, desde já ir observando o quanto a facilidade com que podemos formular questões, está longe de corresponder a difficuldade que encontramos em resolver-as, de modo a levar o nosso espirito a comprehender a necessidade absoluta de restringir suas indagações aos casos verdadeiramente uteis, em geral sempre os mais simples.

Capítulo V

Equações do 2º gráo—Methodo de Descartes—Irracionaes singulares—Ma- xima e minima

Na traducção analytica das relações entre os elementos de um facto, que se procura estudar sob o ponto de vista mathematico, podem apresentar-se dois modos de complicação distinctos: um relativo á natureza das relações consideradas, outro relativo ao numero do elementos procurados. Quando o modo de relação que liga entre si os dados da questão e as incognitas é o mais simples possível, e que só se procura determinar um elemento, a equação correspondente é tambem a mais simples possível, isto é, é uma equação do 1º gráo a uma incognita; se a simplicidade do modo de relação mantem-se a mesma e cresce o numero de elementos desconhecidos a questão de calculo complica-se apresentando as equações do 1º gráo a duas, tres, quatro etc. incognitas. Quando mantem se a simplicidade do numero do elementos procurados, isto é, quando se considera uma unica incognita, e varia o modo de relação, a questão do calculo modifica-se tambem, apresentando equações do 2º, 3º, 4º etc. gráo e equações transcendentas a uma só incognita.

Neste caso as difficuldades da questão crescem muito mais rapidamente que no primeiro, e por tal fórma que se as equações do 1º gráo são sempre sus

ceptíveis de solução algebraica, as equações de grãos superiores só o são até a do quarto gráo a uma só incognita. Finalmente as difficuldades do calculo podem crescer muito mais rapidamente variando simultaneamente a natureza das relações e o numero de elementos procurados, e então temos equações do 2º, 3º, 4º, etc grãos e equações transcendentés a duas tres, etc incognitas, para as quaes a solução algebraica está limitada o um muito pequeno numero de casos.

No estudo das equações do segundo gráo, de que nos vamos occupar, devemos distinguir tres casos, o primeiro representado pela equação a uma só incognita, o segundo por duas ou mais equações simultaneas a uma igual numero de incognitas, e finalmente o terceiro caracterizado por um numero de equações inferior ao numero de incognitas. Os dois primeiros constituim o calculo determinado do 2º gráo, sendo a equação a uma só incognita o caso mais simples, o segundo constitue o calculo indeterminado.

N'esta phase do dominio da algebra directa nós devemos restringir systematicamente nosso estudo ao caso mais simples do calculo determinado, representado por uma unica equação, pois que os nossos recursos só nos permittindo a resolução algebraica das equações á uma incognita até o 4º gráo, e sendo em geral, o gráo da equação que resulta da eliminação successiva em um systema dado de equações, igual ao producto dos grãos das equações primitivas, a equação final sobre a qual viria recahir a questão complexa, só em casos muitissimos limitada dos comportaria uma solução algebraica.

Se no calculo do 1º gráo o problema geral fica completamente resolvido, é porque sendo as equações primitivas do 1º gráo a equação que resulta da elimi-

nação das incognitas é sempre do mesmo gráu e, portanto, susceptível de uma resolução algebrica, o que não acontece com os gráus superiores, onde a equação final attinge na maioria dos casos um gráu superior áquelle cuja solução algebrica podemos obter.

Nós poderíamos considerar um systema de duas equações a duas incognitas, pois a equação resultante da eliminação seria do 4º gráu, cuja resolução algebrica conhecemos, mas para os casos mais complexos e para gráus superiores a questão seria insolúvel.

Apresenta-se aqui uma questão importante que convém elucidar: A resolução algebrica das equações quaesquer á uma incognita; tornaria desnecessaria a eliminação?

Para esclarecer este ponto é conveniente firmar o papel philosophico da eliminação no dominio algebrico.

Considerada sob um ponto de vista geral, a eliminação tem por fim separar as incognitas do systema, substituindo o systema primitivo por um outro equivalente de igual numero de equações e incognitas, achando-se cada incognita isolada em uma equação.

Assim, dado o systema de equações quaesquer: $F(x,y)=0$ $F_1(x,y)=0$ (1). a eliminação tem por fim passar d'este systema para o systema equivalente da fórmula: $f(x)=0$, $f_1(y)=0$ (2). Obtido este systema termina a phase eliminativa e começa a phase de pura resolução, que consiste em passar do systema (2) para o systema equivalente:

$x=f_2(a,b,c\dots)$, $y=f_1(a,b,c\dots)$, sendo $a, b, c\dots$ as constantes das equações primitivas.

A eliminação, pois, não é mais que a decomposição do caso complexo representado pelo systema (1) nos casos simples, de equações á uma incognita, representados pelo systema (2), isto é, a eliminação é a relisação do preceito cartesiano no dominio do calculo das equações.

Esta separação das variaveis ou a decomposição do caso complexo nos casos symples que elle comprehende, póde effectuar-se por diversos modos. O mais natural é tirar-se em uma das equações o valor de uma das incognitas em formação da outra e substituir este valor na segunda equação, assim reduzida ao caso simples de uma só incognita; esta equação resolvida e substituido o valor da incognita correspondente na 1ª equação, nos daria um segundo caso simples, que nos permittiria obter a expressão da segunda variavel em formação das constantes.

Este methodo, como vemos, desloca a difficuldade do problema da eliminação, levando-a a depender do problema da resolução das equações a uma incognita. Embora a impossibilidade da sua realisação para a maioria dos casos, elle é plenamente geral, isto é, applicavel a um systema de equações quaesquer.

Referindo-se ao caso complexo de mais de uma equação, diz Comte: Trata-se como sabemos, de fazer antes de tudo a *separação*. Empregando para isto convenientemente o processo simples e geral, felizmente imaginado pelos analyistas, e que consiste em referir uma das incognitas a todas as outras, a difficuldade desapareceria completamente se nós soubessemos resolver algebricamente as equações consideradas, tornando-se *desnecessaria a resolução numerica*.

Esta impossibilidade de effectuar a separação das

variáveis ou a eliminação pela substituição, levou os mathematicos a crearem para isso methodos independentes da resolução das equações. Estes methodos, porem, nem só são scientificamente impraticaveis para a maioria dos casos complexos, pelas innumeradas difficuldades de calculo que por sua propria natureza fazem surgir, como tambem tem a desvantagem *logica* sobre o processo por substituição de não serem applicaveis a systemas de *equações quaesquer*.

Logicamente, pois, nós podemos considerar a separação ou eliminação por substituição como o unico modo geral e applicavel *a todos os casos*, embora *praticamente* a imperfeição do problema da resolução das equações só nos permitta realisal-o em casos muito restrictos.

Comte não affirmou que a resolução algebraica das equações quaesquer tornaria desnecessaria a theoria da eliminação. O que elle disse foi que se isto se podesse obter a eliminação, isto é, *a decomposição do caso complexo em casos simples*, ou *a separação das incognitas* seria sempre feita pelo processo por substituição, desaparecendo *a difficuldade da decomposição* por ter desaparecido *a difficuldade da resolução das equações*.

Mesmo assim, porém, ainda haveria necessidade de manter no dominio mathematico o estudo da eliminação pelos processos independentes da resolução, como sendo, na phrase de Comte, *logicamente util para mostrar a possibilidade de eliminar sem resolver* (Synth. Subj—410).

Quando Comte afirma que eliminar é sempre reductivel a resolver, refere-se exclusivamente ao processo por substituição, por ser o unico applicavel a todos os casos, unico geral, e com o qual a *difficuldade* da

da eliminação ou *separação*, é sempre reductivel á *difficuldade da resolução*.

Por conseguinte, a phase algebraica de transformação em que se realisa a separação das incognitas, isto é, a phase de eliminação, ou effectuada por substituição ou por outro qualquer methodo, representa sob o ponto de vista phylosophico um papel perfeitamente distincto da resolução de uma equação.

Se assim não fosse, no calculo do 1º gráo, onde a difficuldade proveniente da resolução desaparece inteiramente, Comte não estabeleceria a distincção entre a resolução e o facto logico da separação ou a phase de eliminação.

A resolução da equação é necessaria para dar a expressão da incognita que se quer eliminar, mas o que caracteriza a separação é a substituição d'esta expressão, pois é por ella que desaparece da segunda equação a incognita substituida, e d'ahi a denominação de processo por *substituição*. A eliminação tem sempre logar entre duas equações enquanto que a resolução é sempre relativa a uma unica equação a uma só incognita, quer esta seja realmente unica, quer haja outras que na resolução recebem um character temporario de constantes. A resolução, pois, suppõe sempre a questão redusida ao caso simples fundamental de uma só incognita, e a eliminação consiste na decomposição do caso complexo nos casos simples que elle comprehende.

As equações do segundo gráo a uma incognita podem ser representadas pela formula geral $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

Este caso apresenta um typo mais simples representado pela equação incompleta $ax^2 + c = 0$ (2) cujo estudo foi feito no ultimo seculo da evolução grega

e mais tarde completado pela elaboração arabe com o estudo do typo completo trinomio. Historicamente, pois, o estudo da equação (2) deve preceder ao da equação (1); e tambem dogmaticamente, pois, a equação (2) representa um caso mais simples, o qual nós podemos considerar logicamente comprehendido no caso (2) de onde a abstracção nos permittio separal-o só considerando dois termos. Assim apreciado o estudo da equação do segundo gráo apresenta duas partes: uma em que se resolve directamente o caso simples da equação incompleta: outra em que se institue methodos proprios para referir a resolução do caso complexo, representado pela equação completa, ao caso simples fundamental.

Consideremos este ultimo caso. Se a equação incompleta apresenta a forma $x^2=b$, basta uma simples extracção de raiz para nos dar immediatamente o valor de x . Teremos, pois: $x=b^{\frac{1}{2}}$. Se a equação incompleta apresenta-se mais complicada, então a separação final da variavel exige antes as transformações proprias ao caso do 1º gráo, isto é, a transposição dos termos, sua reducção ou composição e, finalmente, a separação da variavel.

Seja por exemplo a equação :

$$x^2 + \frac{c+ab}{a^2-b^2} + \frac{a-c}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} x^2$$

A primeira transformação consiste na passagem dos termos affectos da variavel para um dos membros e dos termos constantes para o outro, o que nos dá :

$$x^2 \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} x^2 = \frac{c+ab}{a^2-b^2} \frac{a-c}{a+b}$$

A segunda consiste na composição dos termos, isto

ó, reducção ao mesmo denominador e reducção dos termos semelhantes, o que nos dá :

$$-2b^2x^2 = -(a^2 + c - ac + cb).$$

Finalmente a terceira transformação consiste em separar a variavel, desembaraçando-a do coeffericiente, o que dá:

$$x^2 = \frac{a^2 + c - ac + cb}{2b^2}$$

Preparada por esta forma a nossa equação, uma simples operação de extracção de raiz quadrada completa a solução.

Assim apreciado o modo por que se resolve o caso fundamental, passemos ao caso caso complexo. Este estudo apresenta duas phases : uma em que por meio das transformações já citadas proprias ao 1º gráu, se reduz a equação dada á fôrma inteira geral $ax^2 + bx + c = 0$; e outra em que se reduz a resolução desta equação á resolução do caso incompleto já estudado.

Esta reducção comporta dois modos historicamente separados por treze seculos : um devido aos Arabes e outro devido a Viète.

A ambos, como observa Comte, o segundo gráu offerece o unico caso susceptivel de completo successo, sendo em todos os outros sua applicação meramente preparatoria, o que mostra o quanto a algebra esgota os seus recursos mais rapidamente do que os institue.

O artificio que caracteriza o processo devido a Viète comporta uma generalisção que abrange a todas as equações ; mas em todo outro caso além do 2º gráu á sua efficacia é muito inferior, de modo que as

principaes difficuldades da resolução das equações d'esses grãos não desapparecem com o emprego do artificio, embora fique muito simplificada a transformação do typo considerado.

Vejamos o primeiro processo. Este processo consiste em considerar os termos affectos da variavel como constituindo os dois primeiros termos do quadrado de um binomio, e sommar aos dois membros da equação dada o termo correspondente ao quadrado do termo constante do mesmo binomio.

Seja a equação dada $ax^2 + bx = c$. Dividindo esta equação por a , temos: $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$.

Para obter o terceiro termo do quadrado que se supõe representado pelo 1º membro, nós podemos empregar o processo já citado na theoria das potencias, indagando qual o valor que deve ter a indeterminada m , para que $x^2 + \frac{a}{b}x + m$ seja um quadrado perfeito.

Effectuando, pois, a extracção da raiz, temos :

$$\begin{array}{r} x^2 + \frac{b}{a}x + m \quad \left| \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} \\ \hline \end{array} \right. \\ -x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{4a^2} \\ \hline m - \frac{b^2}{4a^2} \end{array}$$

Igualando o resto a zero: $m - \frac{b^2}{4a^2} = 0$, ou

$m = \frac{b^2}{4a^2}$ tal é o valor que devemos dar a m .

Somando aos dois membros da equação dada $\frac{b^2}{4a^2}$

temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}, \text{ d'onde } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \quad (a)$$

Fica por este modo a questão reduzida ao caso fundamental. Para obter a formula da incognita basta extrahir a raiz quadrada dos dois membros, o que nos dá:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sendo o duplo signal determinado pelo facto de poder o quadrado resultar da raiz positiva ou negativa. Esta duplicidade de valor pode ser indicada do seguinte modo. A equação (a) nos dá:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left[\left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 &= 0, \text{ d'onde:} \\ \left[x + \frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \left[x + \frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] &= 0 \end{aligned}$$

Igualdade que pode ser satisfeita para estes dois casos:

$$x = -\frac{b}{2a} - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } x = -\frac{b}{2a} + \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

O segundo processo é devido a Viète. Meditando sobre a resolução geral das equações, Viète notou que podia fazer desaparecer um termo qualquer

effecto da variavel, substituindo esta na equação dada por um binomio convenientemente constituido, de modo que os coefficients das differentes potencias da incognita na equação transformada achando-se em formação de uma indeterminada, por um valor conveniente a esta attribuido, podia annular o coefficiente total de uma das potencias secundarias da incognita, sendo o valor da indeterminada dado pela equação obtida igualando a zero o coefficiente a annular.

Seja a equação geral $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots Px + Q = 0$ (1)
Fazendo $x = u + x'$ (2), sendo u uma nova variavel e x' , uma constante arbitraria, e substituindo na equação dada, temos:

$$(u + x')^m + A(u + x')^{m-1} + B(u + x')^{m-2} + \dots P(u + x') + Q = 0$$

Desenvolvendo e ordenando em relação a u:

$$\left. \begin{array}{l} u^m + mx' \\ + A \left\{ \begin{array}{l} u^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} x'^2 \\ + (m-1)Ax' \\ + B \\ \dots\dots\dots \\ Px' \\ Q \end{array} \right. \end{array} \right\} = 0 \quad (2)$$

Como vemos os coefficients dos differentes termos desta equação achão-se em formação da arbitraria x' , da qual podemos dispor de modo a fazer desapparecer qualquer dos termos em u^{m-1} , u^{m-2} , etc. Supponhamos que se quer eliminar o segundo termo. Neste caso o valor de x' será dado pela equação $mx' + A = 0$,

d'onde se tira : $x' = \frac{A}{m}$. Substituindo este valor em (2), resulta uma equação da forma :

$$u^m + B_1 u^{m-2} + B_2 u^{m-3} + \dots + Q_1 = 0 \quad (3).$$

Esta equação resolvida nos dá os valores de u . Para obter x , substitue-se na equação $x = u + x'$; u e x' pelos seus valores, o que nos dá $x = u + \frac{A}{m}$, sendo u dado pela equação (3). Este valor m de x nos mostra que para fazer desaparecer o segundo termo de uma equação, substitue-se a incognita por um binomio tendo para primeiro termo uma nova variavel e para segundo termo o coefficiente do 2º termo da equação dada, tomado com signal contrario e dividido pelo gráo de equação.

Se quizessemos fazer desaparecer um outro termo qualquer procederíamos de modo identico, igualando a zero o coefficiente do termo a eliminar na equação (2), resolvendo a equação obtida em relação a constante arbitraria e substituindo a expressão achada na equação (2), do que resultaria uma transformada sem o termo correspondente.

Para o caso do 3º termo a equação a resolver seria : $\frac{m(m-1)}{2} x'^2 + A(m-1)x' + B = 0$, a qual nos daria dois valores para x' , que substituidos em (2) nos darião uma transformada da forma :

$$u^m + R_1 u^{m-1} + R_2 u^{m-3} + \dots + Q_2 = 0$$

Para o 4º termo a equação a resolver seria do 3º gráo, para o 5º termo do 4º gráo, e assim por diante até o ultimo termo que exigiria a resolução da equação : $x'^m + Ax'^{m-1} + \dots = 0$, de gráo igual ao da equação dada. Pode acontecer que o valor de x' que annulla o coefficiente do 2º termo, annulle tambem o de um outro, o terceiro por exemplo.

Neste caso é necessario que a equação $x' = -\frac{A}{m}$ e a equação $\frac{m(m-1)}{2}x'^2 + A(m-1)x' + B = 0$ sejam satisfeitas para os mesmos valores de x' . Substituindo na 2ª equação o valor de x' dado pela 1ª temos:

$$\frac{m(m-1)}{2} \frac{A^2}{m^2} - (m-1) \frac{A^2}{m} + B = 0, \text{ equação que nos}$$

dá para condição do desaparecimento simultaneo dos dois termos: $2mB - (m-1)A^2 = 0$.

Se o coefficiente de 1º termo da equação dada não fosse igual á unidade, dividia-se toda a equação por elle e então o segundo termo do binomio a substituir em logar da variaval teria para denominador o producto do gráo da equação pelo coefficiente do 1º termo.

Tal é o artificio que particularisado ao caso do 2º gráo reduz immediatamente a equação completa ao caso espontaneo fundamental da equação incompleta.

Tomemos a equação $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$. Fazendo $x = u + x'$, temos: $(u + x')^2 + \frac{b}{a}(u + x') = \frac{c}{a}$. Desenvolvendo e ordenando: $u^2 + (2x' + \frac{b}{a})u + x'^2 + \frac{b}{a}x' - \frac{c}{a} = 0$ (1)

Igualando a zero o coefficiente do 2º termo:

$$2x' + \frac{b}{a} = 0; \text{ d'onde } x' = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo este valor na equação (1), temos:

$$u^2 + \frac{b^2}{4b^2} - \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a} = 0, \text{ ou } u^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \quad (a)$$

Fica por esta forma a questão reduzida ao caso espontaneo da equação incompleta, representado por esta equação em u . Resolvendo esta ultima equação,

temos: $u = \pm \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. Esta duplicidade de valor

póde ser indicada por um artificio identico ao do processo anterior. A equação (a) nos dá:

$$u^2 - \left[\left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = 0 \text{ ou } \left[u + \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[u - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0$$

equação que póde ser satisfeita para os dois valores de u:

$$u = + \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } u = - \left(\frac{b^2 + 4ac}{4a^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo o valor de u, e o de x' na equação $x = u + x'$, temos: $x = -\frac{b}{2a} \pm \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$

Formula identica a que obtivemos com o primeiro processo e que traduzida em linguagem vulgar nos indica que a raiz de uma equação do 2º gráo é igual á metade do coefficiente do segundo termo, tomado com signal contrario mais ou menos a raiz quadrada desta metade elevada ao quadrado sommada algebricamente ao termo constante.

Conhecido assim o modo por que a raiz é constituida pelas constantes da equação nós podemos sempre que tivermos de resolver uma equação do 2º gráo, reduzi-la a forma geral $y^2 + py + q = 0$, e depois construir immediatamente a formula das raizes, dispensando assim toda a phase algebrica de transformação em que se reduz o typo completo ao caso fundamental incompleto. Esta intervenção immediata da phase arithmetica é aqui sempre preferivel, pois que as formulas das raizes são de construcção facil

de reter na memoria, e muito mais simples que a phase algebraica de transformação.

Destes dois modos de redução da resolução da equação completa ao caso fundamental, o segundo deve ser preferido nem só por sua simplicidade, como pela maior generalisação que comporta no dominio algebraico; devendo o primeiro ser sempre apreciado como mais espontaneo e directo.

Esta transformação por que Viète fazia desaparecer os termos das potencias secundarias da incognita foi, como observa Comte, o melhor germen do methodo de Descartes. A indeterminação em que ficão os coefficients n'esta transformação, e a determinação do valor da constante arbitraria pelas equações obtidas pela annullação dos coefficients considerados levou o eminente fundador da philosophia mathematica a suppor á formação dada um desenvolvimento hypothetico, inteiro em relação á variavel, com os coefficients indeterminados; desenvolver para com esta relação uma propriedade sufficientemente simples da formação considerada e determinar os coefficients do desenvolvimento hypothetico, por equações resultantes da comparação entre os coefficients dos termos da relação final.

Seja $f(x)$ a formação dada. Suppondo a esta formação um desenvolvimento inteiro em x temos:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots \quad (1)$$

Para verificar a compatibilidade da hypothese faz-se a variavel igual a zero, e caso resulte um absurdo entre as expressões dos dois membros, é necessario modificar o desenvolvimento, ou transformar a formação dada, o que não sendo possivel indica a incompatibilidade da hypothese. Se a

annulação da variavel nada poder indicar, a continuação do calculo fará immediatamente surgir algum absurdo, caso seja a hypothese incompativel.

Feita esta indagação preliminar, procura-se uma propriedade sufficientemente simples da formação $f(x)$, e esta propriedade traduzida na indentidade (1) nos dará uma nova relação entre duas formações de x , formações equivalentes cuja identificação nos fornecerá um numero de equações necessario para determinar A, B, C etc. Para caracterisar melhor o methodo nós vamos applical-o aos casos da divisão e das potencias.

Seja a formação $\frac{f(x)_m}{f_1(x)_n}$, sendo o numerador um polynomio inteiro em x do gráo m , e o denominador um outro do gráo n . Suppondo á formação um desenvolvimento inteiro em x , este será do gráo $m-n$, segundo as indicações da divisão. Teremos,

$$\text{pois: } \frac{f(x)_m}{f_1(x)_n} = Ax^{m-n} + Bx^{m-n-1} + Cx^{m-n-2} + \dots U. \quad (1)$$

A propriedade mais simples para este caso é que na formação quociente, a divisão sendo exacta, a expressão dividendo é igual ao producto da expressão divisora pelo quociente. Esta propriedade traduzida na relação (1) dá:

$$f(x)_m = f_1(x)_n [Ax^{m-n} + Bx^{m-n-1} + \dots + U].$$

Substituindo $f(x)_m$ e $f_1(x)_n$ por suas expressões geraes :

$$(ax^m + bx^{m-1} + \dots + h) (A_1x^m + B_1x^{m-1} + \dots + h_1)$$

$$(ax^m + bx^{m-1} + \dots + b) = (A_1x^n + B_1x^{n-1} + \dots + b_1)$$

$$(Ax^{m-n} + Bx^{m-n-1} + \dots + u) = A_1Ax^m + (A_1B + B_1A)x^{m-1} + (A_1C + B_1B + C_1A)x^{m-2} + \dots + hh,$$

Estes dois polynomios sendo equivalentes devem ser identicos, donde se conclue que elles devem ser do mesmo gráo e os coefficients das differentes potencias de x devem ser respectivamente iguaes.

Teremos, estabelecendo a comparação.

$$a = A_1A, \quad b = A_1B + B_1A, \quad c = A_1C + B_1B + C_1A \quad \text{etc.}$$

A primeira destas equações dá $A = \frac{a}{A_1}$; a segunda tem duas incognitas A e B . Sendo A já conhecido pela 1ª equação, o seu valor substituido na segunda nos dará B . Estes valores de A e B , substituidos na 3ª equação nos darão C e assim por diante até obter-se o ultimo coefficiente.

Seja por exemplo a formação :

$$\frac{6b^2x^3 + (9a - 2b^2c)x^2 - ac^2x^2}{3x^2 - cx}, \quad \text{cujo quociente se}$$

pede.

Este quociente sendo de gráo igual a 3, temos :

$$6b^2x^3 + (9a - 2b^2c)x^2 - ac^2x^2 = (3x^2 - cx)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 3Ax^5 + (3B - Ac)x^4 + (3C - Bc)x^3 + (3D - Cc)x^2 - Dcx$$

Estabelendo a comparação temos as equações :

$$3a = 6b^2, \quad 3A - Ac = 9a - 2b^2c, \quad 3C - Bc = 0, \quad 3D - Cc = -ac^2, \quad Dc = 0,$$

que nos dão : $A = 2b^2, \quad B = 3a, \quad C = ac$

O quociente pedido será, pois : $2b^2x^3 + 3ax^2 + acx$.

Por este methodo podemos ainda resolver uma questão identica a que tratamos no estudo da divisão, sobre as condições de divisibilidade dos polynomios.

Supponhamos que se pede os valores de m e n para que a expressão $x^4 - 2x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 + 2x + 2$. Applicando o methodo, temos :

$$x^4 - 2x^2 + 2mx + n = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + Ax + B) = x^4 + (A+2)x^3 + (B+2A+2)x^2 + (2B+2A)x + 2B$$

Estabelecendo a comparação temos :

$$A+2=0, B+2A+2=-2, 2B+2A=m, 2B=n$$

d'onde $m=-4$, $n=0$.

Applicação identica comporta o estudo das potencias.

Supponhamos que se pede a condição que deve haver entre os coefficients para que o polynomio :

$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2$ seja o quadrado perfeito de um trinomio. O gráo do trinomio raiz nos é dado pelo quociente do gráo do polynomio dado por dois, isto é, a raiz será do segundo gráo. Representando-a por $A+Bx+Cx^2$, temos, sendo P o polynomio dado $P^2 = A+Bx+Cx^2$ (1)

A propriedade mais simples da formação potencia ser ella igual a sua raiz elevada á potencia correspondente. Traduzindo esta propriedade na igualdade (1) temos :

$$P = (A+Bx+Cx^2)^2 = A^2 + 2ABx + (B^2 + 2AC)x^2 + 2BCx^3 + C^2x^4$$

Identificando os coefficients da expressão de P e do 2º membro :

$$A^2 = (m+1)^2, 2AB = 2p(m+1), B^2 + 2AC = 4q, 2BC = -4p, C^2 = 4$$

d'onde resulta :

$$A = m+1, B = p, C = 2, m+1 = q - \frac{p^2}{4}$$

Taes são as relações que devem existir entre os coefficients. Appliquemos o methodo para o cubo.

Supponhamos que se pede a relação entre a e b para que o polynomio $ax^3 - (2a^2 + 3b)x^2 + (a^3 + 6ab)x - 3a^2b$ seja o cubo de um binomio.

Applicando o methodo, temos, representando o polynomio dado por P :

$$P = (Bx + A)^3 = B^3x^3 + 3B^2Ax^2 + 3A^2Bx + A^3$$

Formulando a comparação:

$$B^3 = a, 3B^2A = -(2a^2 + 3b), 3A^2B = a^3 + 6ab, A^3 = -3a^2b$$

$$\text{d'onde: } b = -\frac{a^2}{3}.$$

Dado, pois, um polynomio $f(x)$, as condições para que este polynomio seja uma potencia m perfeita se obtêm do seguinte modo: Iguala-se o polynomio dado a um outro com os coefficients indeterminados e que se suppõe representar a raiz; eleva-se este polynomio á potencia m ; igualam-se os coefficients correspondentes ás mesmas potencias de x nos dois membros e das equações obtidas deluzem-se as relações entre as constantes do polynomio dado, para que este seja uma potencia perfeita.

O fecundo methodo de Descartes, que deixamos exposto, apresenta como é facil comprehender, uma applicação notavel no dominio abstracto da grande lei da philosophia primeira, que manda *formular a hypothese mais simples que puder comportar o conjuncto de elementos a representar*. Realmente, a hypothese mais simples que se póde suppôr ao desenvolvimento de uma formação é a de um polynomio inteiro em relação á variavel.

Os resultados a que se chega com o emprego d'este metho, deixa claramente evidente o quanto no dominio o mais simples, as hypotheses, desde que scientificamente formuladas, podem depois tornar-se

precisas; e ainda mais mostra o quanto é possível estabelecer previsões partindo de taes hypotheses, de modo a determinar quaes os valores a dar a certos coefficients para que se realise um determinado modo de relação entre duas expressões.

Baseados n'este methodo, nós podemos considerar qualquer formação do segundo gráu como representada pelo producto de dois factores binomios do primeiro gráu, cujos segundos termos a principio indeterminados, são depois sujeitos a satisfazerem um certo modo de relações.

Seja a formação considerada $y = ax^2 + bx + c$.

Pondo a em evidencia, temos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right). \quad (1)$$

Igualando o segundo membro a zero :

$$x + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Suppondo n uma indeterminada que substituida em lugar de x n'esta equação annulla o seu primeiro membro, é claro que o trinomio $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ será divisivel por $x - n$. Sendo o dividendo do 2º gráu e o divisor do 1º gráu, o quociente será tambem d'este gráu e da fórmula $x + m$, sendo m uma outra indeterminada.

Para obter as condições que devem satisfazer m e n para que se verifique este modo de relação, basta-nos applicar a methodo cartesiano, igualando o trinomio ao producto dos dois binomios, e tirar as condições da identificação que resultam da transformação. Teremos, pois :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - n)(x + m) = x^2 + (m - n)x - nm.$$

$$\text{Identificando : } m - n = \frac{b}{a}, \quad -nm = \frac{c}{a}. \quad (2)$$

Taes são as relações que traduzem as condições que devem satisfazer as indeterminadas m e n para que a formação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ seja equivalente ao producto $(x-n)(x+m)$.

Substituindo estes valores de $\frac{c}{a}$ e $\frac{b}{a}$ na equação (1), temos: $y = a(x^2 + (m-n)x - nm) = a(x-n)(x+m)$.

Substituindo y por seu valor temos:

$ax^2 + bx + c = a(x-n)(x+m)$. Esta igualdade nos indica que a formação do segundo gráo $ax^2 + bx + c$ é divisível por $x-n$ e por $x+m$ e portanto, segundo o principio apreciado na divisão, que esta formação se annulla para os dois valores n e $-m$ da variavel.

Surge assim a noção da duplicidade de valores para o caso do segundo gráo, como nos foi indicado pelos dois processos de resolução da equação do segundo gráo.

Convem notar aqui um facto importante. No estudo do caculo indeterminando do primeiro gráo nós vimos que uma questão finita pode ser susceptível de grande numero de soluções, cuja limitação só pode ser feita pela apreciação do facto concreto que se estuda, basta para isso que o numero de variaveis seja superior ao numero de equações; aqui nós vemos uma equação a uma incognita admittir duas soluções, pelo facto de se haver complicado o modo de relação.

Resulta disto que o numero de soluções de uma questão pode augmentar, por dois modos: 1° pelo excesso do numero de variveis sobre o numero de equações, a questão é indeterminada; 2° pela complicação do modo de relação, a questão é determinada. Como exemplo do primeiro caso temos uma

equação de 1°, 2°, 3°, grãos a duas ou mais incognitas; como exemplo do segundo caso temos as equações do 1°, 2°, 3°, 4° etc grãos a uma incognita.

Para melhor indicar este accessimo de soluções pelo augmento do gráo da equação, consideremos a equação geral do gráo m, $x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots$ $\dots = 0$ cujos raizes chamaremos, a, b, c, d, etc. Teremos pois: $x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)$. (1).

Se o numero de factores do segundo membro, ou se o numero de raizes fôr superior ao gráo da equação, o polynomio que resulta do segundo membro será de um gráo superior ao polynomio do primeiro membro, e a igualdade (1) indicando que estes dois polynomios são equivalentes, teriamos o absurdo da equivalencia de dois polynomios de gráo differentes.

A equação dada, pois, só póde ter um numero de raizes equivalente ao seu gráo.

Fica assim relativa a noção da multiplicidade de soluções, pois como vemos, uma questão pode sem ser indeterminada, admittir muitas soluções, conforme o gráo da equação por que é traduzida.

Vejamus quaes as relações que ligão entre si as raizes e as constantes de uma equação do segundo gráo.

Sommando as formulas das duas raizes, temos:

$$x' + x'' = \frac{-b + (b^2 + 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a} + \frac{-b - (b^2 + 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Multiplicando as mesmas formulas:

$$x'x'' = \left[\frac{-b + (b^2 + 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a} \right] \left[\frac{-b - (b^2 + 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a} \right] = -\frac{c}{a}.$$

Comparando estes resultados á equação $x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0$ nós vemos que a somma das duas raizes é igual ao coefficiente do 2º termo tomado com signal contrario. e o producto das raizes é igual ao termo conhecido. Isto ainda se obtem instituindo a equação do segundo gráo segundo os dois factores do primeiro de que ella é o producto. Chamando m e n as raizes da equação dada temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + nm.$$

Identificando, temos :

$$-(m + n) = \frac{b}{a} \text{ ou } m + n = -\frac{b}{a}, \text{ e } nm = -\frac{c}{a}.$$

O modo, porem, mais directo por que se obtem estas relações é aquelle por que Viète as determinou, e consiste em suppor conhecidas as raizes da equação e determinar os coefficientes taes que a equação possa admittir as raizes suppostas.

Chamando x' e x'' as raizes da equação dada, temos:

$$x'^2 + \frac{b}{a}x' - \frac{c}{a} = 0, \quad x''^2 + \frac{b}{a}x'' - \frac{c}{a} = 0. \quad (1)$$

Considerando como incognitas os coefficientes $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, nós temos aqui um systema de equações

do primeiro gráo. Subtrahindo membro a membro estas equações (1) temos:

$$x'^2 - x''^2 + \frac{b}{a}(x' - x'') = 0, \text{ ou } x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

Este valor de $\frac{b}{a}$ substituido em uma das equações (1) dá: $x'^2 - (x' + x'')x' - \frac{c}{a} = 0$, d'onde $-\frac{c}{a} = x'x''$; relações identicas as já obtidas.

Este modo, como vemos, é independente do gráo da equação de sorte que pode ser applicado a todas as equações de gráos superiores. Suppondo, por exemplo, uma equação do terceiro gráo:

$$x^3 + bx^2 + dx + e = 0$$

e chamando x' , x'' , x''' as suas raizes, as equações do 1º gráo em b , d , e , e que nos dariam os valores destes coefficients, seriam:

$$x'^3 + bx'^2 + dx' + e = 0, \quad x''^3 + bx''^2 + dx'' + e = 0, \\ x'''^3 + bx'''^2 + dx''' + e = 0.$$

Resolvendo este systema em relação a b , d e e nós teriamos estes coefficients em formação das raizes. Do mesmo modo a questão em relação a equação do 4º gráo se reduziria á resolução de um systema do 1º gráo de quatro equações. e assim para os gráos superiores.

Tal foi o modo que levou Viète a concluir por indução as relações geraes entre os coefficients de uma equação e as suas raizes.

O conhecimento d'estas relações nos vac permittir um estudo interessante a respeito da equação do segundo gráo, sem necessidade de resolvel-a.

Sendo reaes as raizes da equação dada nós podemos á simples inspecção dizer se ellas tem os mes-

mos signaes ou não, e neste segundo caso qual d'ellas é maior. Se o termo conhecido $\frac{c}{a}$ é positivo sendo elle o producto das duas raizes, segue-se que as duas raizes tem o mesmo signal; se além disto o coeﬃciente $\frac{b}{a}$ do segundo termo é positivo, o signal das raizes é menos, pois este coeﬃciente tomado com signal contrario é igual á somma das raizes; se $\frac{b}{a}$ é negativo o signal commum é positivo.

Se $\frac{c}{a}$ é negativo as raizes têm signaes diferentes, sendo a maior de signal mais ou menos conforme o coeﬃciente $\frac{b}{a}$ fôr negativo ou positivo. Conhecida uma das raizes para obter a outra basta dividir o termo conhecido pela raiz dada.

Dadas duas expressões m e n para determinar a equação do segundo gráo $x^2 + bx + c = 0$ que tem para raizes m e n , faz-se $-b = m + n$, $c = mn$, o que nos dará a equação $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Se agora dessemos a somma de m e n , e seu producto p , e quizessemos determinar m e n , tomaríamos s com signal contrario e seria o coeﬃciente b , e fariamos $c = p$, o que nos daria a equação $x^2 - sx + p = 0$ cujas raizes serião os valores de m e n .

Vejamos agora como é possível modificar as raizes sem resolver a equação dada $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

1.º Supponhamos que se quer passar da equação (1) para uma outra que tenha os mesmas raizes, mas com signaes contrarios. Seja a equação pedida $x^2 + px + q = 0$ (2), cujas raizes são $-x'$ e $-x''$, sendo x' e x'' as raizes da equação (1).

Teremos: $-p = -(x' + x'')$, $q = (-x')(-x'')$. Porem

a equação (1) dá: $-\frac{b}{a} = x + x''$ e $\frac{c}{a} = x'x''$, d'onde

$p = -\frac{b}{a}$ e $q = \frac{c}{a}$. Substituindo estes valores na

equação (2) temos para equação pedida: $ax^2 - bx + c = 0$ a qual nos indica que para obtermos a equação cujas raízes são de signaes contrarios as da 1.^a basta trocar o signal do termo affecto da potencia secundaria da variavel.

2.^o Da-se a equação (1) e pede-se uma outra cujas raízes sejam iguaes as da equação dada augmentadas da quantidade m .

Para este caso, suppondo $x^2 + px + q = 0$ a equação pedida, temos: $-p = x' + m + x'' + m = x' + x'' + 2m$, $q = (x' + m)(x'' + m) = m^2 + m(x' + x'') + x'x''$.

Porem $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a} = x'x''$. como raízes da equação (1), d'onde:

$$-p = -\frac{b}{a} + 2m \text{ e } q = m^2 - m\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

Substituindo p e q na equação pedida, temos:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2m\right)x + \left(m^2 - m\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0; \text{ reduzindo:}$$

$ax^2 + (b - 2am)x + (am^2 - mb + c) = 0$, ou $a(x^2 + m^2 - 2mx) + b(x - m) + c = 0$. d'onde $a(x - m)^2 + b(x - m) + c = 0$. Para ter-se, pois, a equação cujas raízes são as da proposta augmentadas de m basta substituir-se na equação dada x por $x - m$.

4.^o Dá-se a equação (1) e pede-se uma outra cujas raízes sejam iguaes as da proposta multiplicadas por m .

Sendo a equação pedida $x^2 + px + q = 0$ temos:

$$-p = m(x' + x''), \quad q = m^2 x' x'', \quad \text{porem } -\frac{b}{a} = x' +$$

$$+ x'' \text{ e } \frac{c}{a} = x' x''$$

d'onde $p = \frac{mb}{a}$ e $q = \frac{m^2 c}{a}$. Substituindo estes valores de p e q temos para equação procurada:

$$ax^2 + mbx + m^2 c = 0$$

5.º Da-se a equação (1) e quer-se obter a equação cujas raizes sejam as inversas da proposta.

$$\text{Para este caso temos: } -p = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}, \quad q = \frac{1}{x' x''},$$

$$\text{e como } -\frac{b}{a} = x' + x'' \text{ e } \frac{c}{a} = x' x'', \text{ deduz-se } -\frac{b}{c} =$$

$$= \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \text{ e } \frac{a}{c} = \frac{1}{x' x''}.$$

$$\text{Comparando temos: } p = \frac{b}{c}, \quad q = \frac{a}{c}.$$

Substituindo p e q na equação pedida, temos:

$$cx^2 + bx + a = 0$$

Esta equação nos mostra que a equação ás raizes inversas, obtem-se substituindo na proposta x por $\frac{1}{x}$.

Estas transformações sendo independentes da resolução da equação são plenamente geraes estendendo-se á equações de gráus superiores. Todas ellas são devidas a Viète.

Por ellas nós sentimos como o conhecimento de certas leis permite á nossa intervenção modificar systematicamente uma certa ordem sem perturba-la. Este facto adquire ainda maior importancia philosophica quando na theoria das equações geraes nós

estendemos taes modificações a equações que não comportam uma resolução algebraica.

E' então que nós vemos a insufficiencia de nossos recursos intellectuaes impondo-nos no dominio abstracto do calculo uma digna subordinação a uma ordem de factos, cuja solução algebraica não nos é possivel obter, o que não nos impede de intervir guiados por leis determinadas por legitima inducção, modificando systematicamente taes factos de modo a poder utilisal-os do melhor modo á satisfação de nossas necessidades.

Sem esta subordinação o nosso espirito jámais deixaria de meditar sobre a resolução algebraica das equações quaesquer, e então as divagações abstractas seriam serio obstaculo ao aperfeiçoamento e coordenação da parte da sciencia verdadeiramente util á nossa existencia.

E' assim que nós vemos surgir na mathematica convenientemente apreciada a justificação do aphorismo, que resume a synthese final : *a submissão é a base do aperfeiçoamento primeiramente physico, depois intellectual e finalmente moral.*

Nós vamos agora apreciar tambem dois factos importantes. O primeiro consiste no modo por que depois de conhecida a lei que liga as incognitas aos coefficients em uma equação do 2º gráo, nós podemos, modificando convenientemente os elementos que a constituem deduzir e apreciar os differentes estados particulares que d'ahi resultão para a equação correspondente ; o segundo consiste no modo por que avaliamos por aproximações successivas os valores das raizes das equações do segundo gráo desde que os valores numericos dos coefficients difficultão a

avaliação sufficientemente exacta por meio da formula geral das raizes.

Consideremos as formulas $x' = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}$,

$$x'' = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a} \quad (1)$$

Suppondo nestas formulas $c=0$, tem :

$$x' = \frac{-b - b}{2a} = -\frac{b}{a}, \quad x'' = 0$$

Sendo, pois, o termo constante nullo uma das raizes da equação $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ é nulla, e a outra é igual ao coefficiente do termo affecto da potencia secundaria da incognita tomado como signal contrario. Supponhamos agora que nas formulas (1) o coefficiente a decresce continuamente tendendo para zero e vejamos a que se reduzem as formulas das raizes quando a attingir este limite.

Quando a tende para zero, a expressão $(b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}$ tende para b , o numerador de x' tende para $-2b$ e o denominador decresce aproximando-se de zero, de modo que o valor de x' augmenta indefinidamente, o que se exprime dizendo que a raiz x' torna-se infinita. Quanto ao valor de x'' , logo que a torna-se nullo a sua expressão toma a forma $\frac{0}{0}$, o que symboliza a indeterminação. Para determinar neste caso o verdadeiro valor de x'' para esse valor particular de a , basta multiplicar-se a expressão de x'' por

$\frac{-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{4ac}$, o que nos dá:

$$x'' = \frac{-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{4ac} = \frac{-2b}{2a(-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}) \cdot b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}$$

Esta transformação nos permite suprimir o factor commum $2a$ aos dois termos da fracção, o qual annullando-se pela hypothese feita determinava a indeterminação $\frac{0}{0}$, de modo que a formula :

$$\frac{-2c}{b + (b^2 + 4ac)^{\frac{1}{2}}}$$

é applicavel para qualquer valor de a por menor que seja, salvo o caso de $a=0$. Para este caso esta formula reduz-se a $-\frac{c}{b}$.

Estas conclusões tiradas da formula das raizes, são perfeitamente confirmadas pelo estudo directo da equação. Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Para que a hypothese de $a=0$ não perturbe o modo de relação annullando o termo affecto de x^2 , passemos desta equação para uma outra de raizes inversas.

Teremos para nova equação: $cy^2 + by + a = 0$, sendo $x = \frac{1}{y}$. Suppondo n'esta ultima equação $a=0$, a equação que resulta terá as duas raizes $y=0$ e $y = -\frac{b}{c}$. Substituindo successivamente estes valores de y na expressão $x = \frac{1}{y}$, temos para raizes da proposta

$$x' = \frac{1}{0} = \infty, \quad x'' = -\frac{c}{b},$$

como já haviamos obtido.

Supponhamos, finalmente que a e b tendem para zero. Considerando attingido este limite, isto é. fazendo-se $a=0$ e $b=0$, as formulas (1) tomam a expressão $\frac{0}{0}$. Para obter neste caso a verdadeira expressão das raizes basta-nos multiplicar os dois termos da expressão de x' por $-(b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}$, e os de

x'' por $-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}$, e suprimir o factor commum $2a$. As formulas a que se chega são :

$$x' = \frac{2c}{-b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b - (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}$$

Quando a e b crescem continuamente, x' , x'' augmentão continuamente, se attingem o limite zero, sendo c differente de zero, os valores das raizes tornão-se infinitos.

Estas considerações nos deixam bem clara a influencia do valor dos coefficients sobre o valor das raizes. Fica assim completada a noção, emanada de Viète, sobre as relações entre as raizes e os coefficients da equação do segundo gráo, pela noção do modo preciso por que a variação dos coefficients determina a variação das raizes. A primeira nos fornece a constituição das raizes pelos coefficients, o seu estado *statico*; a segunda nos indica como varia este estado quando varião os elementos que o constituem, é o estado *dynamico*. Nós empregamos aqui estes dois termos porque nem só elles traduzem perfeitamente o facto, como tambem porque convem que elles sejão vulgarisados o mais possivel, o que permite a sua significação.

A segunda questão de que vamos tratar é a seguinte: sendo o coefficiente a muito pequeno as formulas das raizes difficilmente permitem obter sua avaliação com sufficienté aproximação. Torna-se então necessario procurar um meio mais simples para realisar a avaliação sem necessidade de recorrer as formulas geraes das raizes.

O meio instituido para isto foi o seguinte, incon-

testavelmente o mais simples e mais espontaneo. Seja a equação $ax^2+bx+c=0$. Esta equação nos dá

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b} \quad (1)$$

Sendo a muito pequeno considerou-se o valor $-\frac{c}{b}$ como um valor approximado; este valor substituido em logar de x na fracção $\frac{ax^2}{b}$ da equação (1) dá o valor $x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$, (2) mais approximado do que o primeiro; este valor (2) substituido na mesma fracção da expressão (1) dá um terceiro valor mais approximado, e assim continuando se chegaria a um valor sufficientemente exacto para uma das raizes, e a outra seria obtida subtrahindo-se a raiz conhecida do coefficiente do segundo termo, que representa a somma das duas raizes.

Esta questão, tem importancia sob o ponto de vista arithmetico pois que é ella instituida na phase arithmetica da resolução da equação quando se pretende avaliar as formulas. Sob o ponto de vista algebrico, porém, a questão é inutil pois algebricamente o que se tem em vista é a determinação do modo de relação que liga os coefficientes para constituirem as raizes, deixando absolutamente de parte os valores que possam ter estes coefficientes.

Em todo caso, porém, convem mencionar o processo por *approximações successivas* que comporta uma grande generalisação, para mostrar o modo por que o espirito humano vence as difficuldades que encontra, e como caracterisando no dominio abstracto uma questão muito commum em nossa existencia, e vem a ser: desde que não nos é possível

obter a solução exacta de um facto, a marcha racional de nosso espirito deve consistir em instituir soluções progressivamente mais aproximadas da verdadeira até que se chegue a uma cuja aceitação não determine erro sensível para os resultados. A menção deste processo é ainda conveniente para mostrar uma dessas questões onde a phase arithmetica acha-se englobada á phase algebraica. Ainda ao estudo das equações do segundo gráo devemos referir duas noções importantes: as raizes qualificadas de imaginarias, e a noção dos *maxima* e *minima*.

Estas duas noções como vamos ver, emanão do estudo das raizes da equação do segundo gráo.

Consideremos as raizes $x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}$. Nós podemos fazer tres hypotheses diferentes: $b^2 - 4ac = +d$, $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac = -e$ Para á primeira hypothese, chamando m a differença $b^2 - 4ac$, temos para a incognita os valores:

$$x' = \frac{-b + m^{\frac{1}{2}}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - m^{\frac{1}{2}}}{2a}, \quad \text{isto é, quando}$$

a differença é positiva resulta para a incognita dois valores reaes. E' o que acontece sempre que na equação dada o coefficiente a tem signal contrario ao do termo c pois que neste caso a expressão affecta da raiz $\frac{1}{2}$ é a somma $b^2 + 4ac$.

Na segunda hypothese temos $x = \frac{-b}{2a}$. Para esclarecer este caso consideremos a hypothese feita na equação dada. De $b^2 - 4ac = 0$ tira-se $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$ Substituindo este valor de $\frac{c}{a}$ na equação dada (1) $x^2 + \frac{b}{a}x +$

$$+\frac{c}{a}=0, \text{ temos: } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}=0 \text{ ou } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

o que dá $\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)=0$, equação esta que pode ser satisfeita pela annullação de qualquer dos dois factores do 1º membro, e como estes se annullão para um mesmo valor $x = -\frac{b}{2a}$ de x , diz-se que a equação tem duas raizes iguaes.

A terceira hypothese determinaria a extracção da raiz quadrada de uma quantidade negativa, operação absurda, pois não ha numero algum que multiplicado por si mesmo dê um producto negativo. Este resultado indica nma impossibilidade de solução para a questão. Para mostrar isto tomemos a hypothese feita $b^2 - 4ac$ negativo, ou $b^2 = 4ac - m$, sendo m uma indeterminada. Esta ultima iguldade nos dá $\frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + m^2$ sendo m^2 uma quantidade positiva que não pode ser nulla. Substituindo este valor na equação (1) temos $x + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + m^2 = 0$ ou $x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + m^2 = 0$. Igualdade esta que nos traduz uma impossibilidade de solução, pois, para qualquer valor real dado a x , a segunda parcella m^2 independente de x não se annullaria.

Nesta hypothese as raizes tomão a forma seguinte, notando antes que $(b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}} = (4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}$:

$$x' = \frac{-b}{2a} + \frac{(4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}}{2a}(-1)^{\frac{1}{2}}, \quad x'' = \frac{-b}{2a} - \frac{(4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}}{2a}(-1)^{\frac{1}{2}}$$

Fazendo $-\frac{b}{2a} = m$, e $\frac{(4ac - b^2)^{\frac{1}{2}}}{2a} = n$, temos:

$$x' = m + n(-1)^{\frac{1}{2}}, \quad x'' = m - n(-1)^{\frac{1}{2}}.$$

A estas expressões classifica-se de *imaginarias*. Esta denominação é algebricamente viciosa. A impossibilidade numerica da operação $(-M)^{\frac{1}{2}}$ despertando habitos contrahidos na arithmetica, levou o espirito a classificar de imaginarias em algebra expressões que, como todas as outras, prestão-se as transformações das relações e por tal forma que muitas vezes com o seu emprego obtem-se as expressões as mais normaes.

Se a denominação aceita é verdadeira considerada a questão em sua phase arithmetica de avaliação das formulas, é falsa sobre o ponto de vista algebrico, onde a noção de valor só serve para perturbar as transformações das relações, que pôdem ser plenamente realisadas com o emprego de tres expressões singulares. A mesma razão que levou a classificar estas expressões de imaginarias, devia antes ter assim tambem classificado as expressões da fôrma $a - 3a$ em que o minuendo sendo menor que o subtraendo o facto numericamente é absurdo. Por estes motivos é que nos parece mais philosophico denominar-se taes expressões de *irrationaes singulares*, pois assim ficam ellas algebricamente caracterisadas como constituindo um typo especial sem exclusão de seu uso do dominio do calculo, facto este que leva a suppôr a denominação de imaginarias.

Vejamos como as irrationaes singulares sujei-

tam-se do mesmo modo que as expressões normaes ás transformações algebraicas.

O typo abstracto de taes expressões, emanado como fizemos vêr do estudo das equações do 2º gráu, é o seguinte :

$$a \pm b(-1)^{\frac{1}{2}}, \text{ ou } a + b(-1)^{\frac{1}{2}} \text{ e } a - b(-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Estas duas expressões que só differem pelo signal que affecta o elemento $(-1)^{\frac{1}{2}}$ dizem-se *conjugadas*.

Sejam, para sommar, as expressões :

$$a \pm b(-1)^{\frac{1}{2}} \quad a' \pm b'(-1)^{\frac{1}{2}} \quad \dots \dots$$

Effectuando a somma, temos :

$$a \pm b(-1)^{\frac{1}{2}} + a' \pm b'(-1)^{\frac{1}{2}} + a'' \pm b''(-1)^{\frac{1}{2}} + \dots \dots$$

Reunindo de uma parte todos os termos $a, a', \text{ etc.}$, e de outra todos os termos affectos de $(-1)^{\frac{1}{2}}$ e designando por M a expressão, temos :

$$M = (a + a' + a'' \dots) \pm (b + b' + b'' \dots) (-1)^{\frac{1}{2}}$$

A expressão, pois, que resulta da somma de irracionais singulares á tambem uma irracional singular da forma $A + B(-1)^{\frac{1}{2}}$ das expressões sommadas.

Se as expressões a sommar fossem duas expressões conjugadas $a + b(-1)^{\frac{1}{2}}$ e $a - b(-1)^{\frac{1}{2}}$ teriamos :

$$a + b(-1)^{\frac{1}{2}} + a - b(-1)^{\frac{1}{2}} = 2a$$

Neste caso a combinação das expressões singulares apresenta para resultado uma expressão normal. As outras transformações algebraicas effectuadas en-

tre duas expressões irracionaes singulares, tambem dão em geral para resultado uma expressão da mesma forma como mostra as seguintes igualdades :

$$\begin{aligned} (a+b(-1)^{\frac{1}{2}}) (a'+b'(-1)^{\frac{1}{2}}) &= (aa' - bb') + \\ &\quad (ba' - ab')(-1)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{a+b(-1)^{\frac{1}{2}}}{a'+b'(-1)^{\frac{1}{2}}} &= \left(\frac{(a+b(-1)^{\frac{1}{2}})(a'-b'(-1)^{\frac{1}{2}})}{a'^2+b'^2} \right) \\ &= \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2} (-1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

O mesmo ainda se daria se desenvolvessemos uma potencia qualquer inteira m da expressão $a+b(-1)^{\frac{1}{2}}$.
Applicando a lei de Newton temos :

$$\begin{aligned} \left(a+b(-1)^{\frac{1}{2}} \right)^m &= a^m - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4}b^4 + \dots + [ma^{m-1} - \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \dots] b(-1)^{\frac{1}{2}} = \\ &= M+N(-1)^{\frac{1}{2}}, \text{ representando } M \text{ o conjuncto de ter-} \\ &\text{mos normaes e } N \text{ o coefficiente de } (-1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A raiz quadrada da somma dos quadrados a^2+b^2 se denomina modulo da expressão $a+b(-1)^{\frac{1}{2}}$

Para que uma irracional singular seja nulla, é preciso e basta que seja nullo o seu modulo.

Porque se o modulo $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ não é nullo a e b, não são ambos nullos e portanto $a+(-1)^{\frac{1}{2}}b$ também não é; se $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ é igual a zero, a e b serão nullos ao mesmo tempo e então $a+(-1)^{\frac{1}{2}}b=0$.

O modulo do producto de duas irrationaes singulares é igual ao producto dos modulos dos factores.

Com effeito sendo o producto de

$$a+(-1)^{\frac{1}{2}}b \text{ por } a'+(-1)^{\frac{1}{2}}b'$$

igual a $(aa'-bb')+(-1)^{\frac{1}{2}}(ab'+ba')$, o modulo deste producto será $[(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2]^{\frac{1}{2}} = (a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+b^2a'^2)^{\frac{1}{2}} = [(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)]^{\frac{1}{2}}$. Expressão igual ao producto dos modulos $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ e $(a'^2+b'^2)^{\frac{1}{2}}$, das expressões factores.

Referido ao caso da multiplicação o caso da divisão nos indica facilmente que o modulo do quociente de duas irrationaes singulares é igual ao quociente

de seus modulos. Chamando $a''+(-1)^{\frac{1}{2}}b''$, o quociente entre $a+(-1)^{\frac{1}{2}}b$ e $a'+(-1)^{\frac{1}{2}}b'$, temos:

$$a+(-1)^{\frac{1}{2}}b = \left(a'+(-1)^{\frac{1}{2}}b' \right) \left(a''+(-1)^{\frac{1}{2}}b'' \right),$$

Como $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = (a'^2+b'^2)^{\frac{1}{2}} (a''^2+b''^2)^{\frac{1}{2}}$, segue-se que

$$(a''^2+b''^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(a'^2+b'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Estas ligeiras considerações são por demais sufficientes para fazer sentir a irracionalidade da classificação de *imaginarias* que habitos arithmeticos levarão a dar ás irrationaes singulares. Na algebra directa esta theoria deve ser apenas esboçada limitando-se a mostrar a origem de taes expressões do estudo das equações de segundo gráo e firmar a sua verdadeira noção. Esta theoria depois dos trabalhos de Euler, Moivre, Lagrange, Cauchy, tomou novo impulso, pela intervenção das formações trigonometricas. Sob um tal aspecto é que convem desenvolvê-la, pois só então ella permite a mais ampla generalisação algebraica, e assim considerada ella é antes do dominio da geometria que do da algebra. Ella representa de um modo brilhante, a reacção do dominio concreto da mathematica sobre o dominio abstracto, reacção que se manifesta em relação á algebra directa particularmente na resolução do caso irreductivel das equações do 3º gráo, dada por Viète, e de um modo geral na resolução das equações binomias, e, finalmente, pelas relações estabelecidas por Euler entre o concreto e o abstracto, formulando o seno e o coseno em formação de exponeuciaes singulares.

A segunda noção emanada do estudo das equações do segundo gráo é a noção de *maximum* e *minimum*. Historicamente considerada esta questão apresenta-se desde as primeiras especulações mathematicas, mas só foi definitivamente elaborada, com o apparecimento da geometria de Descartes e do calculo de Leibnitz.

Quando o valor da variavel independente de uma formação cresce continuamente passando por todos os estados de grandesa, os valores correspondentes

da formação podem apresentar tres casos : 1º a formação pode crescer e depois de certo valor decrescer ; o valor depois do qual a formação começa a decrescer chama-se um *maximum* ; 2º a formação pode ser decrescente e tornar-se crescente depois de certo valor — o valor depois do qual a formação começa a crescer, constitue um *minimum* ; 3º finalmente, a formação pode ser sempre crescente ou sempre decrescente para os valores da variavel e nestes casos não ha nem *maximum* nem *minimum*.

As denominações em uso, diz Comte, são mui proprias a bem recordar em que consiste este genero de questões, porque indicam uma idéa de maior ou menor valor, que, convenientemente definida, distingue com effeito estes estados notaveis. Uma formação não comportaria realmente nem *maximum* nem *minimum* se fosse sempre crescente ou sempre decrescente a medida que a sua variavel augmenta, quando mesmo tendesse indifnidamente para um limite assignalavel.

Se, porém, como na mór parte dos casos reaes, a formação é ora crescente, ora decrescente, cada passagem de um a outro sentido será marcada por um estado *maximum*, quando a formação cessa de augmentar para começar a diminuir, ou por um *minimum* no caso contrario. Estes estados criticos são pois alternativos, de sorte que todo *maximum* cahe entre dois *minima*, e todo *minimum* entre dois *maxima*.

«Vê-se assim que o valor *maximum* de uma formação é, com effeito, o maior, não de todo absolutamente, o que é muito raro, mas só desde o *minimum* precedente até ao *minimum* seguinte, e da mesma sorte para o valor *minimum*. E' por isso

que o uso tem consagrado aqui o emprego das denominações latinas, cuja traducção litteral indicaria uma definição viciosa.»

O processo espontaneo para determinar estes estados criticos da formação consiste em apreciar directamente o modo de variar da formação quando faz-se variar a variavel. Um tal methodo, porém, exige que a formação considerada seja sufficientemente simples, ou que possa ser transformada de modo a apresentar uma simplicidade que permita uma tal apreciação.

Emquanto as investigações mathematicas foram muito elementares, este methodo pôde ser bastante proveitoso, mas logo que as formações complicaram-se, a sua inefficacia tornou-se patente e exigiu a instituição de um principio mais geral. Este principio embora emanado de estudos geometricos pôde ser explicado como originando-se, no dominio abstracto, do estudo das equações do 2º gráo.

Consideremos a formula das raizes:

$$x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}$$

Supponhamos $b^2 - 4ac$ positivo, isto é, b^2 maior do que $4ac$.

Suppondo a c valores cada vez maiores, é claro que a differença $b^2 - 4ac$ vai decrescendo até que para o valor de c que torna $b^2 = 4ac$ esta differença é nulla; n'esta hypothese as raizes são iguaes a $-\frac{b}{2a}$. Se o valor de c é supposto ainda maior, a differença $b^2 - 4ac$ torna-se negativa e as raizes tornam-se irrationaes singulares.

Assim, pois, o caso de igualdade das raizes separa

o caso de realidade do caso de singularidade. Nós vemos, portanto, que o valor máximo de c que dá para x valores reais, é aquelle que corresponde á igualdade das duas raizes; o caso singular indicando a passagem de c por este estado máximo. Se supozermos, pois, o producto $4ac$ como sendo modificado por uma indeterminada a que se igualou a formação do 2º gráu dada $f(x)$, e procurarmos qual os limites do valor d'esta indeterminada para que os valores de x sejam reais, teremos que estes limites constituirão um estado maximum ou minimum da indeterminada e portanto de x .

E' assim que surge da apreciação da formula das raizes da equação de 2º gráu a noção de maximum e minimum, e a idéa do processo indirecto, cuja apreciação nos vai dar Comte:

«Desde a origem das especulações mathematicas, diz elle, abstractas ou concretas, taes pesquisas apresentão-se frequentemente; mas a analyse ordinaria não fornece a este respeito senão recursos pouco extensos. Sua marcha propria consiste então em tratar a questão do maximum ou minimum de cada formação $f(x)$ como um caso particular da questão que consistiria em farzer-lhe adquirir um valor qualquer n .

Desde então se fôr possível resolver algebricamente a equação $f(x)=n$, a discussão da formula $x=F(n)$ indicará os limites de n , aquem ou além dos quaes x cessasse de ser real, e por consequencia ter-se-ha tambem os valores correspondentes de x . Ainda que este principio seja sem duvida *plenamente geral* (1),

(1) O gripho é nosso. Este ponto vem ainda confirmar a nossa apreciação sobre o modo porque Comte considera o processo de eli-

a extrema imperfeição da resolução algebraica das equações limita infinitamente o seu uso, quando a equação proposta excede os quatro primeiros grãos; este meio elementar não é mesmo verdadeiramente usual, senão quando ella não excede ao segundo grão, caso em que este processo é de ordinario o mais commodo.

Na verdade, a algebra superior aperfeiçoa muito este methodo primitivo assignalando um character directo e especial para os valores de n que separam assim, quanto a x , a realidade da imaginariiedade.

Este character a principio indicado espontaneamente pelos formulas do segundo grão, consiste na igualdade necessaria dos dois valores de x , susceptiveis de tornarem-se ora reaes, ora imaginarios. Pode-se, com effeito, conceber em geral, segundo a natureza da questão, que o estado de igualdade, correspondente ao maximum ou minimum, distingue sempre esta passagem da realidade para a imaginariiedade.

Basta para isto, notar que a formação retoma necessariamente, depois do maximum o do minimum, os mesmos valores que antes, com ou sem symetria. Assim, enquanto o valor de n não é o maximum ou o minimum, corespondem-lhe dois valores distinctos de x . se elle é possivel, e este par torna-se imaginario se elle está fóra do limite; no limite mesmo estes dois valores coincidem, por isso que o estado de n é então unico.

Segundo esta consideração fundamental, o maximum ou o minimum de n acha-se, portanto, caracterisado directamente pela propriedade de fazer a equação $f(x) - n = 0$ adquirir duas raizes iguaes, o

minação por substituição como um processo geral, embora praticamente limitado a um pequeno numero de casos.

que permite á analyse ordinaria determinar estes valores principaes, sem ter de modo algum necessidade de resolver esta equação, limitando-se a formular n'ella, como acima indiquei, a egualdade de duas raizes.

Dividir-se-ha, pois, o seu primeiro membro por $(x - h)^2$, e o resto, identicamente annullado, fornecerá duas equações para determinar n e ao mesmo tempo h que, longe de ser um auxiliar superfluo, constitue precisamente o valor procurado de x .

Porém, por precioso que seja em si mesmo um tal progresso do methodo primitivo, fornecido pela analyse ordinaria para a determinação dos maxima e minima, acha-se elle naturalmente limitado ás formações algebraicas ao mesmo tempo racionais e inteiras.

Ora, a intervenção das curvas vai permittir-nos ir já muito mais longe, além de que é d'ella que emana historicamente a primeira noção geral do principio precedente, apezar de poder-se hoje concebê-lo de uma maneira puramente abstracta.»

Taes são as considerações que limitam o nosso estudo sobre a questão dos maxima e minima ao caso verdadeiramente usual da formação do 2º gráo inteira e racional. Ha, pois, na algebra directa dois processos para indagar os estados maximum e minimum de uma formação: um espontaneo directo; outro indirecto, cuja origem foi geometrica, porém que deve dogmaticamente ser apreciado como emanado do estudo das equações do 2º gráo.

O primeiro está limitado a um pequeno numero de formações muito simples, e é particular a cada formação; o segundo é plenamente geral, embora sua realisação pratica seja muito restricta, pela

dependencia em que se acha com a resolução das equações.

Para esclarecer estes dois processos, nós vamos estudar dois exemplos em que as formações consideradas são do 2º gráo. 1º exemplo :

Seja a formação geral, racional e inteira do 2º gráo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para determinar os maxima e minima d'esta formação pelo methodo espontaneo, vamos transformal-a de modo a reduzir-a a uma fórma sufficientemente simples que nos permita apreciar sua variação, quando varia a variavel independente x .

Para isto façamos $f(x) = az$, sendo :

$$z = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}.$$

A questão fica por esta fórma reduzida ao estudo da formação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, a qual póde ser transformada do seguinte modo :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Temos assim a formação z decomposta em duas partes, uma independente de x e a outra não. Esta ultima parte sendo muito simples, nós podemos estudar as suas variações correspondentes ás variações de x .

Quando x decresce de $-\infty$ a $-\frac{b}{2a}$ a expressão

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

decresce de $+\infty$ a 0, e, portanto, z decresce de $+\infty$ a $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$; continuando x a decrescer até zero a expres-

são $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ cresce de 0 a $\frac{b^2}{4a^2}$ e z cresce de $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ a $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ou $\frac{c}{a}$. Ao valor, pois, $-\frac{b}{2a}$ de x corresponde o valor $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ da formação z , depois do qual esta formação de decrescente que era torna-se crescente, isto é, ao valor $-\frac{b}{2a}$ de x corresponde um minimum $\frac{6ac-b^2}{4a^2}$ para a formação z . Se x continuar a crescer de 0 a $+\infty$, a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ crescerá de $\frac{b^2}{4a^2}$ a $+\infty$, a formação z crescerá também de $\frac{c}{a}$ a $+\infty$; e então não haverá nem maximum nem minimum em todo este intervallo.

Considerando agora a igualdade $f(x) = az$, e substituindo z pelo minimum achado, nós temos que para o valor $\frac{b}{2a}$ de x na formação $f(x)$, resulta o valor minimum $\frac{4ac-b^2}{4a}$ para esta formação.

Appliquemos agora o processo indirecto. Igualando a formação dada a uma indeterminada m , temos: $ax^2 + bx + c = m$. Resolvendo esta equação resulta:

$$x = \frac{-b \pm \left(4am - (4ac - b^2)\right)^{\frac{1}{2}}}{2a}$$

Vejamos quacs os limites dos valores da indeterminada m para que os valores de x sejam reaes. É claro que o valor de x será real sempre que a differença $4am - (4ac - b^2)$ fôr positiva; segue-se que m póde crescer indefinidamente sendo reaes os valores

de x ; mas se m decrescer continuamente os valores de x só serão reaes até o valor de m que torna $4am = 4ac - b^2$, (1) d'ahi em diante x torna-se irracional singular. Substituindo o valor de m tirado de (1) na expressão de x , temos: $x = -\frac{b}{2a}$. Resulta disto

que a formação terá um valor minimum $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$

quando x fôr igual a $-\frac{b}{2a}$. Este valor minimum como vemos corresponde ao caso das raizes iguaes da equação em x .

2º. Exemplo. Consideremos agora a formação :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Para esta formação o methodo directo não é applicavel e o methodo indirecto é muito simples e expecto.

Igualando a formação á uma indeterminada temos:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = m.$$

Resolvendo em relação a x , temos :

$$x = \frac{b - mb'}{2(a - ma')} \pm \frac{[(b - mb')^2 - 4(a - ma')(c - mc')]}{2(a - ma')}^{\frac{1}{2}} \quad (a)$$

A condição para que os valores de x sejam reaes é que os valores de m sejam taes que a differença $(b - mb')^2 - 4(a - ma')(c - mc')$ seja positiva ou nulla. Transformando esta expressão e ordenando em relação a m , a condição para que os valores de x sejam reaes será que a expressão, $(b'^2 - 4c'a')m^2 + 2m(2ac' + 2ca' - bb') + b^2 - 4ac$, seja positiva ou nulla. Fazendo as contracções :

$p=b'^2-4c'a'$, $q=2ac'+2ca'-bb'$, $r=b^2-4ac$ esta expressão tomará a forma : $pm^2+2mq+r$.

Nós temos agora tres casos a considerar segundo as raizes da equação em m : $pm^2+2mq+z=0$ são reas, iguaes ou singulares.

Consideremos o primeiro caso. Sejam m' e m'' as duas raizes desta equação e seja $m'' > m'$. Segundo a decomposição estudada na equação do segundo gráo, temos a igualdade:

$$pm^2+2mq+r=p(m-m')(m-m'') \quad (1.)$$

Sendo m' menor do que m'' , é claro que se supposermos m crescendo continuamente de zero até m' para todos estes valores de m menores do que m' os factores do segundo membro de (1) serão negativos e, portanto, o producto será positivo: e quando $m=m'$ o producto será nullo e, portanto, o trinomio $pm^2+2mq+r$ tambem o será.

Se m toma valores comprehendidos entre m' e m'' , isto é, maiores que m' e menores que m'' o trinomio $pm^2+2mq+r$ será negativo para esses valores, pois que o producto (1) terá o primeiro factor $(m-m')$ positivo, e o segundo $(m-m'')$ negativo, e como este trinomio está no valor de x affecto da raiz quadrada, os valores de x tornão-se singulares. O valor m' é pois o limite alem do qual x torna-se singular, e constitue um valor maximum da formação dada. Este maximum, como vemos, resulta da hypothese $m=m'$, ou $pm^2+2mq+r=0$ que corresponde ao caso de igualdade das raizes da equação (a). Se supposermos m decrescendo continuamente de $+\infty$ até m'' para todos estes valores maiores que m'' a expressão $(m-m')(m-m'')$ será possitiva até o valor $m=m''$ para o qual ella

é nulla; continuando m a decrescer, isto é, tomando valores comprehendidos entre m' e m'' o producto $(m-m')(m-m'')$ torna-se negativo e x apresenta-se sob a forma irracional singular. O valor m'' constitue, pois, o limite aquem do qual x torna-se singular e constitue um minimum da formação dada. Este valor annullando a expressão affecta da raiz no valor de x , corresponde ao caso da igualdade das raizes da equação (a) em x .

Segue-se daqui que a formação dada pode receber todos os valores desde zero até m' , e desde m'' até o infinito, e não pode receber nenhum valor comprehendido entre m' e m'' .

Se as duas raizes são negativas, temos: $pm^2 + 2qm + r = p(m+m')(m+m'')$. Neste caso se m varia continuamente de 0 até $+\infty$ o valor do producto, e portanto do 1º membro, será sempre positivo, e porconsequente os valores de x serão normaes para todos esses valores. A formação neste caso não tem maximo.

Se uma das raizes m' é negativa e a outra positiva, temos:

$$pm^2 + 2qm + r = p(m+m')/(m-m'').$$

Esta expressão será negativa para todo valor de m menor do que m'' e será positiva para todo valor de m comprehendido entre m'' e $+\infty$. Os valores de x serão, pois, normaes em quanto m tomar valores comprehendidos entre $+\infty$ e m'' , se m continuar a decrescer x torna-se singular. O valor m'' representa assim o limite aquem do qual x é singular, e constitue um minimum da formação dada.

Supponhamos agora as raizes m' e m'' iguaes. Neste caso a formação $pm^2 + 2mq + r$ é igual a

$p(m-m')^2$, expressão que será positiva qualquer que seja o valor dado a m . Não ha, porconsequente nesta hypothese, nem maximum nem minimum para a formação dada, pois x será normal para todo o valor m .

Finalmente, se as raizes m' e m'' fôrem irracionais singulares, temos:

$$pm^2 + 2qm + r = p \left[\left(m + \frac{q}{p} \right)^2 + \frac{rp - q^2}{p^2} \right]$$

expressão que será positiva qualquer que seja o valor de m e, portanto, x será tambem normal para todos esses valores. Não ha, pois, nem maximum nem minimum para a formação dada.

Este ligeiro estudo basta para fazer bem comprehender o espirito do methodo que na algebra directa se emprega para indagar os maxima e minima das formações.

Capítulo VI

Equações do 3º e 4º gráus

Considerada isolada da arithmetica e da geometria, a algebra tem como problema capital a resolução das equações.

Este problema apresenta uma primeira decomposição conforme se considera uma equação qualquer a uma incognita ou mais de uma equação e incognitas. n'este ultimo caso o numero de equações póde ser igual ao numero de variaveis e o calculo é determinado ou póde ser inferior e o calculo é indeterminado.

Separando nas equações algebricas a uma só incognita e nos systemas de equações algebricas, os differentes casos de complicação, temos o problema geral decomposto em equações algebricas do 1º, 2º, 3º, etc., gráus a uma só incognita; systema de equações do 1º, 2º, 3º, etc., gráus a um igual ou maior numero de incognitas, apresentando estes ultimos casos differentes typos de complicação crescente, segundo o systema considerado contém duas, tres, quatro, etc., equações; equações transcendentas a uma só incognita, systemas de equações transcendentas a duas ou mais incognitas.

Com os recursos de que dispõe actualmente, a algebra só póde obter a solução algebrica geral do problema que enunciamos até ás equações de 4º gráu a uma só incognita, algumas equações transcen-

dentes, e quanto aos systemas, até o de duas equações do 2º gráu, onde já as formulas são inextricaveis.

E o que é verdade é que semelhante imperfeição permanecerá eternamente, e convém que melhor disciplinados, não cogitemos mais em fazel-a desapparecer, e nos subordinemos, procurando empregar do melhor modo a *resolução numerica*, cujos resultados, bem provado está, são sufficientes para satisfazer as exigencias de nossas necessidades praticas.

Quanto á resolução das equações litteraes, diz Lagrange, quasi nada temos adiantado além do que se estava no tempo de Cardan, quem primeiro publicou a resolução das equações do 3º e 4º gráus.

Os primeiros successos dos analyistas italianos n'esta materia, parecem ter sido o termo das descobertas que podiam ser feitas a tal respeito; pelo menos é certo que todas as tentativas até presentemente feitas para estender os limites d'esta parte da algebra, só tem servido para achar novos methodos para as equações do 3º e 4º gráus, dos quaes nenhum parece applicavel, em geral, ás equações de um gráu mais elevado.»

Tendo até agora tratado o problema geral sob os aspectos mais simples representados pelas equações do 1º e 2º gráus, nós vamos abordar o estudo dos dois unicos casos geraes susceptiveis de solução algebrica, constituídos pelas equações do 3º e 4º gráus.

A resolução da equação do 3º gráu obtem-se fazendo-a depender do caso mais simples e já estudado da equação do 2º gráu, que por sua vez, como vimos, fica reduzido ao typo incompleto, cuja solução é directamente obtida. Estudado o typo do 3º gráu, a resolução do typo mais complicado do 4º gráu obtem-se fazendo-a depender dos dois casos

anteriores, mais simples, do 2º e 3º grãos. Fica por esta fórma o problema geral decomposto, segundo o preceito cartesiano, em casos successivamente mais simples, cujo conhecimento constitue a base para a solução dos casos mais complexos.

Scipio Ferreo e Tartaglia foram os primeiros que se occuparam com o estudo das equações do 3º gráo, cuja solução com a de 4º gráo só foi publicada por Cardan.

O principio geral, como observa Lagrange, a que se reduzem todos os methodos para resolver as equações do 3º e 4º grãos, é o seguinte: achar formações das raizes da equação proposta, taes: 1º que a equação ou equações pelas quaes ellas são dadas, isto é, de que ellas são as raizes, sejam de um gráo inferior ao da proposta ou se possam decompor em outras equações de grãos inferiores; 2º que seja facil a deducção dos valores das raizes procuradas.

O methodo mais natural para reduzir ao caso mais simples a equação do 3º gráo é o de Hudde. Elle consiste em representar a variavel por uma somma de duas indeterminadas, as quaes permitem dividir a equação dada em duas partes, que fazem depender a determinação das indeterminadas de uma equação do 2º gráo.

Consideremos a equação geral do 3º gráo :

$$ay^3+by^2+cy+d=0.$$

Dividindo esta equação por a e representando $\frac{b}{a}$,

$\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, respectivamente por e , f , g : temos:

$$y^3+ey^2+fy+g=0. (1)$$

Empregando o artificio de Viète nós podemos fazer desaparecer o 2º termo desta equação. Para

isto o preceito consiste, como sabemos do calculo do 2º gráo, em igualar a variavel a uma outra, sommada algebricamente ao coefficente do segundo termo tomado com signal contrario e dividido pelo gráo da equação. Substituindo, pois, na equação (1) y por $x - \frac{e}{3}$ temos:

$$\left(x - \frac{e}{3}\right)^3 + e\left(x - \frac{e}{3}\right)^2 + f\left(x - \frac{e}{3}\right) + g = 0.$$

Effectuando os calculos e reduzindo:

$$x^3 + \left(f - \frac{e^2}{3}\right)x + \frac{2e^2}{27} - \frac{fe}{3} + g = 0 \quad (2)$$

Fazendo, para simplificar, $f - \frac{e^2}{3} = p$, $\frac{2e^2}{27} - \frac{fe}{3} + g = q$ a equação (2) toma a forma:

$$x^3 + px + q = 0. \quad (3).$$

Convem fazer aqui uma observação: No typo geral do segundo gráo o desaparecimento do termo da mais alta potencia secundaria da variavel reduz immediatamente o caso completo ao typo incompleto, cuja solução é directamente obtida, enquanto aqui um semelhante recurso reduz o typo completo (1) a um typo incompleto (3), cuja resolução exige transformações especiaes; de modo que o artificio conduz, no primeiro caso immediatamente á solução da questão e no segundo prepara-a simplesmente.

Pode parecer, como observa Clairaut, a quem não conhecer a questão que o artificio, de Viète, novamente empregado para fazer desaparecer o termo px da equação (3) reduza a questão ao outro typo incompleto $x^3 - A = 0$, cuja solução é immediata-

mente obtida; mas um tal recurso é inteiramente illusorio, pois semelhante transformação faria novamente surgir o termo já eliminado na primeira transformação.

Nós podemos, porem, generalisar a concepção de Viète, e em vez de substituir a variavel por uma outra sommada ao termo constante constituido pelo quociente entre o coefficiente do 2º termo da equação e o gráo correspondente a esta, podemos considerar a variavel como a somma de duas indeterminadas, e procurar obter estas por equações do gráo inferior ao da equação dada.

Fazendo, pois, $x=y+z$ e substituindo na equação dada, temos: $y^3+3y^2z+3zy^2+z^3+p(y+z)+q=0$ ou $y^3+z^3+(2yz+p)(y+z)+q=0$. Suppondo a z um valor tal que se tenha $3xy+p=0$, resulta

$y^3+z^3+q=0$ ou $p=-3yz$, $q=-y^3-z^3$, d'onde

$$yz=-\frac{p}{3}, \quad y^3+z^3=-q \quad (4)$$

equações que traduzem as condições que devem satisfazer as indeterminadas para que sua somma possa satisfazer a equação (3). Fazendo $y^3=y'$ e $z^3=z'$ as igualdades (4) nos dão, tendo antes elevado ao cubo

$$yz=-\frac{p}{3}: y'+z'=-q, \quad y'z'=-\frac{p^3}{27}$$

Para obtermos y' e z' , podemos consideral-as como raizes de uma equação do 2º gráo, tendo q para coefficiente da variavel ou para somma das raizes y' e z' tomada com signal contrario, e para termo constante $-\frac{p^3}{27}$, isto é, o producto das raizes. Chamando, pois, u a nova variavel, y' e z' serão as raizes da equação $u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0$.

Esta equação denomina-se *reduzida*, porque á sua resolução fica reduzida a resolução da proposta. Resolvendo-a, temos :

$$u = -\frac{q}{2} \pm \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$z' = z^2 = -\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \quad y' = y^3 = -\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tirando os valores de z e y e substituindo na expressão de x :

$$x = \left[-\frac{q}{4} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (a)$$

Esta expressão, que denomina-se formula de Cardan, representa uma só das raizes da equação dada, de modo que entre o 2º e 3º gráo ha esta differença : no segundo gráo uma mesma expressão affecta convenientemente do duplo signal representa ao mesmo tempo as duas raizes ; no 3º as raizes têm fórmulas diferentes. Para obter-mos as outras raizes, temos de dividir a equação dada pelo binomio tendo a variavel x para 1º termo e o valor da raiz conhecida, tomado com signal contrario, para 2º termo ; o quociente igualado a zero dará as raizes restantes da proposta.

Para effectuar isto, façamos as contracções :

$$\left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = m$$

$$\left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = n.$$

Temos, portanto, attendendo ás equações (4) :

$mn = -\frac{p}{3}$, $m^3 + n^3 = -q$; d'onde $p = -3mn$ $q = -m^3 - n^3$. Substituindo estes valores de p e q no 1º membro da equação (3) temos a expressão: $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3$, que dividida pelo binomio $x - (m+n)$, sendo $m+n$ o valor da raiz determinada, dá para quociente: $x^2 + (m+n)x + m^2 - mn + n^2$.

Esta expressão igualada a zero e resolvida nos dará as raizes restantes. Effectuando os calculos, teremos :

$$x = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2} (-3)^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo m e n por suas expressões temos, finalmente :

$$x = -\frac{1}{2} \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \pm \left[\frac{1}{2} \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \right] (-3)^{\frac{1}{2}} \quad (b)$$

E' assim que nós vemos surgir a noção de multiplicidade das raizes para as equações do 3º gráo. Esta expressão e a expressão (a) nos dão as tres raizes da proposta.

Comparando as formulas (a) e (b) com a formula

$$x = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a},$$
 relativa ao 2º gráo vemos

imediatamente a complicação notavel que vae de um a outro caso. Na formula do segundo gráo só entra a raiz quadrada, na do 3º entrão as raizes quadrada e cubica; a formula do 2º gráo é de facil construcção o que não acontece com a do 3º; finalmente, notemos que sendo a mesma equação primitiva (1), que depois do desaparecimento do 2º termo tomou a forma (2), e finalmente a forma (3) com as contracções p e q, se nós quizermos considerar as formulas das raizes relativamente a equação dada (1), temos de substituir em (a) e (b.), p e q por suas expressões e depois substituir estes valores de x na formula $y = x - \frac{e}{3}$.

Ora, basta a simples inspecção das formulas (a) e (b) para notar-se o quanto ellas se tornariam intrincaveis, ahi substituindo-se p e q respectivamente pelas expressões $f - \frac{e^2}{3}$ e $\frac{2e^2}{27} + \frac{fe}{3} + g$. D'isto resulta que uma vez que á equação do 3º gráo dada não falta espontaneamente o termo da mais elevada potencia secundaria da variavel, o desaparecimento artificial d'este termo produz nas formulas finaes notavel complicação, tornando os coefficients da transformada mais complexos, como nos mostra a equação (1) onde os coefficients são f e g, com-

parada com a equação (2) onde estes coefficients são $f - \frac{e^2}{3}$ e $\frac{2e^2}{27} + \frac{fe}{3} + g$.

Este accessimo de difficuldades para as formulas finaes das raizes, em parte devido ao artificio que empregamos para preparar a solução, desde já nos deixa sentir que o 3º gráo constitue o limite natural do problema geral da algebra directa, salvo, como observa Comte, sua extensão mais apparente que effectiva ao do 4º gráo. Mesmo para com o 3º gráo a questão fica limitada ao caso de uma unica equação, pois se quisessemos considerar um systema de duas equações, a equação resultante da eliminação seria do nono gráo, cuja solução algebraica só em casos muito excepçionaes pode ser obtida; quando mesmo uma das equações fosse do 2º gráo, a equação final seria do 6º, a qual tambem só em casos especiaes admittiria uma solução algebraica.

Esta impossibilidade que tanto restringe o problema fundamental da algebra directa, mostra-nos claramente que o estudo que podemos fazer sobre as raizes das equações de grãos superiores não pode deixar de ser essencialmente inductivo, o que torna evidente a irracionalidade de *pretender-se sempre substituir a indução pela deducção*.

Discutamos agora as formulas das raizes. Consideremos para mais simplicidade estas raizes sob as formas :

$x = m + n$, $x = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}(-3)^{\frac{1}{2}}$ (7), representando m e n as contracções acima feitas, nas quaes entra a raiz quadrada $\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. A normalidade

ou singularidade das raizes depende, pois, desta expressão.

As tres hypotheses são :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = +s, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -r.$$

No primeiro caso as raizes da reduzida do 2º gráo sendo normaes e desiguaes, m e n são tambem normaes e desiguaes, d'onde conclue-se que das tres raizes (7) a primeira é normal e as outras duas singulares conjugadas. Esta raiz normal será positiva se q é negativo, porque, como mostra á formula (a) desta raiz, n'este caso $\frac{q}{2}$ é positivo e a primeira raiz cubica é positiva e necessariamente maior que a 2ª, que affecta a differença entre $\frac{q}{2}$ e $\left(\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$, enquanto a 1ª raiz affecta a somma destas mesmas expressões; se q é positivo a raiz normal é negativa, porque a primeira raiz affecta neste caso uma differença e a 2ª uma somma de duas parcellas negativas.

No segundo caso as raizes da reduzida do 2º gráo são iguaes a $-\frac{q}{2}$, e, portanto, m e n são iguaes

a $\left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Substituindo estes valores nas formulas das raizes, temos :

$$x = 2\left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x' = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x'' = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

N'este caso, pois, sendo q positivo, a equação dada tem tres raizes normaes, uma x negativa e duas

x' , x'' positivas, sendo cada uma d'estas de valor igual á metade do valor da primeira; se q é negativo haverá uma raiz positiva x , e duas raizes negativas x' e x'' .

Consideremos a terceira hypothese, a qual importa suppor-se p negativo e $\frac{p^3}{27}$ maior do que $\frac{q^2}{4}$. N'este caso as duas raizes da reduzida são singulares e, portanto, m e n tambem o são.

Resulta d'isto que as raizes da equação dada apresentam tambem a fórmula singular. Vamos vêr que, embora apresentem-se sob a fórmula singular, estas tres raizes são todas normaes.

Este facto é de grande importancia philosophica, pois vem mostrar o quanto as irracionais singulares, algebricamente, são susceptiveis de representar os resultados mais normaes, os quaes d'ellas podem ser deduzidos por convenientes transformações.

Para mostrar isto relativamente ao caso que estudamos, tomaremos o modo dado por Nicole e e exposto por Clairaut em sua algebra.

Consideremos a formula da 1ª raiz:

$$x = \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Façamos $\frac{q}{2} = a$. e substituamos a expressão

$\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$, supposta singular, por $b(-1)^{\frac{1}{2}}$, teremos:

$$x = \left[-a + b(-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-a - b(-1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Desenvolvendo os dois termos do 2º membro pela lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned} x = & -a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b(-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \\ & - \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3(-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \text{etc } a^{\frac{1}{3}} - \\ & - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b(-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3(-1)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \text{etc} \end{aligned}$$

Reduzindo temos:

$$x = -2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \text{etc}$$

expressão que não contém nenhuma irracional singular.

Para mostrar a normalidade das outras raízes a marcha seria idêntica. Para simplicidade representemos o desenvolvimento da primeira raiz cubica por $P + Q(-1)^{\frac{1}{2}}$ e o da segunda por $P - Q(-1)^{\frac{1}{2}}$, sendo P o conjuncto de todos os termos normaes do desenvolvimento e Q o conjuncto de todos os termos multiplicados por $(-1)^{\frac{1}{2}}$. Resulta, segundo as hypotheses convencionadas:

$$\begin{aligned} m + n &= \left(P + Q(-1)^{\frac{1}{2}}\right) + \left(P - Q(-1)^{\frac{1}{2}}\right) = 2P, \\ m - n &= 2Q(-1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na formula das raizes

$$x = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2} (-3)^{\frac{1}{2}} \text{ temos:}$$

$$x = -P \pm Q (-1)^{\frac{1}{2}} (-3)^{\frac{1}{2}} = -P \pm Q (3)^{\frac{1}{2}}$$

expressão que nos mostra que as outras raizes tambem são reaes.

Este caso das equações do 3º gráo é denominado caso *irreductivel*, porque embora as raizes sejam todas reaes, as formulas que as representam não permitem avalial-as por conterem irrationaes singulares, as quaes só desapparecem, como acabamos de ver, transformando as formulas em desenvolvimentos indefinidos, que não permitem a determinação exacta dos valores das variaveis.

Sendo, na hypothese $\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27} = s$, duas raizes imaginarias; na hypothese $\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, duas raizes iguaes, e finalmente na hypothese $\frac{q^3}{4} + \frac{p^3}{27} = r$, as tres raizes normaes, aqui como no 2º gráo o caso de igualdade das raizes separa o caso de normalidade do caso de singularidade; e as raizes singulares são sempre conjugadas como nos mostra a formula (7) para a 1ª hypothese.

A impossibilidade que se apresenta na phase arithmetica de avaliação das raizes, para o caso principal e mais interessante do 3º gráo, levou os promotores da algebra moderna a recorrerem á origem geometrica d'estas equações para instituir a solução deste caso. Foi assim que Viète obteve a solução exacta, considerando a equação como representando a triseccão trigonometrica de um angulo cujo seno é

dados. Este modo de solução, porém, só deve ser estudado na trigonometria como constituindo uma reacção especial do dominio concreto da mathematica sobre o dominio abstracto.

Vamos ver agora como é possível obter com aproximação o valor da raiz da equação do 3º gráo no caso irreductivel, sob o ponto de vista abstracto. Para isto o processo mais simples é o indicado por Clairaut. Elle consiste, diz Lacroix, em referir a equação $x^3 - px + q = 0$ a fórma mais simples incompleta $z^3 - z = r$, fazendo-se $x = mz$ e dispondo de m de modo a tornar o coefferente de z igual a unidade. Substituindo o valor mz de x na equação dada temos:

$$m^3 z^3 - mz + q = 0, \quad z^3 - \frac{pz}{m^2} = -\frac{q}{m^3}, \quad \text{fazendo } m^2 = p,$$

$$\text{tem-se } z^3 - z = \frac{q}{m^3}; \quad \text{e } m = \pm (p)^{\frac{1}{2}}, \quad r = -\frac{q}{m^3} \text{ toman-}$$

do-se m com o signal contrario ao de q para que este ultimo valor seja positivo. Considerando agora a equação $z^3 - z = r$ vemos que ella só pode referir-se ao caso

$$\text{irreductivel sendo } \frac{1}{27} > \frac{1}{4} r^2 \text{ ou } r < \left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3(2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{o}$$

que só se pode dar quando o valor positivo de z se acha entre os limites 1 e $\frac{2}{(3)^{\frac{1}{2}}}$. Com effeito, é claro

que z deve exceder a unidade para que a quantidade $z^3 - z$ seja positiva, mas se fizermos $z = \frac{2}{(3)^{\frac{1}{2}}}$ ou $z =$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ o resultado será } \frac{2}{3(3)^{\frac{1}{2}}} \text{ numero maior que } r.$$

Suppondo-se, pois, $z = 1 + n$, sendo n uma fracção

menor que a differença 0,1547, entre 1 e $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$, o cubo desta fracção pode ser desprezado, e o resultado da substituição de $1+n$ em lugar de z na equação proposta, desprezando-se n^3 dá: $2n+3n^2=r$

d'onde, $n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1+3r)^{\frac{1}{2}}$. Substituindo este va-

lor na expressão de z , temos: $z = 1 + n = \frac{2+(1+3r)^{\frac{1}{2}}}{3}$,

(1) pois que só se procura o valor de z maior que a unidade. O limite do erro que se pode commetter por este methodo é de um millesimo sobre o valor de z .

Com effeito, si se suppõe $z = (\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$, valor que cor-

responde a $r = \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}}$, e para o qual n é o maior possivel, a formula (1) dará

$$z = \frac{2 + \left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{3}$$

em vez de $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$, cuja differença para com o verdadeiro valor é de 0,00126.

Seja, por exemplo, a equação $x^3 - 13x + 5 = 0$. Substituindo em $m = \pm(p)^{\frac{1}{2}}$, e $r = -\frac{q}{m^3}$, p e q por seus

valores 13 e 5, temos: $m = -(13)^{\frac{1}{2}}$,

$$r = \frac{5}{-(13)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5}{13(13)^{\frac{1}{2}}}; \text{ d'onde } z = \frac{2 + \left(1 + \frac{15}{13(13)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}}{3}$$

Substituindo os valores de m e z em $x=mz$, temos:

$$x = \frac{-2(13)^{\frac{1}{2}} - \left[13 + \frac{15}{13(13)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}}{3} = 3,784''$$

No caso irreductivel do 3º gráu, como vemos, a parte algebraica da solução fica incompleta por não se prestarem as formulas das raizes á uma avaliação exacta.

Apresentam-se então dois recursos: o primeiro consiste em determinar com a maior aproximação possível os valores das raizes; o segundo consiste em recorrer á origem geometrica das equações do 3º gráu e com o auxilio da trigonometria obter os valores exactos das raizes.

Esta intervenção necessaria de geometria no dominio abstracto da algebra em um facto tão importante como é o caso irreductivel, vem confirmar o quanto é irracional querer-se isolar o dominio abstracto do dominio concreto.

Complemento natural d'esta terceira phase algebraica, a resolução da equação do 4º gráu, obtém-se fazendo depender este caso complexo dos dois casos anteriores mais simples do 2º e 3º gráu.

Antes, porém, é conveniente simplificar o typo completo do 4º gráu, reduzindo-o ao typo incompleto obtido pelo emprego do artificio de Viète para fazer desapparecer o termo affecto da mais elevada potencia secundaria da variavel.

Seja a equação $u^4 + au^3 + bu^2 + cu + d = 0$. Fazendo $u = x - \frac{a}{4}$, substituindo este valor na equação dada e effectuando os calculos, teremos:

$$x^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)x^2 + \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + c\right)x - \frac{3a^4}{256} - \frac{ca}{4} + d = 0 \quad (1).$$

Fazendo as contracções $b - \frac{3}{8}a^2 = n$, $\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + c = p$,

$d - \frac{3a^4}{256} - \frac{ca}{4} = q$, a equação (1) toma a fórma:

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0. \quad (2)$$

Para resolver esta equação temos dois methodos:

O primeiro devemos a Luiz Ferrari, discipulo de Cardan, o segundo a Descartes.

O de Ferrari consiste em generalisar o artificio usado no 2º gráu, sommando a ambos os membros da equação um binomio contendo uma constante arbitraria capaz de tornar um d'elles quadrado perfeito. Esta indeterminada é depois obtida de uma equação do 3º gráu, que traduz a condição necessaria para que o segundo membro tambem seja quadrado perfeito, a qual resolvida permittirá a redução da questão ao caso do 2º gráu.

Este methodo, observa Lagrange, que se póde considerar como o mais engenhoso de todos aquelles que depois foram inventados para o mesmo fim, foi o adoptado por todos os analyistas anteriores a Descartes, mas este illustre geometra julgou dever substituil-o por um outro menos simples, em verdade, e menos directo, mas a certos respeitois mais conforme á natureza das equações e que modernamente é seguido pela maior parte dos autores.

Vejamos o methodo de Ferrari. Escrevendo a equação (2) sob a fórma $x^4 = -nx^2 - px - q$ e som-

mando a ambos os membros o binomio $2yx^2 + y^2$, sendo y uma constante arbitraria, temos:

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q$$

$$\text{ou } (x^2 + y)^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q \quad (4).$$

Para regular a indeterminada y , estabeleçamos a condição necessaria para que o 2º membro seja um quadrado perfeito.

Sendo o 2º membro uma formação do 2º grau em x , para que ella represente um quadrado perfeito é necessario que o quadrado da metade do coefficiente do termo em x , seja igual ao producto dos coefficientes dos outros dois termos, o que algebricamente se traduz por: $\frac{p^2}{4} = (2y - n)(y^2 - q)$ (a); d'onde:

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 - qy + \frac{4nq - p^2}{8} = 0.$$

Fica com esta equação, que se denomina *reduzida*, a questão dependendo do caso do 3º grau cuja solução já conhecemos.

Supponha-se, pois, y conhecida pela reduzida; tire-se da igualdade (a) o valor de $y^2 - q$ e substitua-se na equação (a), teremos:

$$(x^2 + y)^2 - (2y - n)\left(x - \frac{p}{2(2y - n)}\right)^2 = 0.$$

Para separarmos d'esta equação os dois factores do 2º grau correspondentes a equação dada, basta a seguinte transformação:

$$(x^2 + y)^2 - \left[(2y - n)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \left(x - \frac{p}{2(2y - n)}\right)^2 = 0$$

Da differença entre dois quadrados, dada pelo 1º membro, resulta :

$$\left[x^2 + y + (2y - n)^{\frac{1}{2}} x - (2y - n)^{\frac{1}{2}} \times \frac{p}{2(2y - n)} \right] \left[x^2 + y - (2y - n)^{\frac{1}{2}} x + (2y - n)^{\frac{1}{2}} \times \frac{p}{2(2y - n)} \right] = 0$$

D'onde: $x^2 + (2y - n)^{\frac{1}{2}} x + \left[y - \frac{p}{2(2y - n)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$ e

$$x^2 - (2y - n)^{\frac{1}{2}} x + \left[y + \frac{p}{2(2y - n)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

Fica assim a questão decomposta em dois casos mais simples do segundo gráo. Estas equações resolvidas nos darião as raizes da proposta. Tomando a 1ª por exemplo e resolvendo, temos:

$$x = \frac{-(2y - n)^{\frac{1}{2}} \pm \left[-(2y - n)^{\frac{1}{2}} + \frac{2p}{(2y - n)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

Ora, basta attender que nesta formula y representa a raiz de uma equação de 3º gráo, cuja formula muito complexa, como vimos, vem complicada de raizes cubica e quadrada, que n e p representam respectivamente as expressões $b - \frac{3}{8}a^2$ e $\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + c$, para facilmente comprehender-se o notavel occressimo de complicação que adquirem as formulas das raizes quando se passa ao quarto gráo. A formula do 2º gráo só apresenta a raiz quadrada, a do 3º apre-

senta a raiz cubica complicada da raiz quadrada, e, finalmente, a do 4º, como vê-se, comprehende a raiz quadrada abrangendo a raiz cubica e esta ainda complicada pela raiz quadrada; o que leva a induzir que para grãos superiores as formulas das raizes devem ser complicadas por todas raizes desde a indicada pelo grão da equação até a do 2º grão, o que é sufficiente para mostrar a inutilidade de taes formulas, caso fosse possível obtel-a.

O methodo de Descartes é racionalmente superior ao de Ferrari.

Emquanto no segundo a decomposição do caso complexo do 4º grão em dois casos do 2º grão é obtida depois de supposta obtida a indeterminada pela resolução da reduzida; no primeiro esta decomposição é instituida de um modo mais directo e geral mantendo indeterminados os coefficients das duas formações do 2º grão, cujo producto soppõe-se ser equivalente e equação dada, sendo estes coefficients obtidos mediante equações mais simples.

Consideremos a equação (2) $x^4 + nx^2 + px + q = 0$.

Procuremos determinar quaes as condições que devem satisfazer os coefficients da formação do segundo grão $x^2 + fx + g$ para que a equação (2) seja por ella exactamente divisivel.

Sendo o dividendo do 4º grão e o divisor do 2º é claro que o quociente será tambem do 2º grão; representando esse quociente por $x^2 + hx + k$, sendo h e k indeterminadas temos, segundo o methodo cartesiano :

$$x^4 + nx^2 + px + q = (x^2 + fx + g)(x^2 + hx + k); \text{ d'onde}$$

$$x^4 + nx^2 + px + q = x^4 +$$

$$+ (f+h)x^3 + (fh+k+g)x^2 + (fk+gh)x + gk$$

Identificando temos :

$$f+h=0, fh+k+g=n, fk+gh=p, gk=q$$

A 1ª destas equações nos dá : $h=-f$, o que nos indica que as formações do 2º gráo devem ser x^2+fx+g e x^2-fx+k .

Para determinar os coefficients f , g e k temos as equações :

$$g+k-f^2=n, (k-g)f=p, gk=q.$$

A primeira equação nos dá : $g+k=n+f^2$; a segunda nos dá : $k-g=\frac{p}{f}$, d'onde $k=\frac{n+f^2}{2}+\frac{p}{2f}$, $g=\frac{n+f^2}{2}-\frac{p}{2f}$; relações que nos mostram que basta conhecer f para ter os outros coefficients k e g . Para determinar f , substitue-se estes valores na equação $kg=q$, o que dá, feitos todos os calculos :

$$f^6+2nf^4+(n^2-4q)f^2-p^2=0 \quad (6)$$

equação do 6º gráo cuja solução refere-se a do 3º. Fazendo $f^2=z$, resulta $f^4=z^2$, $f^2=z$; e a equação (6) se transformará em $z^3+2nz^2+(n^2-4q)z-p^2=0$ (7).

Esta equação denomina-se de reduzida do quarto gráo. Determinada z por esta equação e substituido

seu valor na equação $f=(z)^{\frac{1}{2}}$ teremos o valor de f . Suppondo, pois, f conhecido e substituindo os valores de g e k , nas formações do 2º gráo x^2+fx+g e x^2-fx+k obtemos para determinar as raizes da

proposta as equações $x^2+fx+\frac{n+f^2}{2}-\frac{p}{2f}=0$,

$$x^2-fx+\frac{n+f^2}{2}+\frac{p}{2f}=0.$$

Fica, como vemos, por qualquer dos dois methodos a questão do quarto gráo reduzida aos dois casos mais simples do 3º e 2º gráo.

Taes são, diz Lacroix, os resultados algebricos da resolução das equações geraes do 3º e 4º grãos. Elles estão de perfeito accórdio com as leis da composição das equações; mas sua applicação numerica é muitas vezes penosa e muito pouco satisfactoria. A expressão das raizes do 3º gráo compõe-se de duas partes, taes que effectuando-se separadamente a extracção das raizes indicadas em cada uma, chega-se algumas vezes a valores somente aproximados, para raiz de valores inteiros. Este inconveniente cresce ainda para o caso do 4º gráo; porque se se quizesse exprimir immediatamente por seus coefficients, as raizes das equações deste gráo, seria preciso, sob os radicaes do segundo gráo que affectam as raizes z' , z'' , z''' da reduzida, escrever expressões já contendo radicaes do terceiro gráo sobre radicaes do segundo. A difficuldade do caso irreductivel do terceiro gráo, apresentando-se então no quarto gráo, e dando-se mesmo em grãos superiores, augmenta ainda muito a imperfeição da resolução literal das equações desses grãos. São estes os defeitos que tinha em vista Lagrange, quando dizia « De antemão podemos assegurar que, quando mesmo se chegasse a sesolver algebricamente o quinto gráo e seguintes, nada mais teriamos que formulas algebricas preciosas em si mesmas, mas muito pouco uteis para a resolução effectiva e numerica das equações dos mesmos grãos, e que, por conseguinte, não dispensariam os recursos dos methodos arithmeticos. »

Com o estudo das equações do terceiro e quarto grãos termina a terceira phase essencial da algebra

directa, sendo a primeira constituida pelas equações do 1º gráo, as transformações relativas aos tres primeiros conjugados de formações simples, o estudo das potencias e tendo como complemento o calculo indeterminado, e a segunda constituida pelo calculo do 2º gráo.

Na primeira phase, como sabemos, a algebra resolve plenamente o problema geral que a caracteriza, embora no caso de ser grande o numero de equações do 1º gráo a questão aprasente calculos muito laboriosos, e na segunda phase a questão fica reduzida ao caso de uma equação do 2º gráo a uma incognita, onde os processos são plenamente geraes, ficando excluidos os casos complexos do calculo determinado e indeterminado; finalmente, como acabamos de ver, na terceira phase os recursos da algebra directa só permitem ir até o 4º gráo a uma incognita, onde as formulas são inextricaveis. E' verdade que podiamos dispor dos recursos apresentados por estas tres phases, resolver casos particulares de equações de gráos superiores ao quarto, mas semelhante estudo, como observa Comte, seria necessariamente relativo á equações de mais a mais excepcionaes, o que o torna ocioso e illusorio.

« Inaccessivel a todos os esforços dos geometras desde tres seculos, a equação geral do quinto gráo marca o limite intransponivel dos meios normaes da deducção algebrica. Mas uma sã apreciação da complicação necessaria das formulas seguintes deve finalmente dispor-nos a pouco lamentar este fraco alcance do entendimento humano no mais simples dos dominios abstractos. A' pluralidade normal das raizes corresponde a obrigaçáo da formula de cada gráo conter radicaes da especie correspondente, pois,

que os outros elementos algebricos só admittem um unico valor. Gradualmente obrigada a abranger tambem cada um dos grãos precedentes, esta formula deve, pois, conter, sob seus radicaes proprios, todos aquelles de um menor indice. Estas previsões geraes são verificadas comparando-se os tres primeiros grãos, cuja combinação já se torna inextricavel para com o quarto, o que faz assaz sentir que a formula do quinto gráo ficaria sempre inutil» (Comte).

Capitulo VII

Progressões geometricas—Calculo exponencial—Logarithmos

Considerada segundo sua posição na serie das sciencias abstractas, a algebra, para estabelecer completamente a base necessaria ao estudo da geometria, exige em seu problema fundamental uma extensão, que comprehende o estudo de alguns typos usuaes dos desenvolvimentos indefinidos denominados *series*.

Estes desenvolvimentos, que representam um grupo muito extenso e muito importante da mathematica são constituídos por expressões de numero illimitado de termos que se succedem segundo uma lei constante qualquer. Como formações compostas, as series podem ser classificadas em algebraicas e transcendentis segundo a natureza das formações simples que entram em seus differentes termos.

O estudo das series apresenta duas phases: uma algebraica, outra arithmetica.

A primeira comprehende os diversos methodos por que nós podemos desenvolver uma formação em serie; e os tres problemas capitaes: 1º determinação do termo geral, isto é, da formula que nos permite obter um termo de ordem qualquer sem ser preciso formar todos os precedentes; 2º determinação da somma de um numero qualquer de termos da serie,

isto é, da formula que nos dá esta somma sem ser necessario sommar successivamente esses termos uns aos outros; 3^o intercalação entre os termos da serie, de outros termos sujeitos a mesma lei, o que constitue a *interpolação*. A phase arithmetica comprehende o estudo das considerações de convergencia das series.

Com os recursos de que pode dispor a algebra directa, a solução dos dois primeiros problemas está limitado a um muito pequeno numero de casos, e mesmo com o auxilio do calculo transcendente taes questões ainda têm de ser restringidas embora ahí fique sufficientemente elaborado o estudo dos casos mais usuaes.

As series em que cada termo forma-se da somma algebrica de certo numero de termos precedentes multiplicados por quantidades constantes foram denominadas de *recurrentes* por Moivre. Estas series, que constituem o grupo das progressões geometricas, podem apresentar differentes grãos de complicação conforme o numero de termos precedentes que concorre para formar o termo seguinte. A progressão diz-se de 1^o, 2^o, 3^o, etc ordem quando cada termo depende de 2, 3, 4 etc termos precedentes; cada uma ordem apresenta differentes classes segundo o modo de combinação dos termos anteriores para formar o termo seguinte. No grupo das progressões geometricas podemos ainda decompor a questão, concebendo um typo particular, o mais simples de todos, em que cada termo é formado do precedente multiplicado por uma quantidade constante. E' a este typo que aqui limitaremos o nosso estudo, como sendo o mais usual e mesmo porque o estudo dos outros complica-se por tal forma que a progressão

onde cada termo é igual á somma de dois precedentes é uma progressão insolúvel.

As progressões originão-se da observação do mundo.

Toda observação, toda experiencia, diz Laffitte, conduz a determinação de uma serie de numeros incoherentes em apparencia. os quaes nos farão conhecer a lei do phenomeno, desde que seja possível estabelecermos entre elles uma filiação regular.

Se, por exemplo, estudando a queda dos corpos sobre um plano inclinado, como fez Galileu, acharmos que fazendo parar o corpo no fim de 1^o, 2^o, 3^o, 4^o, 5^o, da queda os espaços percorridos sobre o plano são respectivamente 1^{metro}, 4^m, 9^m, 16^m, 25^m e notarmos que os numeros que formão a segunda serie são os quadrados dos que lhes correspondem na primeira, teremos uma primeira noção da lei, a qual se enuncia dizendo que os espaços são iguaes aos quadrados dos tempos.

Não foi assim que Galileu obteve a lei. Elle observou, fazendo rolar uma bola sobre um plano inclinado, que os espaços percorridos durante o primeiro, o segundo, o terceiro, etc segundos da queda estavam entre si como a serie dos numeros impares 1, 3, 5, 7, 9, o que muito insufficientemente pode indicar qual será o espaço percorrido durante um numero dado de segundos.

O conhecimento, porem, da formula das progressões permite resolver a questão. Chamando l o ultimo termo de uma progressão arithmetica, a o primeiro termo, r a razão : n sendo a ordem do termo l , temos: $l = a + (n - 1)r$ e tambem $S = \frac{a + l}{2} \times n$, sendo

S a somma dos n primeiros termos. Substituindo n'esta formula l pelo seu valor, temos:

$$S = \frac{a + [a + (n-1)r]}{2} \times n = an + \frac{r}{2} \times (n^2 - n).$$

Para a serie dos numeros iinpares, que é uma progressão arithmetica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é 2, esta formula reduz-se a $S = n^2$.

Ora, n exprimindo no problema de Galileu o numero de segundos ou o tempo da queda, S o espaço percorrido pelo movel durante esse tempo, esta formula nos mostra que os espaços são proporcionaes aos quadrados dos tempos, o que teria sido impossivel descobrir só com os resultados da experiencia.

Si, se fizer, agora, maior a inclinação do plano, nota-se que os numeros da primeira serie ficando os mesmos, os da segunda são todos multiplicados por um mesmo numero, que depende da inclinação do plano, d'onle conclue-se que os espaços percorridos são sempre proporcionaes aos quadrados dos tempos empegados em percorrel-os. E' preciso rão suppor que os numeros achados apresentam esta proporcionalidade rigorosa, porque a resistencia do ar, o attrito a impossibilidade de terminar-se o movimento justamente no fim de um segundo etc, tornão muito difficil a interpretação dos resultados da medida. E' necessario fazer abstracção de todas estas influencias perturbadoras, introduzir o que em astronomia se denomina de coefficients de desfalção, os quaes não podem deixar de ser aproximativo, e é então que intervem a algebra. Entre as series estudadas por esta sciencia escolhe-se a que mais se aproxima da serie dada pela observação do phenomeno, e depois verifica-se sua exactidão. Proced-se assim por ten-

tativas successivas, partindo do caso mais simples, que se vae de mais a mais complicando conforme exigirem as necessidades, sendo o gráo de precisão verificado pela applicação pratica.

Ainda mais ; a observação convenientemente corrigida pode conduzir a series menos simples que a precedente. Pode dar-se que estudando-se, por exemplo, tal ou tal movimento, se ache que o movel no fim de 5, 25, 35, 45, 55, 65, segundos, tenha percorrido espaços representados pelos numeros. 1, 3, 6, 10, 15, 2 ou bem. 1, 5, 14, 30, 45, 81, ou tal outra serie.

Se tratarmos então de generalisar, isto é. de estender a lei a todos os casos, a impossibilidade será absoluta, caso não conheçamos de antemão os diversos modos que pôde tomar o enunciado da lei.

Asim, na primeira serie, cada numero é a somma de tantos numeros naturaes quantas são as unidades da ordem que elle occupa : 3 (3ª ordem) é igual a somma dos dois primeiros numeros $1+2$; 6 (3ª ordem) é igual a somma dos 3 primeiros numeros $1+2+3$; no fim, pois, de n segundos o movel terá percorrido um espaço representado pela somma dos n primeiros numeros, e a algebra nos ensina que esta somma é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Na segunda serie temos a somma dos quadrados dos numeros naturaes; é necessario saber transformar esta somma de maneira a tornal a calculavel.

Se não se conhecesse os resultados d'estas transformações, seja impossivel enunciar a lei e por conseguinte applral-a ».

Estas considrações do Senr. Laffitte deixam bem claro a importancia do estudo das progressões no dominio algebrico. Instituir os typos abstractos, es-

tudal-os, para depois, quando tivermos de apreciar os factos objectivos, procurar a qual desses typos corresponde o caso concreto considerado, ou que d'elle mais se aproxima; eis uma marcha de proceder naturalmente determinada por estes dois preceitos fundamentaes da logica: 1º partir do conhecido para o desconhecido; — 2º decompor o caso complexo em casos simples. Tal é o facto que tão bem traduzem as considerações acima feitas para o dominio algebrico e que tão evidente se apresenta no dominio da geometria e da mecanica.

Antes de entrarmos na apreciação das progressões geometricas, convem expormos algumas questões relativas as progressões arithmeticas e aos numeros figurados, que apreciados no calculo dos valores devem aqui ser completados pelas questões importantes que permite formular a algebra directa.

A primeira d'estas questões consiste na determinação geral da somma das potencias m de uma serie de n numeros a, b, c, \dots, k, l , em progressão arithmetica cuja razão seja r .

Segundo a lei da formação dos termos de uma progressão arithmetica, temos:

$$b = a + r, c = b + r, d = c + r \dots l = k + r,$$

Elevando ambos os membros de cada uma destas igualdades á potencia $m+1$, e desenvolvendo segundo a lei de Newton, temos:

$$b^{m+1} = a^{m+1} + (m+1) a^m r + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-1} r^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-2} r^3 + \dots$$

$$c^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m r + \frac{m(m+1)}{1.2} b^{m-1} r^2 +$$

$$+ \frac{m(m+1)(m-1)}{1.2.3} b^{m-2} r^3 + \dots$$

$$l^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m r + \frac{m(m+1)}{1.2} k^{m-1} r^2 +$$

$$+ \frac{m(m+1)(m-1)}{1.2.3} k^{m-2} r^3 + \dots$$

Sommando estas igualdades membro a membro, temos :

$$l^{m+1} + c^{m+1} + \dots + l^{m+1} = (a^{m+1} + b^{m+1} + \dots + k^{m+1})$$

$$+ (m+1)r[a^m + b^m + \dots + k^m] + \frac{(m+1)m}{1.2} r^2$$

$$[a^{m-1} + \dots + k^{m-1}] + \frac{m(m+1)(m-1)}{1.2.3} r^3$$

$$[a^{m-2} + \dots + k^{m-2}] + \dots$$

Representando por S_{m+1} , S_m , S_{m-1} , ..., S_2 , S_1 , as sommas respectivas dos termos da progressão elevados, cada um, á potencia marcada pelo indice, temos :

$$S_{m+1} - a^{m+1} = S_{m+1} - l^{m+1} + (m+1)r[S_m - l^m]$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1.2} r^2 \left[S_{m-1} - l^{m-1} \right] + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} r^3$$

$$\left[S_{m-2} - l^{m-2} \right] + \dots \text{formula que simplificada nos}$$

dá a relação fundamental seguinte, entre a somma

das potencias m e as sommas analogas relativas ás potencias anteriores :

$$l^{m+1} - a^{m+1} = (m+1)r[S_m - l^m] + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} r^2$$

$$[S_{m-1} - l^{m-1}] + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3$$

$$[S_{m-2} - l^{m-2}] + \dots \dots (a)$$

Para obter os valores de S_1, S_2, S_3 , etc., basta fazermos $m=0, 1, 2, 3$, etc.

Para $m=0$, temos : $l-a=r (S_0 - l^0)$; porém, $S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \dots \dots \dots l^0 = 1 + 1 + \dots \dots + 1 = n$, d'onde (1) $l-a=r(n-1)$ ou $l=a+r(n-1)$; formula identica a que conhecemos do calculo dos valores.

Fazendo $m=1$, temos :

$$l^2 - a^2 = 2r(S_1 - l) + r^2(S_0 - l^0) = 2r(S_1 - l) + r(l-a) ; \text{ por-}$$

$$\text{que } S_0 - l^0 = \frac{l-a}{r} : \text{ d'onde } S_1 = \frac{l^2 - a^2 + rl + ra}{2r}$$

$$= \frac{(l-a+r)(l+a)}{2r} ; \text{ porém. a igualdade (1) nos dá}$$

$$l-a+r=nr, \text{ logo : } S_1 = \frac{n(a+l)}{2}$$

E assim para as demais sommas. Posto que por este meio, diz Comte, se podesse certamente chegar a sommar potencias especiaes mesmo muito altas, seria difficil induzir a lei geral propria a um expoente m indeterminado. Baseado no methodo dos coefficients indeterminados, Thomas Simpson imaginou um modo muito elegante para obter a somma das potencias semelhantes dos termos da progressão arithmetica.

Substituindo na formula de $S_1 = \frac{(a+l)n}{2}$ l por seu

valor $a+(n-1)r$ temos $\frac{r}{2}n^2 + \frac{2a-r}{2}n$, expressão que contem o quadrado e a potencia um de n ; para S^3 teriamos uma expressão com as potencias $1^3, 2^3, 3^3$ de n , d'onde podemos para a potencia m suppor o desenvolvimento $An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \dots + Mn$, sendo A, B, C etc., coefficients a determinar independentes de n .

Porem a somma $a^m + b^m + c^m + \dots + l^m$, substituindo b por sua expressão em a e o mesmo quanto a c, \dots, l , dá.

$a^m + (a+r)^m + (a+2r)^m + \dots + [a+(n-1)r]^m$; igualando esta expressão á primeira, temos: $An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \dots + Mn = a^m + (a+r)^m + (a+2r)^m + \dots + [a+(n-1)r]^m$.

Se supozermos a pogressão com mais um termo, isto é, com $n+1$ teremos semelhantemente:

$$\begin{aligned} A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + C(n+1)^{m-1} + \dots + M(n+1) &= \\ = a^m + (a+r)^m + (a+2r)^m + \dots + [a + & \\ + (n-1)r]^m + (a+nr)^m & \end{aligned}$$

Subtrahindo desta igualdade a primeira temos:

$$\begin{aligned} A[(n+1)^{m+1} - n^{m+1}] + B[(n+1)^m - n^m] + C[(n+1)^{m-1} - & \\ - n^{m-1}] + M = (a+nr)^m & \end{aligned}$$

Desenvolvendo os calculos e ordenando, temos:

$$\begin{aligned} (m+1)An + \frac{(m+1)m}{1.2} An + \frac{m-1}{1.2.3} (m+1)m(m-1) An + \dots & \text{etc} \\ + \frac{m}{1} Bn + \frac{m(m-1)}{1.2} Bn + \dots & \text{etc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m-1}{1} C n^{m-2} \text{ etc} = r n^{m-1} + m a r n^{m-2} \\
 & + \frac{m(m-1)}{1.2} a r n^{m-2} \text{ etc}
 \end{aligned}$$

Identificando os dois polynomios temos:

$$\begin{aligned}
 (m+1)A &= r \cdot \frac{(m+1)_m}{1.2} A + mB = m a r^{m-1} \\
 \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} A &+ \frac{m(m-1)}{1.2} B + (m-1)C = \\
 &= \frac{m(m-1)}{1.2} a r^{m-2} \\
 \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4} A &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} B + \\
 &+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} C + (m-2)D = \\
 &= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a r^{m-3} \text{ etc}
 \end{aligned}$$

Tirando destas equações os valores de A, B, C etc:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{r^m}{m+1}, \quad B = a r^{m-1} - \frac{m+1}{2} A, \\
 C &= \frac{m}{2} a r^{m-2} - \frac{m}{2} B - \frac{(m+1)_m}{2.3} A, \\
 D &= \frac{m(m-1)}{2.3} a r^{m-3} - \frac{m-1}{2} C - \\
 &- \frac{m(m-1)}{2.3} B - \frac{(m+1)m(m-1)}{2.3.4} A \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Fazendo nestas formulas $m=1, 2, 2, \text{ etc.}$ e substituindo estes valores na formula $Ax^{m+1} + Ba^m + Cx^{m-1} + \dots$ temos para as sommas das differentes potencias:

$$S_1 = \frac{r}{2}n^2 + \frac{2a-r}{2}n, \quad S_2 = \frac{r^2}{3}n^3 + \frac{2ar-r^2}{2}n^2 + \frac{6a^2-6ar+r^2}{6}n; \text{ e assim para as outras sommas.}$$

Façamos applicação destas formulas á serie natural dos numeros 1, 2, 3, n, para a qual $a=1$, $l=n$, $r=1$.

A nossa formula (a) para este caso se tornará em

$$n^{m+1} - 1 = (m+1)(S_m - n^m) + \frac{(m+1)m}{1.2}(S_{m-1} - n^{m-1}) + \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}(S_{m-2} - n^{m-2}) + \dots$$

Fzendo nesta formula $m=0$, temos :

$$n-1 = S_0 - 1, \quad S_0 = n; \text{ fazendo } m=1 \text{ temos: } n^2 - 1 = 2S_1 - 2n + n - 1 \text{ d'onde } S_1 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2};$$

sendo $m=2$, temos $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$; para $m=3$

teriamos $S_3 = \frac{n^2(n+1)}{4}$, e assim por diante.

Empregando estas formulas podemos determinar a somma de um numero qualquer de termos de uma serie cujo termo geral é uma formação racional inteira do numero de termos que se considera, isto é, de n . Se o termo geral de uma serie é, por exemplo, an^p , é claro que sendo a constante, os differentes termos da serie serão obtidos fazendo successivamente $n=1, 2, 3$, etc, neste termo geral e a somma dos termos será: $a1^p + a2^p + 3^p + a4^p + \dots + an^p = (1^p + 2^p + \dots + n^p) a = S_p$.

Se o termo geral é da forma $an^p + bn^q$, cada um dos termos desta serie será a somma dos termos correspondentes nas series relativas a an^p e bn^q , de modo que a somma da serie considerada seria

$$a(1^p + 2^p + \dots + n^p) + b(1^q + 2^q + \dots + n^q) = \\ = a S_p + b S_q.$$

Se o termo geral fosse finalmente da fôrma $an^p \pm \pm bn^q \pm cn^r$, a somma seria $a(1-2^p + \dots + n^p) \pm \pm b(1+2^q + \dots + n^q) \pm (1+2^r + \dots + n^r) c = \\ = a S_p \pm b S_q \pm c S_r.$

Fica por esta fôrma a questão reduzida a determinação da potencia semelhante da serie de numeros, o que sempre se obtem pelas formulas já estabelecidas.

Consideremos as series relativas aos numeros figurados.:

$$1, 2, 3, \dots, \frac{n}{1}; 1, 3, 6, 10, \dots, \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}; 1, 4, 10, \dots$$

$\dots, n \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; a primeira é a dos numeros naturaes, a segunda a dos numeros triangulares e a terceira a dos numeros piramidaes.

O termo geral da 1ª sendo n , a expressão da somma será $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. A segunda cujo termo

geral é $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2 + n}{2}$ pode ser considerada como a metade da somma das series:

$$1 + 4 + 9 \dots + n^2 \text{ e } 1 + 2 + 3 + 4 \dots + n. \text{ A}$$

$$\text{somma da 1ª destas series é } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\text{a da 2ª é } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; \text{ d'onde } \frac{1}{2}(S_2 + S_1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ será a somma da segunda serie}$$

dada. A terceira serie dada tem para termo geral $n \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3 \times 3n^2 \times 2n}{6}$, o qual podemos

decompôr em $\frac{n^2}{6}, \frac{3n^2}{6}, \frac{2n}{6}$, as sommas correspondentes a estes termos são: $\frac{S_1}{6}, \frac{3S_2}{6}, \frac{2S_3}{6}$, d'onde segue-se que a somma da 3ª serie considerada é:

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + 3S_2 + 2S_3}{6} &= \frac{1}{6} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3} \right. \\ &\quad \left. + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \right] + \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{aligned}$$

Estes resultados nos mostram que nas series dos numeros figurados a somma de cada serie é igual ao termo geral da serie seguinte, de modo que a segunda é formada das sommas parciais da primeira; a terceira das sommas parciais da segunda e assim por diante. Para a serie dos numeros naturaes, por exemplo, a somma é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, que representa o termo geral da serie dos numeros triangulares; n'esta serie a somma é $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, que vem a ser o termo geral da serie dos numeros pyramidaes etc.

Vamos ver agora que as formulas dos numeros figurados representam os coefficients successivos do desenvolvimento de uma potencia negativa, igual a n , de um binomio formado pela variavel subtrahida da unidade.

Desenvolvendo pela lei de Newton a potencia

$$(1-x)^{-n}, \text{ temos } (1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 +$$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \dots (1)$$

desenvolvimento cujos coefficients são as formulas já obtidas para os differentes numeros figurados. Fazendo n'esta formula $n=1, 2, 3, 4$ etc. o segundo membro representará para cada caso o desenvolvimento das potencias $-2, -3, -4$, e os coefficients em cada um dos desenvolvimentos correspondentes representarão uma serie de numeros figurados, isto é, os coefficients para $n=2$ serão os termos da serie natural dos numeros, para $n=3$ os da serie dos numeros triangulares, para $n=4$ os da serie dos numeros pyramidaes, etc.

Para estabelecer isto com mais facilidade vejamos qual a dependencia que existe entre os coefficients de uma potencia $-n$, e os da seguinte $-(n+1)$. Para isto multipliquemos a igualdade (1) por $(1-x)^{-1}$ virá:

$$\begin{aligned} (1-x)^{-n-1}(1-x)^{-1} + nx(1-x)^{-1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2(1-x)^{-1} + \\ + \dots; \text{desenvolvendo } (1-x)^{-n-1} = 1 + x + x^2 + \\ + x^3 + \dots + nx + nx^2 + nx^3 + \dots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \\ + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^3 + \dots; \text{ordenando, temos: } (1-x)^{-n-1} = \\ = 1 + (n+1)x + \left(1+n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right)x^2 + \\ + \left(1+n + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Este desenvolvimento nos mostra que os coefficients de um termo na potencia $-(n+1)$, forma-se da somma dos coefficients dos termos da potencia anterior $-n$ desde o primeiro até ao do termo da mesma ordem d'aquelle considerado inclusive.

Fazendo, pois, em (1) $n=1$, temos, para coefficients do desenvolvimento de $(1-x)^{-1}$: 1, 1, 1, 1, 1, etc.

Segundo a lei de dependencia que acabamos de deduzir, os coefficients dos termos da potencia $(1-x)^{-2}$, serão :

1, $1+1=2$, $1+1+1=3$, $1+1+1+1=4$, 5, 6, 7, 8, etc.

que constituem a serie dos numeros naturaes ; para a potencia $(1-x)^{-3}$, teriamos os coefficients :

1, $3+1=4$, $6+3+1=10$, $10+6+3+1=20$, 35, etc. que representam a series dos numeros pyramidaes ; e assim para as demais potencias negativas.

Tendo assim formulado as principaes noções que devemos referir ao estudo das progressões passamos a estudar o typo mais simples e mais usual das progressões geometricas, onde cada termo é formado pelo precedente multiplicado por uma quantidade constante, que se denomina base.

Se na progressão considerada a base é menor que a unidade, os termos da progressão irão decrescendo necessariamente e a progressão diz-se *decrescente*; se a base ou razão é maior que a unidade, os termos da progressão irão crescendo successivamente e a progressão diz-se *crescente*.

O estudo da progressão geometrica dá lugar, como dissemos, a tres problemas fundamentaes : 1º, determinação do termo geral, isto é, da formula algebrica que traduz a lei geral por que se fórma um termo qualquer ; 2º, intercallação de meios geometricos ou determinação entre dois termos da progressão dada de novos termos sujeitos á mesma lei ; 3º, determinação da somma dos termos da progressão.

Vejamos como resolver o primeiro problema :

Seja $a:b:c:\dots:k:l$ a progressão dada cuja base chamaremos r . Segundo o modo de formação dos termos da progressão temos as equações :

$b=ar$, $c=br=ar^2$, $d=cr=ar^3$; que nos mostram ser cada termo formado pelo producto do 1º termo, por uma potencia da base igual ao numero de termos que o precedem.

Designando, pois, por T_n o termo de ordem n , a expressão geral d'este termo será $T_n=ar^{n-1}$; formula da qual, particularizando n , nos é possível obter um termo de ordem qualquer, sendo a razão e só o primeiro termo conhecidos.

O segundo problema é resolvido facilmente por esta formula.

A questão da inserção dos meios geometricos entre os dois termos dados da progressão, reduz-se a determinar-se qual a razão que deve ter a nova progressão.

Supponhamos, pois, a e b os dois termos da progressão dada, entre os quaes se quer inserir $(m-1)$ meios geometricos, isto é, quer-se formar com a e b uma progressão de $(m-1+2)$ termos, sendo a o primeiro e b o ultimo.

Se conhecessemos a base a questão estaria resolvida, pois bastava multiplicar-a por a para ter o 2º termo; este multiplicado pela base daria o terceiro e assim por diante.

Vejamos, pois, como obter a base.

Sendo b o termo de ordem $m+1$ na progressão procurada, o numero de termos que o precedem é igual a m ; sendo o 1º termo a conhecido, podemos, empregando a formula do termo geral, determinar r , que para este caso será dada pela equação $r^m = \frac{b}{a}$

$$\text{ou } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Conhecida a base a progressão procurada seria :

$$a : a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} : a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{m}} : a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{m}} \dots \dots : a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

O numero de termos inseridos pode ser augmentado de modo que a differença entre dois termos consecutivos da nova progressão seja tão pequena quanto se queira. Com effeito, consideremos dois meios consecutivos

$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{m}}$ e $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{m}}$, sendo a menor que b, o que sempre é possível ; tomando a differença temos :

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{m}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{m}} = -a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{m}} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right];$$

expressão que tende para zero quando m cresce indefinidamente, pois que o factor

$a\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^k$ que é um dos meios inseridos fica

sempre finito quando varião m e K, e o termo $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$

tende para a unidade, de modo que a differença, que constitue o segundo factor tende para zero. Nós podemos assim representar em uma progressão geometrica todos os numeros pela inserção de um grande numero de meios geometricos.

O terceiro problema relativo a determinação da somma dos termos não é susceptivel de ser resolvido para os typos das progressões geometricas por nenhum

dos artificios que empregamos no estudo das progressões arithmeticas, quer com o recurso do binomio de Newton, quer com o auxilio do methodo de Descartes. O apparecimento de formações exponenciaes na expressão do termo geral complica de um modo notavel a questão, e por tal forma que o estudo destes casos exige outros recursos de que não pode dispor a algebra directa convenientemente coordenada para constituir a base natural do dominio geometrico. O artificio empregado por Archimedes é relativo ao typo mais simples das progressões o qual estamos estudando. Elle notou que a progressão não se alterava multiplicando-se os seus termos pela base, e depois de effectuar esta modificação subtrahio da progressão modificada a progressão primitiva, o que immediatamente lhe deu a lei da sommação.

Seja, por exemplo, a progressão $a:b:c\dots k:l$

Chamando S a somma dos termos temos: $S = a + b + c + \dots + k + l$; multiplicando os dois membros desta igualdade por r, que chamaremos a base, temos: $Sr = ar + br + cr + \dots + kr + lr$, porem como $ar = b$, $br = c$, $cr = d \dots kr = l$, esta ultima progressão se transformará em $Sr = b + c + d + \dots + l + lr$

Subtrahindo d'esta igualdade membro a membro a igualdade primitiva, temos: $S(r-1) = lr - a$, d'onde $S = \frac{lr - a}{r-1}$ ou, substituindo l por seu valor $a r^{n-1}$:

$$S = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}. \quad (1)$$

Applicando esta formula ao caso da progressão decrescente indefinida temos que a somma para este caso tem para limite. $S = \frac{a}{1-r}$ porque a for-

mula (1) pode ser escripta $S = \frac{a}{1-r}(1-r^m)$; sendo r menor que a unidade para valores crescentes de m o termo r^m tende para zero, e S tende para $\frac{a}{1-r}$, isto é, a somma indefinida da progressão decrescente tem para expressão equivalente o termo inicial dividido pela differença entre a unidade e a base.

E' assim que vemos surgir o primeiro exemplo de limite historicamente emanado do estudo das fracções no calculo dos valores.

Applicando esta regra ao caso das dizimas periodicas, podemos directamente determinar a formula da fracção geratriz correspondente.

Consideremos o caso mais simples em que o periodo só tem um algarismo e seja a, b, b, b, \dots a dizima considerada sendo b um numero inteiro simples. Esta dizima pode ser escripta do seguinte modo $\frac{b}{10}, \frac{b}{100}, \frac{b}{1000}, \frac{b}{10000}, \dots$ etc o que não é mais que uma progressão decrescente, cuja razão é $\frac{1}{10}$. A formula da somma nos dá para este caso:

$$S = \frac{\frac{b}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{b}{9}$$

Se o periodo tivesse dois algarismos, representado estes por a e b , a progressão correspondente á dizima seria $\frac{ab}{100}, \frac{ab}{10000}, \frac{ab}{1000000}, \dots$ etc, e a formula da somma nos daria $\frac{ab}{100} \div \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{ab}{99}$

Na progressão de numero limitado de termos o producto dos termos equidistantes dos extremos é constante.

Seja a progressão $a:b:c: \dots : h:k:l$, (1) que supomos ter m termos: seja x o termo que tem n termos precedentes, e y o termo que tem n termos depois de si. Chamando r a razão, temos: $x = ar^{n-1}$. Considerando agora a progressão que vaé de y a l e que tem $n+1$ termos, sendo y o 1º termo, temos: $l = yr^{n-1}$, d'onde $y = \frac{l}{r^n}$. Multiplicando as expressões de x e y membro a membro temos: $yx = al$, resultado independente do lugar occupado pelos termos considerados, que nos mostra ser o producto dos termos equidistantes igual ao producto do primeiro pelo ultimo termo da progressão.

Baseados nesta propriedade podemos determinar o producto dos termos da progressão (1). Com effeito, chamando P este producto, resulta as duas igualdades evidentes:

$$P = a \times b \times c \times d \dots \times g \times h \times k \times l \quad \text{e} \quad P = l \times k \times h \times g \times \dots \times c \times b \times a$$

Multiplicando membro a membro estas igualdades temos:

$$P^2 = (a \times l) \times (b \times k) \times (c \times h) \dots (k \times b) (l \times a); \text{ formula que, segundo a propriedade anterior reduz-se a } P^2 = (al)^n, \text{ donde } P = (al)^{\frac{n}{2}}.$$

Ficão, pois, resolvidos os tres problemas fundamentaes a que dá logar o estudo das progressões para o typo mais simples e mais usual. As formulas relativas a estes problemas permitem resolver outros, d'entre os quaes alguns se achão fóra dos recursos até agora expostos. E' assim que vemos mesmo

no caso mais simples surgirem questões de complicação superior, o que ainda vem mostrar a vastidão das questões que podemos formular e a deficiencia dos meios de que podemos dispor para resolvel-as.

D'entre os 10 problemas que se pode formular 4 são susceptíveis de facil resolução e são os seguintes :

1º Sendo dados a, r, n determinar

$$l \text{ e } S \quad l = ar^{n-1}, \quad S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

2º Sendo dados a, n, l determinar

$$r \text{ e } S \quad r = \left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad S = \frac{(ln)^{n-1} \cdot (a^n)^{n-1}}{(l)^{n-1} - (a)^{n-1}}$$

3º Sendo dados r, n, l determinar

$$a \text{ e } S \quad a = \frac{l}{r^{n-1}}, \quad S = \frac{l(r^n - 1)}{r^{n-1}(r - 1)}$$

4º Sendo dados r, n, S, determinar

$$a \text{ e } l \quad a = \frac{S(r-1)}{r^n - 1}, \quad l = \frac{Sr^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}$$

Dois dos problemas dependem de equações de gráo superior, e são aquelles em que as incognitas são a e r ou l e r.

Para o primeiro caso a formula $S = \frac{lr - a}{r - 1}$ nos dá $a = lr - Sr + S$; este valor substituido na equação $l = ar^{n-1}$, dá, para determinar r, a equação de gráo n: $(S-1)r^n - Sr^{n-1} + l = 0$.

Para o segundo r seria obtido pela equação $ar^n - Sr + S - a = 0$.

Finalmente os quatro problemas restantes em que n é uma das incognitas conduzem a equações expecias. Sendo, por exemplo, a e r conhecidos, n

nos será dado pela equação $l = ar^{n-1}$ ou $r^n = \frac{lr}{a}$,
que é da forma $a^x = b$.

As equações d'esta forma denominam-se equações exponenciaes. João Bernoulli, quem primeiro d'ellas se occupou, chamava-as de equações *percurrentes*. Quanto ao estudo d'estas equações, que constituem um grupo mais vasto que o das equações de todos os gráus, a algebra só póde abordar os casos mais simples.

Com o auxilio dos logarithmos nos é possível resolver sómente as equações exponenciaes que se referem aos tres primeiros conjugados de formações simples.

Um concurso qualquer de exponenciaes de bases diferentes, observa Conte, basta para tornar a questão insolúvel, mesmo quando nos limitamos simplesmente a dividir um numero em exponenciaes de bases dadas. O emprego das variaveis auxiliares só póde, n'este caso, referir o problema á resolução de uma equação onde as potencias da incognita são ordinariamente incommensuraveis.

Todo o successo do calculo exponencial limita-se aos casos em que cada membro da equação proposta consiste em um multiplo constante de uma só exponencial, cujo expoente é uma formação natural, ou quando muito uma exponencial simples. E' assim que vemos confirmar-se a reflexão philosophica já suggerida muitas vezes em logica, sobre a aptidão dos novos dominios abstractos para fazer melhor sobressahir a insufficiencia de nossas forças theoricas.»

As equações exponenciaes podem apresentar diferentes typos. Quando a variavel affecta immediatamente a base como na equação $a^x = b$ a equação diz-se

de 1ª ordem ; se a variavel não affecta immediatamente a base a equação póde ser de 2ª ordem

como $a^b = c$, de 3ª ordem como $a^{b^c} = e$, de 4ª ordem etc.

Estas equações podem ter dois ou mais termos, como acontece com as equações $a^x + a^{2x} = c$, $a^x + a^{2x} + a^{3x} = e$, etc., que são de 1ª ordem de dois termos e de três.

As equações exponenciaes de uma ordem qualquer são completas quando contêm todas as ordens inferiores, assim a equação $a^b + a^x + c = 0$, é uma exponencial completa de 2ª ordem, por conter uma exponencial de 2ª ordem, uma de 1ª e o termo cons-

tante ; a equação $a^{b^c} + a^d + a^x + f = e$ é uma equação completa de 3ª ordem, etc.

N'este dominio da algebra directa as questões são por tal fórma complicadas, que a equação $a^x + b^x = c^x$, em apparencia simples, é insolúvel pelo simples facto da concurrencia das bases differentes a , b e c ; casos ha, porém, em que a equação por tal fórma simples que a sua resolução torna-se muito elementar.

Seja, por exemplo a equação :

$$27 \times 3^{x^2-3x} = (19683)^{\frac{1}{x}}$$

elevando ambos os membros á potencia x , temos : $3^{3x+x^3-3x^2} = 3^9$, d'onde resulta, $x^3 - 3x^2 + 3x = 9$ ou $(x^2 + 3)(x - 3) = 0$, o que dá $x = 3$.

Vamos agora ver como o emprego das variaveis auxiliares no caso de bases distinctas dadas, reduz o problema a resolução de uma equação de coefficients incommensuraveis. Seja a equação :

$$Aa^{mx+m'} + Bb^{nx+n'} + Cc^{px+p'} + \text{etc} = 0. (1)$$

Fazendo $Aa^{m'}=A'$, $Bb^{n'}=B'$, $Cc^{p'}=C'$ etc, temos :

$$A'a^{mx} + B'b^{nx} + C'c^{px} + \text{etc} = 0 \quad (2).$$

Para reduzir agora as bases diferentes a uma só torna-se necessario o emprego das variaveis auxiliares : façamos, pois, $b=a^z$, $c=a^u$ etc, sendo z , e novas variaveis ; a equação (2) tomará a forma :

$$A'a^{mx} + B'a^{znx} + C'a^{upx} + \text{etc} = 0 \quad (3).$$

Fazendo $a^x=y$ temos :

$$A'y^m + B'y^{zn} + C'y^{pu} + \dots = 0 \quad (4).$$

Se a equação (4) fôr de gráo que nós possamos algebricamente resolver, determina-se por ella a expressão de y ; ou caso seja de gráo superior ao 4º a resolução será numerica. Emqualquer destes casos, porem, os expoentes zn e pu etc. de y são incommensuraveis porque os valores de z , u , etc serão dados respectivamente pelas equações $b=a^z$ e $c=a^u$ etc, que em geral dão para as variaveis valores incommensuraveis. como adiante veremos. Conhecido y , o seu valor substituido na equação $a^x=y$, nos permitiria obter x .

Estas difficuldades sugeridas nos casos mais simples do calculo exponencial nos deixão claramente vêr o quanto rapidamente restringe-se o problema fundamental da algebra directa, desde qua se passa das equações algebraicas para as equações transcendentas. Aceita esta restricção o estudo dos casos mais simples só fica perfeitamente elaborado com o recurso da instituição dos logarithmos, cujo officio algebrico consiste em fornecer as raizes das equações exponenciaes.

Seguindo uma marcha identica a que temos seguido até agora, devemos procurar reduzir o

estudo mais complicado das equações exponenciaes, cuja resolução está ao nosso alcance, a depender dos casos mais simples já estudados, representados pelas equações algebraicas. Tal é o facto importante que nos permite realizar a theoria dos logarithmos.

Os logarithmos apresentam duas origens: uma arithmetica, d'onde elles resultão da comparação das duas progressões usuaes arithmetica e geometrica; outra algebraica onde são considerados como exponentes capazes de adaptar uma base á representação de todos os numeros possiveis.

Os progressos da astronomia, a necessidade de uma navegação mais exacta, determinada pelas exigencias de uma sociabilidade mais desenvolvida, exigindo calculos muito laboriosos, levaram o espirito humano a indagar de um meio com que os podesse simplificar e d'ahi a descoberta dos logarithmos.

Esta descoberta foi feita por Nèper em começo do seculo XVII e mais tarde deffinitivamente completada por Briggs.

Neper deduzio a noção de logarithmos da comparação de uma progressão geometrica com um progressão arithmetica, as quaes elle obtinha pela supposição do movimento de dois pontos, um com uma velocidade proporcional a sua distancia a uma origem determinada e o outro com uma velocidade uniforme, sendo esta igual a velocidade do 1º, de modo que o 1º percorria espaços em progressão geometrica enquanto o segundo percorria espaços em progressão arithmetica.

Nós lembramos este modo por que Neper concebeu os logarithmos para mostrar a origem concreta de uma noção tão importante, cuja concepção por esta forma

estabelecida mostra mais uma vez a salutar influencia que sempre exerceu o dominio concreto sobre o abstracto.

Estudemos os logarithmos segundo sua origem no calculo dos valores :

1.^o Theorema.—Quando duas progressões, uma geometrica P começando por a , e outra arithmetica P' começando por b , são taes : 1.^o, que o producto de dois termos de P represente um outro termo d'esta progressão ; 2.^o, que a somma dos dois termos correspondentes na progressão P' represente tambem um outro termo d'esta progressão, correspondendo ao novo termo de P , os primeiros termos a e b deverão ser, o primeiro a unidade ou uma certa potencia da base da progressão P , e o segundo zero ou um multiplo da base da progressão P' , o qual corresponde á potencia da razão da progressão P .

Para mostrar isto chamemos T e T' os dois termos da progressão P , cuja razão seja r , e t e t' os termos correspondentes da progressão P' , cuja razão designamos por r' .

Sendo o producto $T \times T'$ um termo da progressão P , devemos ter $T \times T' = ar^k$ (1) sendo k o numero de termos precedentes ; pela mesma razão a progressão arithmetica nos dá $t + t' = b + kr'$ (2).

Porém, tambem T e T' sendo termos da progressão P , devemos ter :

$$T = ar^m \text{ e } T' = ar^n, \text{ d'onde } T \times T' = a^2 r^{m+n} \text{ (3)}$$

A progressão arithmetica nos dá: $t = b + mr'$ $t' = b + nr'$ d'onde: $t + t' = 2b + (m+n)r'$ (4). As igualdades (1) e (3) dão :

$$ar^k = a^2 r^{m+n}, \text{ d'onde } r^k = ar^{m+n} \text{ e } a = r^{k-(m+n)} \text{ (a)}.$$

Das igualdades (2) e (4) tira-se :

$$b + kr' = 2b + (m + n)r'$$

d'onde $b = [k - (m + n)]r'$ (c).

Nas igualdades (c) e (a) dois casos se podem dar : k póde ser igual ou differente de $m + n$.

Do primeiro caso resulta $a = r^0 = 1$, $b = 0$, o segundo traduz-se na fórmula $k - (m + n) = h$, o que nos dá para os primeiros termos : $a = r^k$, $b = hr^k$ c. q. d.

Tomemos d'estas duas hypotheses a mais simples, como fez Neper, isto é, aquella em que o primeiro termo da progressão geometrica é igual á unidade, e consideremos as duas progressões :

$$\therefore 1 : (1 + a) : (1 + a)^2 : \dots (1 + a)^n \dots e \div 0. d. 2d. 3d. \dots nd. \dots (1)$$

Os termos da progressão arithmetica são os logarithmos dos termos correspondentes da progressão geometrica. A base do systema de logarithmo tem sempre para logarithmo a unidade.

As variações dos termos das duas progressões (1) devendo ser por grãos muito pequenos, é claro que para um accessimo do termo 1 da progressão geometrica deve corresponder um accessimo do termo 0 da progressão arithmetica ; estes accessimos sendo arbitrarios podem ser regulados de modo que entre elles exista um certo modo de relação. Assim podemos fazer com que para um accessimo do termo 1 corresponda para o termo 0 um outro duplo, triplo etc. do primeiro ; a relação entre os accessimos dos termos 1 e 0 denomina-se *modulo* do systema, o qual, como vemos, é arbitrario. Representando por M o modulo, por a o accessimo de 1 e chamando b o accessimo correspondente do termo 0 da progressão arithmetica temos : $\frac{b}{a} = M$, d'onde $b = Ma$. As duas progressões (1) podem pois ser escriptas : $\therefore 1 : (1 + a) : (1 + a)^2 \dots e \div 0. Ma. 2Ma. 3Ma. \dots$ Cada systema

de logarithmos é caracterizado pelo valor particular attribuido ao modulo ; sendo este igual a unidade teremos para systema correspondente o de Neper, que será representado pelas progressões :

$\div 1 : (1+a) : (1+a)^2 \dots (1+a)^m \dots$ e $\div 0$. a. $2a$. $3a \dots ma \dots$ (2).

Vejamos como obter a base d'este systema. Chamando B esta base, é claro que B deve fazer parte da progressão geometrica (2): seja $B=(1+a)^m$; o termo ma correspondente da progressão arithmetica deve ser igual a unidade, d'onde $ma=1$ ou $m=\frac{1}{a}$. Este valor substituido na expressão de B dá :

$$B=(1+a)^{\frac{1}{a}} \quad (3).$$

Sendo a o acrescimo do termo 1 da progressão geometrica, o qual pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, podemos suppor-lhe a forma $\frac{1}{n}$ podendo n crescer indefinidamente. Substituindo este valor na expressão (3) temos :

$$B=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Desenvolvendo o segundo membro pela lei de Newton e simplificando temos :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = & 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \dots \\ & \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)}{1.2.7\dots p} + \dots \end{aligned}$$

Suppondo n infinitamente grande, resulta um valor que se costuma designar por e; $e=2+\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots \frac{1}{1.2.3\dots n}$, o qual representa a base

de Neper, cujo systema, como mostramos, corresponde á hypothese mais simples do modulo igual á unidade. Os logarithmos deste systema costuma-se representar pela letra *l* e denominar-se *naturaes* ou *hyperbolicos*; esta denominação, porem, como judiciosamente observa Lacroix, é viciosa, pois que não ha systema de logarithmos que não corresponda a alguma das curvas denominadas *hyperboles*, pelos geometras, sendo preferivel denominar-os logarithmos *neperianos*. A base *e* avaliada dá proximamente $e=2,7182818$

O numero *e* está comprehendido entre 2 e 3. Para mostrar isto basta provar que a somma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \text{etc} \text{ é menor que } 1.$$

Representemos por S esta somma. E' claro que $S < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$: applicando a esta progressão

a formula conhecida $S = \frac{a}{1-r}$ temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \text{ etc} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ d'onde } S < 1.$$

Destainville deu uma demonstração muito simples, para mostrar a incommensurabilidade de *e*, a qual passamos a expor.

Já mostramos que o numero *e* é maior que 2 e menor que 3, a questão está em mostrarmos que este numero não pode ser representado por uma fracção. Supponhamos isto possivel e seja $\frac{m}{n}$ a fracção supposta; n deve ser menor que *m* e maior

que 1, pois que e é superior a unidade, sem ser um numero inteiro; e nós devemos ter a igualdade

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{1.2\dots n} +$$

$$+ \frac{1}{1.2\dots(n+1)} + \dots$$

Esta igualdade multiplicada por $2.3\dots n$ reduz-se a seguinte:

$$2.3\dots(n-1)m = 2 \times 2 \times 3 \times 4 \dots n + 3 \times 4 \dots n +$$

$$+ 4 \times 5 \dots n + \dots + n + 1 + \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

fazendo $2.3\dots(n-1)m = S$, $2 \times 2 \dots n + 3 \times 4 \dots n +$
 $+\dots + n + 1 = P$, temos:

$$S = P + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \text{etc (1); igualdade}$$

que só pode ser satisfeita sendo:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \text{etc um numero inteiro,}$$

como são S e P . A questão, pois, para mostrar que e não pode ser representado por uma fracção $\frac{m}{n}$,

está em provar-se que a somma $\frac{1}{n+1} \pm \text{etc}$

não pode ser um numero inteiro. Para mostrar isto

basta comparar esta somma com a progressão $\frac{1}{n+1} +$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \text{etc do que resulta } \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ etc } < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} +$$

$+\frac{1}{(n+1)^3} + \dots$; porem a somma desta ultimo progressão é inferior a unidade, porque:

$$S_1 = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}, \text{ donde}$$

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \text{eto} < 1$. A equação supposta (1), pois, não pode ter logar e por conseguinte o numero e não pode ser expresso por nenhuma fracção seja qual fôr o seu denominador.

Para que um systema de logarithmos fique conhecido basta conhecer se o modulo ou a base. Para mostrar isto basta demonstrarmos o theorema: A base de um systema de logarithmos elevada a uma potencia marcada por seu modulo é uma quantidade constante.

Seja B a base e M o modulo do systema :

$$\begin{aligned} &:: 1:(1+a):(1+a)^2:\dots\dots(1+a)^m\dots\dots, \\ &\quad \div 0.Ma.2Ma.\dots mMa.\dots\dots; \end{aligned}$$

o numero B devendo fazer parte da progressão geometrica, supponhamos que elle seja igual a $(1+a)^m$; segue-se que na progressão arithmetica devemos ter $mMa=1$, d'onde $m=\frac{1}{Ma}$.

Este valor substituido na igualdade $B=(1+a)^m$, dá $B=(1+a)^{\frac{1}{Ma}}$ ou $B^M=(1+a)^{\frac{1}{a}}$.

Quando a decresce indefinidamente nós vimos que $(1+a)^{\frac{1}{a}}$ tende para o valor constante e , d'onde segue-se que em taes condições $B^M=e$, equação que nos mostra ser o modulo de um systema conhecido

desde que se conheça a base, basta para isto tomar os logarithmos a ambos os membros, e, reciprocamente, sendo dado a modulo a base fica conhecida pela equação $B = e^{\frac{1}{M}}$

Podendo existir muitos systemas de logarithmos vejamos se ha alguma relação que permita passar de um systema para outro.

Este problema é importantissimo, pois, dos dois systemas geralmente usados o de Neper e o de Briggs, o primeiro, como veremos no estudo das series, é superior ao segundo sob o ponto de vista algebrico, pois traduz-se por uma serie mais simples, emquanto o segundo, tomando para base o numero 10, base do nosso systema numeral, torna-se mais vantajoso sob o ponto de vista arithmetico, por simplificar muito as avaliações.

Estas vantagens proprias a cada um d'estes systemas leva-nos a empregar ora um, ora outro, conforme a natureza da questão, e exige assim o conhecimento da relação por que é possível passar de um a outro systema.

Seja a progressão $\therefore 1:(1+a):(1+a)^2:\dots B:\dots B'$, em que B e B' são as bases consideradas; chamando M e M' os modulos correspondentes, os dois systemas serão respectivamente representados pelas progressões:

$$O.aM.2aM\dots 1\dots \lg B'(1). \quad O.aM'.2aM'\dots 1 \quad (2).$$

Tomando a relação entre dois termos correspondentes quaesquer de (1) e (2) temos a relação constante $\frac{M'}{M}$; se chegarmos a conhecer esta relação, a questão ficará resolvida, pois basta por ella multiplicarmos os logarithmos do systema (1) para obter os logarithmos do systema pedido (2).

Ora, tomando a relação entre o logarithmo da base B' do systema pedido, tomado no systema dado (1) pelo logarithmo de B' tomado no systema correspondente (2) que é igual a unidade temos $\frac{1}{\lg B'} = \frac{M'}{M}$, donde se conclue que para passar dos logarithmos tomados em um systema de base B para os logarithmos tomados no systema de base B' basta dividir os primeiros resultados por $\lg B'$, isto é, pelo logarithmo da nova base tomado no systema primitivo. A relação $\frac{1}{\lg B'}$ denomina-se *modulo de transformação*.

No systema de Briggs a base é 10, os logarithmos são denominados *vulgares* ou *tabulares*, por serem os logarithmos dados em geral pelas taboas, e o systema é difinido pelas progressões :

$$\dots\dots \frac{1}{10^4} : \frac{1}{10^3} : \frac{1}{10^2} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 10^2 : \dots\dots$$

e—3.—2.—1. 0.1.2.3.....

N'este systema as differentes potencias de 10 têm para logarithmos numeros inteiros, que vem a ser os expoentes das potencias correspondentes, assim o logarithmo de 10 é 1, o de 10² é 2 etc. o de 10ⁿ é n.

Neper havia manifestado a Briggs o projecto de mudar a base do seu systema, mas fallecendo antes de poder levar a effeito sua concepção, a reforma só foi depois realisada pelo digno professor do collegio de Gresham tendo como poderoso auxiliar Gunlher, a quem devemos as primeiras taboas de logarithmos dos senos e tangentes feitas segundo os principios de Briggs.

Vejamos agora quaes as simplificações que traz a instituição dos logarithmos ás operações arithmeticas. Estas simplificações consistem no facto im-

portantissimo da redução das operações mais complicadas ás mais simples. A multiplicação fica assim reduzida a somma; a divisão á subtracção, e finalmente a extracção de raizes quaesquer a simples divisões. Esta redução obtem-se mediante propriedades de que gozão os logarithmos, as quaes vamos mostrar como podem ser deduzidas da consideração de sua origem arithmetica.

Consideremos as duas progressões $\div I:(1+a):(1+a)^2$
 $\dots\dots(1+a)^m$ (1) e $\div 0.r.2r.\dots mr$ (2).

Chamando B a base do systema, e suppondo $B=(1+a)^m$, a progressão arithmetica nos dá $m = \frac{1}{r}$,
 d'onde $m = \frac{1}{r}$; substituindo este valor no valor

de B, temos: $B=(1+a)^{\frac{1}{r}}$ ou $B^r=(1+a)$. Substituindo este valor em (1) teremos a progressão $1:B^r:B^{2r}.B^{3r}:\dots\dots B^{mr}$. Esta progressão comparada com a progressão (2) nos mostra serem os logarithmos dos numeros iguaes aos expoentes a que é preciso elevar a base para obter os numeros considerados.

Nós vemos assim surgir do estudo das progressões fundamentaes a noção algebrica dos logarithmos, a qual consiste em consideral-os como expoentes capazes de adaptar uma base dada á representação successiva de todos os numeros possiveis.

Vejamos agora quaes as propriedades dos logarithmos que nos permitem as simplificações numericas.

A primeira propriedade reduz a multiplicação a uma somma e consiste em que o logarithmo de um producto é igual á somma dos logarithmos dos factores.

Consideremos as progressões :

$$\dots a^{-n} \dots a^{-3} : a^{-2} : a^{-1} : 1 ; a : a^2 : a^3 : \dots a^n ,$$

$$\dots -nb \dots -3b \dots -2b \dots b \dots 0 \dots 2b \dots nb$$

Seja o producto $P \times Q \times R$ e supponhamos $P = a^p$, $Q = a^q$, $R = a^r$; multiplicando membro a membro estas igualdades temos: $P \times Q \times R = a^{p+q+r}$; porém segundo a propriedade já demonstrada $\lg P = pb$, $\lg Q = qb$, $\lg R = rb$, e $\lg PQR = (p+q+r)b$, d'onde $\lg PQR = \lg P + \lg Q + \lg R$.

A demonstração seria identica caso um dos factores ou todos do producto considerado fossem menores que a unidade.

Suppondo, por exemplo, $P = a^{-p}$, $Q = a^{-q}$, $R = a^{-r}$, teriamos $PQR = a^{-(p+q+r)}$, $\lg PQR = -(p+q+r)b$, e $\lg P = -pb$, $\lg Q = -qb$, $\lg R = -rb$, d'onde $\lg PQR = \lg P + \lg Q + \lg R$.

Para um numero qualquer m de factores teriamos:

$$\lg P \times Q \times R \times \dots \times k = \lg P + \lg Q + \dots + \lg k.$$

Suppondo $P = Q = R = \dots = k$ teriamos $\lg P^m = m \lg P$; isto é, o logarithmo de uma potencia é igual ao producto do expoente da potencia pelo logarithmo do numero.

A segunda propriedade reduz a divisão á subtração e consiste em que o logarithmo de um quociente é igual á differença entre o logarithmo do dividendo e o logarithmo do divisor. Esta propriedade demonstra-se facilmente baseado na propriedade anterior.

Suppondo $\frac{P}{R}$ um quociente que representaremos por Q , temos, $P = R \times Q$, d'onde, tomando os logarithmos: $\lg P = \lg R + \lg Q$, ou $\lg Q = \lg P - \lg R$.

A terceira propriedade facilmente reduz as extracções de raizes a simples divisões. Seja $x = Q^{\frac{1}{m}}$ ele-

vando ambos os membros á potencia m e tomando os logarithmos, temos $m \lg x = \lg Q$, d'onde $\lg x = \frac{\lg Q}{m}$.

Esta igualdade nos mostra que o logarithmo de uma raiz de um numero é igual ao logarithmo do numero dividido pelo indice da raiz.

Estas propriedades podem ser de um modo identico deduzidas da consideração da origem algebraica dos logarithmos. Algebricamente, como dissemos, os logarithmos são as raizes da equação $a^x = b$, isto é, o logarithmo do numero b é o valor de x a que deve ser elevada a base a reproduz este numero. Suppondo nesta equação $b = a$ temos $a^x = a$, equação que só pode ser verificada para $x = 1$; d'onde $\lg a = 1$. O logarithmo pois, da base de um systema é igual a unidade, como estabelecemos quando consideramos as duas progressões fundamentaes. Suppondo a negativo e differente da unidade e dando successivamente a x os valores $\frac{2m}{2n+1}$, $\frac{2m+1}{2n+1}$, $\frac{2m+1}{2n}$, a formação a^x tomará os valores

$$\left(-a^{2m}\right)^{\frac{1}{2n+1}}, \left(-a^{2m+1}\right)^{\frac{1}{n^2+1}}, \left(-a^{2m+1}\right)^{\frac{1}{2n}},$$

sendo o primeiro normal e positivo, o segundo normal e negativo e finalmente o terceiro singular: a variavel, pois, no caso de ser a base negativa recebendo valores consecutivos pouco differentes, passará bruscamente do estado positivo ao estado negativo e ao estado imaginario de modo que não poderá servir para representar todos os numeros possiveis. Se a base é igual a unidade, toda potencia qualquer da unidade sendo igual a um, tambem a formação a^x não poderia, qualquer que fosse x , reproduzir um numero differente. Segue-se d'aqui que a base de

um systema deve ser necessariamente um numero positivo, e sendo assim qualquer que seja x a formação a^x não poderá dar um resultado negativo, o que leva a concluir que os logarithmos dos numeros negativos são expressões singulares. Identica conclusão nos apresenta a comparação das duas progressões fundamentaes, onde vemos que os logarithmos dos numeros maiores que a unidade, são positivos os dos numeros menores que a unidade são negativos ficando excluidos os numeros negativos.

Para mostrar como deste modo de conceber algebricamente os logarithmos nós podemos deduzir as suas propriedades basta-nos considerar o caso relativo ao producto, pois a questão, como se verá, é perfeitamente identica a anterior.

Chamando x' , x'' , x''' os logarithmos respectivos dos factores P, Q e R de um producto, temos: $a^{x'}=P$, $a^{x''}=Q$, $a^{x'''}=R$; multiplicando membro a membro temos: $a^{x'+x''+x'''}=PQR$, d'onde $x'+x''+x'''=\lg PQR$ ou $\lg P+\lg Q+\lg R=\lg PQR$.

Apreciada assim a noção de logarithmos, quer em sua origem arithmetica, quer em sua origem algebrica, vejamos como as suas propriedades nos permitem o seu emprego algebrico, que consiste em fornecer as raizes das equações exponenciaes.

Seja a equação $a^x=b$; tomando os logarithmos temos:

$$x \lg a = \lg b, \text{ d'onde } x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Suppondo o expoente uma formação algebrica de x , temos a equação $a^{f(x)}=b$; tomando os logarithmos temos $f(x) \lg a = \lg b$, d'onde $f(x) = \frac{\lg b}{\lg a}$; representando

$\frac{\lg b}{\lg a}$ por c , temos $f(x)=c$. Se a equação $f(x)$ fôr de gráo inferior ao quinto podemos resolvel-a algebricamente, se fôr superior a sua resolução será numerica.

Fica por esta forma, com o auxilio dos logarithmos, a resolução da exponencial dependendo da resolução das equações algebricas. Resolvida assim a equação mais simples $a^x=b$ todas as outras ordens podem ser por meio de contracções a ella reduzidas de modo que fica completa a solução das equações deste typo.

Supponhamos a equação de ordem m , $a^{\frac{x}{k}}=s$; fazem-

do $b^c=z$, temos $a^z=s$; tomando os logarithmos: $z \lg a = \lg s$, d'onde $z = \frac{\lg s}{\lg a} = n$, sendo $n = \frac{\lg s}{\lg a}$; subs-

tituindo z por seu valor: $b^{\frac{x}{k}} = n$, equação da ordem

$m-1$; fazendo $c^d = z'$, temos $b^{z'} = n$, d'onde $z' = \frac{\lg n}{\lg b} = c'$; substituindo z' por seu valor temos:

$c^{\frac{x}{k}} = c'$, equação da ordem $m-2$; continuando do

modo identico chegariamos afinal á equação de 1ª ordem $k^x = M$, d'onde teriamos $x = \frac{\lg M}{\lg k}$.

Supponhamos a equação $Aa^{\frac{mf(x)}{z}} + Bb^{\frac{nf(x)}{z'}} + Cc^{\frac{pf(x)}{z''}} + \dots = 0$ (1); fazendo $b=a$, $c=a$ etc a equação (1) toma a forma $Aa^{\frac{mf(x)}{z}} + Ba^{\frac{nzf(x)}{z'}} + Ca^{\frac{z'pf(x)}{z''}} + \dots = 0$ (2).

Os valores de z , z' etc obtem-se applicando os logarithmos as equações $b=a$, $c=a$ etc, o que dá $z = \frac{\lg b}{\lg a}$, $z' = \frac{\lg c}{\lg a}$ etc.

Fazendo na equação (2) $a^{f(x)} = y$, temos:

$Ay^{\frac{m}{z}} + By^{\frac{nz}{z'}} + Cy^{\frac{z'p}{z''}} + \dots = 0$; equação cujos coefficients serão em geral incommensuraveis. Esta equação dando y , o valor d'esta variavel substituido na equação $f(x) = \frac{\lg y}{\lg a}$, nos permittirá obter x , algebricamente ou numericamente conforme o gráo da formação $f(x)$.

Taes são os recursos da algebra directa no calculo exponencial. As equações exponenciaes nós devemos considerar como tendo um numero infinito de raizes sendo ordinariamente uma só normal.

Vamos agora completar o estudo dos logarithmos apreciando a construcção das *taboas*, auxilio indispensavel á simplificação numerica dos calculos. Uma *taboa* de logarithmos pode ser constituida considerando-se a origem arithmetica ou a origem algebrica dos logarithmos.

O primeiro processo ao qual devemos historicamente referir a construcção das *taboas*, embora pareça mais complexo e menos regular que o segundo comporta, como observa Comte, uma melhor appli-

cação sobretudo para uma serie de numeros de que elle utiliza melhor a successão.

Considerando a concepção arithmetica dos logarithmos, a construcção da taboa exige os dois seguintes problemas :

1.º Problema.—Um numero A sendo dado determinar o seu logarithmo.

SOLUÇÃO.—Decomponha-se o numero A em seus factores primos e seja : $A = a^m b^n c^p$.

Tomando os log. teremos : $\log A = m \log a + n \log b + p \log c$ (1).

A questão reduz-se, pois, a calcular os log. dos numeros primos a , b e c . Por conseguinte, para formar uma taboa de log basta calcular os log dos numeros primos.

A formula (1) servirá para calcular os logs dos numeros não primos. Seja a um numero primo cujo log se quer obter. Procura-se primeiramente entre que potencias da razão q da progressão : $1 : q : q^2 : \dots : q^m : q^{m+1} : \dots$ o numero a se acha comprehendido.

Supponhamos que se tem : $q^m < a < q^{m+1}$. N'este caso os log de q^m e q^{m+1} , sendo $m'r$ e $(m'+1)r$, teremos : $m'r < \lg a < (m'+1)r$.

Por conseguinte o log de a calculado com a aproximação de r unidades será $m'r$ para menos e $(m'+1)r$ para mais.

Esta aproximação é geralmente pouco satisfactoria e para obter-se o log de a com maior aproximação insere-se um certo numero de meios geometricos entre q^m e q^{m+1} , o que dará uma nova progressão da fórmula $q^m : q^1 : q_1 : \dots : q_{p'} : q_{p'+1} \dots q^{m+1}$ (1).

Entre os dois termos $m'r$ e $(m'+1)r$ da progressão arithmetica, que correspondem a q^m e q^{m+1} inserem-se tambem um igual numero de meios arith-

meticos, o que nos dá : $m'r. s. 2s. 3s... p's. (p'+1)r... (m'+1)r^{(2)}$. Em (1) procura-se entre que termos consecutivos a se acha comprehendido.

Seja, por exemplo : $q_{p'} < a < q_{p'+1}$. Os log de $q_{p'}$ $q_{p'+1}$, sendo $p's$ e $(p'+1)s$, teremos:

$$p's < \log. a < (p'+1)s$$

O erro que se commette tomando para log a $p's$ ou $(p'+1)s$ será menor do que s .

Concebe-se, pois, que se póde chegar a calcular log de a com uma aproximação tão grande quanto se queira, pois que entre $q^{m'}$ e $q^{m'+1}$ se poderá sempre augmentando o numero de meios inseridos, tornar a razão da progressão arithmetica correspondente menor que qualquer grandeza dada.

Para resolver esta questão de um modo mais satisfactorio, resolvamos o seguinte problema:

2.º Problema.—Calcular o log de um numero A qualquer com uma aproximação menor que uma quantidade dada $\frac{1}{p}$.

SOLUÇÃO—Descomponha-se A em seus factores primos e seja $A = a^h b^k c^i \dots$ etc, teremos : $\lg A = h \lg a + k \lg b + i \lg c + \dots$ (1). Se calcularmos $\lg a$, $\lg b$ etc, com a aproximação $\frac{1}{p}$, para obtermos $\lg A$ será necessario multiplicarmos cada um destes log respectivamente por h , k , i etc de sorte que o erro para cada uma das partes será $\frac{h}{p}, \frac{k}{p}, \frac{i}{p}$ etc. Será preciso, pois, calcular cada um dos log de a, b, c , etc, com a aproximação $\frac{1}{hp}, \frac{1}{kp}, \frac{1}{ip}$ etc, ou mais simplesmente ainda, afim de só ter uma aproximação, bastará calcular $\lg a$, $\lg b$ etc, com a aproximação $\frac{1}{kp}$, suppondo k o maior dos expoentes h, k, i , etc.

Por este meio se calculará cada uma das partes da

somma (1) a menos de $\frac{1}{p}$; juntando, porem, cada uma das partes da somma o erro se multiplicará e d'ahi poderá tornar-se maior do que $\frac{1}{p}$; mas se m representa o numero de factores primos de A , isto é, o numero das partes da somma (1), bastará calcular cada um dos log de a, b, c , etc com a aproximação de $\frac{1}{kpm}$ para que a somma total $hlg + klg b + \text{etc}$, isto é, para que lgA seja calculado com a aproximação $\frac{1}{p}$. A questão reduz-se, pois, a calcular-se o log de um numero primo a com a aproximação dada $\frac{1}{pkm}$.

Seja $h' = pkm$, a aproximação será $\frac{1}{h'}$. Como anteriormente sejam q^m e q^{m+1} dois termos da progressão geometrica que comprehendem a . Teremos $q^m < a < q^{m+1}$, e tambem $m'r < lga < (m'+1)r$.

Se, pois, se inserir entre q^m e q^{m+1} o numero X de meios geometricos tal, que inserido o mesmo numero entre os termos $m'r$ e $(m'+1)r$ correspondentes da progressão arithmetica, a razão d'esta progressão assim formada seja $\frac{1}{h'}$; é evidente que o log de a será calculado com a aproximação pedida $\frac{1}{h'}$. Porque seja: $q^m : q_1 : q_2 : q_3 \dots q_{p'} : q_{p'+1} \dots q^{m+1}$ a progressão geometrica, obtida inserindo-se X meios entre os termos q^m e q^{m+1} da progressão geometrica primitiva; a progressão arithmetica correspondente será: $m'r, m'r + \frac{1}{h'}, m'r + \frac{2}{h'}, \dots, m'r + \frac{p}{h'}, m'r + \frac{p'+1}{h'}, \dots, (m'+1)r$

Suppondo que a acha-se comprehendido entre $q_{p'}$ e $q_{p'+1}$ teremos:

$$q_{p'} < a < q_{p'+1}, \quad m'r + \frac{p'}{h'} < lga < m'r + \frac{p'+1}{h'}$$

Por conseguinte basta tomar para lga :

$$m'r + \frac{p'}{h'}, \text{ ou } m'r + \frac{p'+1}{h'}$$

Porque o erro commettido para menos ou para mais será inferior á differença $\frac{1}{h}$ dos dois termos consecutivos $m'r + \frac{p'+1}{h'}$ e $m'r + \frac{p'}{h}$, entre os quaes lga se acha comprehendido.

Basta, pois, determinar o numero X de meios a inserir entre $m'r$ e $(m'+1)r$ de modo que a razão da progressão arithmetica seja $\frac{1}{h'}$. O problema não apresenta, pois, difficuldade alguma porque o numero de termos comprehendido entre $m'r$ e $(m'+1)r$ sendo $X+1$, temos pelo theorema fundamental das progressões arithmeticas.

$$(m'+1)r = m'r + (X+1) \frac{1}{h'}, \text{ d'onde } X = rh' - 1$$

O numero de meios geometricos e arithmeticos a inserir entre $q^{m'}$ e $q^{m'+1}$, entre $m'r$ e $(m'+1)r$, obtem-se, assim, subtrahindo a unidade do producto da razão da progressão arithmetica proposta pelo denominador da aproximação dada.

Estes dois problemas nos permitem calcular o logarithmo de um numero qualquer com uma aproximação dada e porconsequente resolver completamente o problema da construcção das taboas.

Consideremos agora a questão quanto a concepção algebrica dos logarithmos.

1º Problema—Calcular o logarithmo de um numero dado A.

Solução—Seja x o logarithmo de A, sendo B a base do systema, temos a equação $A = B^x$ (1). Quatro casos se podem dar.

1º. caso : $A > 1, B > 1$ —. Elevemos B successivamente ás potencias 1, 2, 3.....m, m+1, até encontrarmos duas potencias successivas de B entre as

quaes A se ache comprehendido, e seja, por exemplo, $B^m < A < B^{m+1}$, é claro que x se achará comprehendido entre m e $m+1$. Fazendo, pois, $x = m + \frac{1}{y}$, sendo y uma indeterminada maior que a unidade, a equação (1) se tornará $A = B^{m + \frac{1}{y}}$, $\frac{A}{B^m} = B^{\frac{1}{y}}$,

d'onde $B = \left(\frac{A}{B^m}\right)^y = c^y$, sendo $c = \frac{A}{B^m}$. Temos a resolver uma equação identica á anterior porque sendo $B^m < A$, $\frac{A}{B^m}$ ou c será maior que a unidade.

Seguindo identico raciocinio, isto é, dando a y valores successivos 1, 2, 3 etc. chegaríamos a obter duas potencias consecutivas n e $n+1$ entre as quaes se achasse B comprehendido, achando-se y comprehendido entre n e $n+1$; fazendo então $y = n + \frac{1}{z}$ e continuando de modo identico; substituindo depois y , z etc. no valor de x obteríamos

$$x = m + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \dots$$

fracção continua cujo valor podemos obter com a aproximação que desejamos.

2º Caso — $A < 1$, $B > 1$. O valor de x neste caso não pôde ser positivo, fazendo, pois, $x = -x'$, temos $A = B^{-x'} = \frac{1}{B^{x'}}$ d'onde $B^{x'} = \frac{1}{A}$; expressão que reduz a questão ao caso anterior, pois que $\frac{1}{A} > 1$.

3º caso — $A > 1$, $B < 1$. O valor de x ainda neste caso deve ser negativo, o que dará

$$A = B^{-x'} = \left(\frac{1}{B}\right)^{x'}$$

expressão que reduz a questão ao

primeiro caso. Finalmente póde dar-se o caso de serem B e A menores que 1, que semelhantemente aos precedentes se reduziria a primeira hypothese considerada.

Vejamos quaes as condições que devem existir para que o valor de x seja commensuravel. Seja $\frac{m}{n}$ este

valor commensuravel de x, temos $A = B^{\frac{m}{n}}$ $A^n = B^m(1)$.

Suppondo-se A um numero inteiro, B tambem será inteiro, e então a igualdade (1) só será possivel tendo A e B os mesmos factores primos Seja $A = a^p b^q c^r$, $B = a^{p'} b^{q'} c^{r'}$, temos $a^{np} b^{nq} c^{nr} = a^{mp'} b^{mq'} c^{mr'}$, igualdade que só se verifica tendo-se $np = mp'$, $nq = mq'$, $nr = mr'$

$$\text{ou } \frac{n}{m} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r}.$$

Por conseguinte para que o valor de x seja commensuravel é necessario que A e B contenhão os mesmos factores primos e que os expoentes d'estes factores sejam proporcionaes.

2º Problema— O logarithmo de um numero A sendo dado em um systema de base B achar o seu logarithmo no systema de base B'.

Seja x o logarithmo de A no systema B e x' o logarithmo no systema B', temos: $A = B^x$, $A = B'^{x'}$, d'onde $B^x = B'^{x'}$; tomando o logarithmo no systema B temos $x = x' \lg B'$, d'onde $x' = x \times \frac{1}{\lg B'}$. Obtemos assim a regra já deduzida da consideração da concepção arithmetica dos logarithmos, a qual nos indica que para passar de um para outro systema basta dividir o logarithmo dado pelo logarithmo da nova base tomado no systema primitivo.

Esta apreciação da concepção dos logarithmos

deve ser completada com a apreciação que vamos fazer das series exponencial e logarithmica, onde então veremos a vantagem que tem, sob o ponto de vista algebrico, a base de Neper sobre a base de Briggs.

Capitulo VIII

Series

Com o estudo das series apenas limitado aos dois casos representados pelas series exponencial e logarithmica, fica exposto tudo quanto normalmente deve ser dado no dominio da algebra directa para preparar a base necessaria ao estudo da geometria.

E' verdade que a concepção carteziana estendendo o dominio geometrico tornou necessario uma maior extensão do dominio algebrico, mas esta extensão consiste essencialmente na resolução numerica das equações e deve ser estudada como um complemento algebrico, depois da geometria algebrica, para servir de base á geometria differencial.

O estudo das series é um dos pontos mais anarchizados em geral pelos compendios especiaes. Lendo-os é impossivel saber-se qual a differença entre a apreciação algebrica e o uso arithmetico das series; o estudo sobre convergencia é dado de mistura com os methodos de desenvolvimento, e quasi sempre sobrecarregado de theoremas desnecessarios; as series trigonometricas são estudadas conjunctamente com as series exponenciaes e logarithmicas de modo a tornar necessario conhecimentos de trigonometria em um dominio que prepara simplesmente a base para o estudo geometrico.

Denomina-se serie toda expressão de numero illimitado de termos deduzidos uns dos outros segundo uma lei constante qualquer.

No estudo das series distinguiremos duas phases distinctas: 1ª a phase em que se expõe os methodos por que se desenvolvem as formações em series—é o estudo algebrico; 2ª a phase em que são estabelecidas e estudadas as condições que devem satisfazer as series para que os valores por ellas fornecidos sejam sufficientemente rigorosos— é o estudo arithmetico.

Occupemo-nos com a primeira parte. Historicamente os desenvolvimentos indefinidos emanaram primeiramente da divisão. Tal foi o modo por que Mercator obteve uma serie segundo as potencias inteiras da variavel, desenvolvendo a formação $\frac{1}{a+bx}$ segundo as regras formuladas pela divisão.

Com effeito, effectuando a divisão de 1 por $a+bx$ obtemos para quociente:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 - \frac{b^3}{a^4}x^3 + \dots$$

Este meio de desenvolvimento em serie pode mesmo applicar-se a uma formação fraccionaria transcendente, uma vez que não se sujeite o desenvolvimento resultante á condicção de ser algebrico.

A formação, por exemplo, $\frac{1}{a+\text{sen}x}$, pode ser desenvolvida em serie, effectuando-se directamente a divisão, o que nos dá $\frac{1}{a} - \frac{\text{sen}x}{a^2} + \frac{\text{sen}^2x}{a^3} - \text{etc.}$

Depois da divisão devemos considerar as series como emanando da extracção de raiz sobretudo applicada aos mais simples binomios.

Foi exactamente este o meio por que Newton obteve a serie

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \text{etc,}$$

extrahindo a raiz quadrada do binomio $a^2 + x^2$. Nós podemos tambem por este meio desenvolver formações irrationaes transcendentas, desde que não se sujeite o desenvolvimento a ser algebrico, taes, por exemplo, como a formação $(\text{sen}x - b^2)^{\frac{1}{3}}$.

Estas duas origens dos desenvolvimentos em serie tiveram mais tarde um resumo commum representado pela lei binomial de Newton. Este novo meio de desenvolvimento abrange nem só os casos relativos á divisão, mediante a transformação de Wallis, do quociente em um producto com um factor affecto de expoente negativo, cemo tambem os casos das raizes pela consideração das potencias fraccionarias.

Assim, por exemplo, a formação $\frac{b}{a^2 + bx}$, pode ser desenvolvida pela lei de Newton, transformando-se em $b(a^2 + bx)^{-1}$; a formação $(x + 3b)^{\frac{1}{m}}$ pode tambem ser desenvolvida pela mesma lei, a qual, como já tivemos occasião de dizer, estende-se a todo e qualquer expoente.

A primeira formação nos dá o desenvolvimento

$$b(a^2)^{-1} - b^2 x (a^2)^{-2} + b^3 x^2 (a^2)^{-3} - \text{etc,}$$

a segunda nos dá; $x^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} 3b +$

$$+ \frac{\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right)}{1 \cdot 2} x^{\frac{1}{m}-2} 9b^2 + \text{etc.}$$

Consideremos as formações simples a^x e $\log x$, e vejamos como é possível deduzir indirectamente, com a applicação da lei de Newton, os seus desenvolvimentos em series.

Para obter a serie exponencial o artificio consiste em substituir a base a da formação por um binomio cujo primeiro termo é a unidade. Seja $a=1+b$, temos :

$$(1+b)^x = 1 + \frac{x}{1}b + \frac{x(x-1)}{1.2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}b^3 + \text{etc.},$$

ordenando em relação a x , temos :

$$a^x = (1+b)^x = 1 + \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.} \right) x$$

$$+ \left(b^2 - \frac{3b^3}{3} + \text{etc.} \right) \frac{x^2}{2} + [] x^3 + \text{etc.}$$

Fazendo $K = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} + \text{etc.}$, $A = b^2 - \frac{3b^3}{3} + \text{etc.}$

temos :

$$a^x = 1 + Kx + Ax^2 + Bx^3 + \text{etc.}$$

Este resultado nos mostra que o desenvolvimento da exponencial obtido pela lei de Newton, tem o inconveniente de apresentar como coefficients formulas indefinidas, de modo que torna-se impossivel apanhar o modo de dependencia que existe entre elles.

Este modo de deducção, porém, tem a vantagem de fazer conhecer a expressão do mais simples d'entre esses coefficients representados por K , ficando a questão simplesmente dependente de obter-se um modo porque se possa directamente subordinar a este todos os mais coefficients do desenvolvimento.

Os inconvenientes que apresenta o desenvolvimento em serie da exponencial pela lei de Newton desaparece com o emprego do methodo de Des-

cartes, de que já tratamos no estudo das equações do 2º gráu.

Consideremos a formação experiencial a^x . A questão consiste em igualar esta formação a um polynomio inteiro em x com os coefficients indeterminado e desenvolver para com a igualdade assim obtida a comparação resultante de um character sufficientemente simples da formação considerada; character que, segundo Comte, se reduz a fixar a lei segundo a qual se modifica a formação quando a variavel independente sofre uma modificação a mais propria para simplificar uma tal relação.

Façamos, pois, $a^x = A + Bx + Cx^2 + \dots$ etc.; suppondo $x=0$ temos $a^0 = A = 1$; o desenvolvimento deve porconsequente ser: $a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$ etc. (2)

A propriedade ou o character mais simples que temos de traduzir n'esta igualdade é o seguinte *a formação exponencial fica elevada ao quadrado quando a variavel independente*, o que algebricamente se traduz por $(a^x)^2 = a^{2x}$.

Esta propriedade traduzida na igualdade hypothetica nos fornecerá dois desenvolvimentos os quaes identificados nos darão um numero sufficiente de equações de 1º gráu para determinar os coefficients do desenvolvimento primitivo.

Elevada a igualdade (1) ao quadrado temos :

$$(a^x)^2 = 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + (2BC + 2D)x^3 + (C^2 + 2BD + 2E)a^4 + \dots \text{ etc.}$$

Substituindo em (1) x por $2x$ temos :

$$a^{2x} = 1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + \dots \text{ etc.}$$

resulta pois :

$$1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + \dots \text{ etc.} = 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + (2BC + 2D)x^3 + \dots \text{ etc. ; identificando, temos :}$$

$2B=2B$, $4C=B^2+2C$, $2BC+2D=8D$, $C^2+2BD+2E-1CE$, etc. ;

$$\text{d'onde } C = \frac{B^2}{2}, \quad D = \frac{B^3}{2.3}, \quad E = \frac{B^4}{2.3.4} \text{ etc.}$$

Substituindo estes valores em (3), temos :

$$ax = +1Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{2.3}x^3 + \frac{B^4}{2.3.4}x^4 \text{ etc.}, \quad (a)$$

serie na qual facilmente podemos induzir a lei de formação dos termos pelo primeiro B, a qual consiste em que cada termo é igual a uma potencia do 1º marcada pela ordem que elle occupa, dividida pelo numero de permutações marcado pelo mesmo expoente.

A questão está em determinar o coefficiente B ao qual todos os outros se acham directamente subordinados.

Este coefficiente póde ser obtido pelo desenvolvimento da exponencial, segundo a lei de Newton, como já fizemos, e assim teremos a sua expressão :

$$K=B=(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.},$$

a qual é o valor de K, substituindo-se b por seu valor $a-1$ tirado da equação $a=1+b$.

Como o coefficiente B, entra na formula (a) como variavel, podemos obter ainda o seu valor do seguinte modo. Fazendo $x=1$ em (a), temos :

$a=1+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{2.3}+\text{etc.}$, (1) fazendo, n'este desenvolvimento, $B=1$, e representando por e o valor do desenvolvimento para esta hypothese, temos :

$1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\text{etc.}$ (2), que é a base de Neper.

Fazendo no desenvolvimento (a) $Bx=1$ ou $x=\frac{1}{B}$, temos :

$$a^{\frac{1}{B}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.};$$

comparando esta igualdade com a igualdade (2), resulta : $a^{\frac{1}{B}} = e$, ou $a = e^B$; tomando os logarithmos : $\lg a = B \lg e$, d'onde $B = \frac{\lg a}{\lg e}$, que será o valor do coefficiente B.

Substituindo este valor em (a), temos :

$$a^x = 1 + \frac{\lg a}{\lg e} x + \left(\frac{\lg a}{\lg e} \right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{\lg a}{\lg e} \right)^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Se na igualdade $a = e^B$ os logarithmos forem tomados em um systema de base a , o valor de B será $B = \frac{1}{\lg e}$ se fôr no systema de base e , o valor de B será $B = 1$: resultão assim os desenvolvimentos correspondentes :

$$a^x = 1 + \left(\frac{1}{\lg e} \right) x + \left(\frac{1}{\lg e} \right)^2 \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.} \quad (4),$$

$$a^x = 1 + 1.a x + (1.a)^2 \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Fazendo na primeira $a=e$, temos :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

formula que nos dá o desenvolvimento de um numero em formação do seu logarithmo neperiano.

Basta comparar esta serie com a serie (4) para immediatamente ver-se o quanto a adopção da base e simplifica muito a questão, apresentando, sob o ponto de vista algebrico, a vantagem, sobre toda outra base a qualquer, de um desenvolvimento muito mais

simples, o que necessariamente facilita as transformações, facto capital em algebra.

A base de Neper, como vemos, é obtida do desenvolvimento (a), fazendo-se duplamente igual á unidade o producto Bx de que elle depende; e é equivalente ao numero dois sommado as reciprocas de todas as avaliações successivas da formula das permutações.

Para obter indirectamente, mas de um modo expon-taneo, a serie logarithmitica basta comparar o valor $\frac{\lg a}{\lg e}$ do coefficiente fundamental B, com o seu valor em serie já obtido pela lei de Newton. Teremos, então:

$$\frac{\lg a}{\lg e} = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc.}$$

$$\text{d'onde } \lg a = \lg e \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \text{etc.} \right]$$

fazendo $a=1+x$, temos :

$\lg(1+x) = \lg e \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \right]$; tomando os logarithmos no systema neperiano, B será igual ao logarithmo neperiano da base a ou $B=1/a$ e então $l.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$; que representa a serie logarithmitica.

Podemos ainda obter esta serie da serie exponencial por uma inversão dos coefficientes indeterminados. Esta questão é uma applicação do methodo inverso das series cuja primeira idéa devemos a Newton. Seguiremos para resolvel-a o modo que emprega os coefficientes indeterminados como o mais racional e mais simples. O problema resume-se no seguinte: dada a serie $y = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc}$ sendo a, b, c, conhecidos, obter a serie, $x = Ay + By^2 + \text{etc.}$

Seja dada a serie $y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$ etc, que representa o desenvolvimento da exponencial e^x . Fazendo $y-1=z$. temos: $z=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.1.3}+\dots$ etc. (1); quer-se obter $x=Az+Bz^2+Cz^3+\dots$ etc. (2). Elevando successivamente a igualdade (1) ao quadrado,

$$\text{ao cubo etc: } z^2=x^2+\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^4}{3}+\dots \text{ etc.}$$

$z^3=x^3+\frac{3x^4}{2}+\dots$ etc, $z^4=x^4+\dots$ etc, substituindo estes valores e o de z dado por (1), no desenvolvimento de x , temos:

$$x=Ax+\frac{Ax^2}{2}+\frac{Ax^3}{6}+\frac{Ax^4}{24}+\dots+Bx^2+\frac{Bx^4}{4}+\dots+Bx^3+\frac{Bx^4}{3}+\dots+Cx^3+\frac{2Cx^4}{2}+\dots+Dx^4+\dots;$$

$$\text{d'onde resulta: } A-1=0, \frac{A}{2}+B=0, \frac{A}{6}+B+C=0,$$

$$\frac{A}{24}+\frac{7B}{12}+\frac{3C}{2}+D=0 \text{ etc; e por conseguinte:}$$

$$A=1, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{3}, D=-\frac{1}{4} \text{ etc; substitui-$$

tuindo estes valores em (2) temos:

$$x=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2}-\frac{z^4}{4}+\dots \text{ etc, ou } x=\frac{y-1}{1}-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\dots \text{ etc.}$$

Sendo o segundo membro da serie dada o valor de e^x , resulta $y=e^x$, tomando os logarithmos neperianos $\log y=x$, d'onde:

$$\log y=\frac{y-1}{1}-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\dots \text{ etc.}$$

serie que representa o desenvolvimento do logaríthmo neperiano.

A serie logarithmica pode ainda ser obtida directamente pela applicação do methodo fundamental de Descartes á formação lgx . O desenvolvimento hypothetico neste caso não pode ser $lgx=A+Bx+Cx^2$ etc, nem tão pouco $lgx=Ax+Bx^2+etc$, porque, no primeiro caso fazendo-se $x=0$ resulta o absurdo $lg0=A$, pois o logaríthmo de zero é infinito; no segundo caso resulta $lg0=0$ o que tambem é impossivel. Para tornar neste caso compativel o desenvolvimento supposto com a natureza da formação, usa-se de um simples artificio, o qual consiste em considerar não a formação lgx , mas a formação $lg(1+x)$, o que para a annullação da variavel dá $lg1=0$; a igualdade será, pois :

$$lg(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+etc. (1).$$

A propriedade que deve ser traduzida n'esta igualdade é a seguinte: para com um binomio onde a variavel está sommada á unidade, a formação logarithmica duplica-se quando a variavel é substituida pelo seu dobro sommado ao seu quadrado; o que se traduz algebricamente pela equação $lg(1+x)^2=lg(1+2x+x^2)=2lg(1+x)$.

Formando, pois, a expressão da substituição na serie (1) de x por $2x+x^2$, temos:

$$lg(1+2x+x^2)=2Ax+(A+4B)x^2+(4B+8C)x^3+(B+12C+16D)x^4+etc.;$$

tomando o dobro da mesma serie:

$$2lg(1+x)=2Ax+2Bx^2+2Cx^3+etc;$$

estabelecendo a comparação :

$$2Ax+(A+4B)x^2+(4B+8C)x^3+etc=2Ax+2Bx^2+2Cx^3+etc$$

Identificando :

$2Ax=2Ax$, $A+4B=2B$, $4B+8C=2C$ etc; d'onde

$$A=A, B=-\frac{A}{2}, C=\frac{A}{3} \text{ etc.}$$

Estes valores substituidos em (1) dão:

$$\lg(1+x)=A\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc}\right), \text{ serie}$$

já obtida anteriormente.

O coefficiente A ao qual todos os outros se achão subordinados fica indeterminado desde que a base do systema de logarithmos não é especificada, mas facilmente pode ser determinado sendo fixada a base cujo logarithmo é sempre igual a unidade.

Taes são as applicações caracteristicas a que se deve limitar o emprego do methodo de Descartes no estudo da algebra isolada. Para completar a apreciação algebraica das series devemos agora tratar do importante uso algebraico da serie exponencial, dado por Lagrange, o qual consiste em deduzir d'esta serie a expressão da lei geral do desenvolvimento da potencia de um polynomio qualquer.

$$\text{Consideremos a serie } e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}; \text{ substituindo } x \text{ por } i(p+q+r+\text{etc}).$$

teremos:

$$e^{i(p+q+\text{etc})} = 1 + i(p+q+\text{etc}) + \frac{i^2}{1.2}(p+q+\text{etc})^2 + \frac{i^3}{1.2.3}(p+q+\text{etc})^3 + \frac{i^m}{1.2\dots m}(p+q+\text{etc})^m + \dots \text{ e tambem:}$$

$$e^{i(p+q+\text{etc})} = e^{ip} \times e^{iq} \times e^{ir} \times \text{etc} = (1+ip + \frac{i^2 p^2}{1.2} + \frac{i^3 p^3}{1.2.3} + \text{etc})(1+iq + \frac{i^2 q^2}{1.2} + \frac{i^3 q^3}{1.2.3} + \text{etc})(1+ir + \frac{i^2 r^2}{1.2} + \frac{i^3 r^3}{1.2.3} + \text{etc}) \times \text{etc.}$$

d'onde resulta :

$$1 + (p+q+\text{etc})i + \frac{(p+q+\text{etc})^2 i^2}{1.2} + \dots + \frac{(p+q+\text{etc})^m i^m}{1.2 \dots m} + \dots = (1+iq + \frac{i^2 q^2}{1.2} + \text{etc})(1+ip + \frac{i^2 p^2}{1.2} + \text{etc}) + \dots$$

Para identificar estes dois desenvolvimentos é preciso determinar o termo affecto de x^m no segundo membro. O coefficiente d'este termo se comporá de tantos termos da forma $\frac{p^a q^b r^c}{1.2.3 \dots a \times 1.2 \dots b \times 1.2 \dots c \times \dots}$ quantos são os valores differentes que podemos dar a a, b, c etc contanto que seja satisfeita a igualdade $a+b+c+\dots=m$; o conjuncto d'estes termos iguallados ao coefficiente $\frac{(p+p+\dots)^m}{1.2 \dots m}$ do termo x^m do primeiro membro, representará o desenvolvimento deste coefficiente, e então multiplicando ambos os membros da igualdade por $1.2 \dots m$, o primeiro membro se redusirá a $(p+q+\text{etc})^m$ e o segundo representará o seu desenvolvimento. Effectuada esta multiplicação o segundo membro se comporá de termos da forma :

$$\frac{1.2.3 \dots (m-1)m}{1.2.3 \dots a \times 1.2 \dots b \times 1.2 \dots c \times \dots} \times p^a q^b r^c \dots$$

ou ainda :

$$\frac{1.2.3\dots a(a+1)\dots(m-1)m}{1.2.3\dots a \times 1.2.3\dots b \times \dots} \times p^a q^b r^c \text{ etc} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(a+2)(a+1)}{1.2\dots b \times 1.2\dots c \times \dots} \times p^a q^b \dots$$

Da igualdade $a+b+\dots=m$, tira-se $a=m-b-c-\text{etc}$, d'onde a formula do termo geral será:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-b-c-\text{etc}+1)}{1.2.2\dots b \times 1.2.3\dots c \times \text{etc}} p^b r^c p^{m-b-c-\text{etc}}$$

que traduz a lei geral do desenvolvimento da potencia m do polinomio $(p+q+\text{etc})$.

ESTUDO ARITHMETICO DAS SERIES

Tendo apreciado as series exponencial e logarithmica sob o ponto de vista algebrico, resta-nos o seu estudo sob o ponto de vista do calculo dos valores. Algebricamente toda questão relativa ao maior ou menor rigor com que uma serie pode ser avaliada é inoportuna; a questão deve limitar-se a transformação das formações sem intervenção alguma da noção de valor, que, repetimos ainda uma vez, só serve para perturbar a generalidade necessaria do dominio algebrico. Desde que se trata de transformar uma formação em um desenvolvimento em serie nada nos deve importar se este desenvolvimento pode permittir uma avaliação exacta ou não; a questão a indagar é se é possível a transformação, e qual o meio mais racional e mais simples de obtel-a.

Quando, porem, se quer realisar a phase arithmetica da questão, isto é, quando se deseja avaliar as formações consideradas, torna-se então necessario ver se o desenvolvimento que tem de substituir a formação para os valores particulares dos seus elementos, fornece um valor sufficientemente exacto, o que

exige sejam satisfeitas certas condições as quaes são representadas pelos caracteres de *convergencia*.

Uma serie diz-se convergente quando o erro que se commette em sua avaliação pode ser tornado tão pequeno quanto se queira.

Consideremos a serie (1) u_0, u_1, u_2, \dots etc, e seja s_n a somma dos n primeiro termos. Se para valores crescentes de n a somma s_n aproximar-se indefinidamente de um limite s , a serie será convergente, e o limite será a sua *somma*; se para volores crescentes de n a somma s_n não convergir para limite algum fixo a serie diz-se *divergente* e não terá *somma*.

Para que, pois, a serie (1) seja convergente é necessario que para valores crescentes de n a somma $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1}$ tenda para um limite fixo s , ou por outra, é nescessario que para valores infinitamente grandes de n as sommas s_n, s_{n-1}, s_{n-2} etc, deffirião do limite s , e portanto entre si, de quantidades infinitamente pequenas.

As differenças entre a primeira somma S_n e cada uma das seguintes sendo dadas respectivamente pelas equações :

$$S_{n+1} - S_n = u_n, S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1}, S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \text{ etc}$$

segue-se que para ser a serie dada convergente é necessario primeiramente que o termo geral u_n decresça indefinidamente quando n cresce, e ainda mais, que as differentes sommas $u_n, u_n + u_{n+2}$, etc tomadas a partir de u_n em numero qualquer, venhão, finalmente, a dar valores inferiores a todo o limite assignavel.

Seja, por exemplo, a progressão geometrica.

$1, x, x^2, x^3$ etc (1). Se x ou a base é maior que a unidade o termo geral x_n crescerá indefinidamente

para valores crescentes de n e basta isto para indicar que a serie é divergente; se $x = \pm 1$ ainda a serie será divergente porque neste caso o valor do termo geral será igual a unidade e não decrescerá para valores crescentes de n ; finalmente, se x é menor que a unidade as sommas dos termos da serie a partir de x^n , em numero qualquer, isto é, $x^n + x^{n+1} =$

$$x^n \frac{1-x^2}{1-x}, \quad x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x} \text{ etc.}$$

estando comprehendidas entre os limites x^n e $\frac{x^n}{1-x}$ cada uma d'ellas pode, para valores infinitamente grandes de n , tornar-se tão pequena quanto se queira e por conseguinte a serie ou a progressão é convergente.

Consideremos ainda como exemplo a serie harmo-

$$\text{nica } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \text{ etc.}$$

N'esta serie o termo geral $\frac{1}{n+1}$ decresce indefinidamente com o valores crescentes de n ; mas a serie é divergente por não ser satisfeita a outra condição, porque a somma dos termos a partir de $\frac{1}{n+1}$ até o termo $\frac{1}{2n}$ inclusive, isto é, a somma

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

qualquer que seja n , fica sempre superior ao producto

$$n \times \frac{1}{2n} \text{ ou } \frac{1}{2};$$

segue-se d'aqui que esta somma não decresce indefinidamente com os valores crescentes de n como deveria acontecer se a serie fosse convergente.

Designando por s_n a somma dos n primeiros termos

da serie harmonica e por 2^m a mais elevada potencia de 2 comprehendida em $n+1$, teremos :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m}\right),$$

e portanto :

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2},$$

d'onde conclue-se que a somma s_n cresce indefinidamente com os valores crescentes de m e por consequente com n , o que vem ainda confirmar a divergencia da serie.

A estas noções geraes sobre a convergencia das series devemos reunir dois theoremas que são necessarios para o estudo arithmetico das duas series fundamentaes que estudamos.

1°. Theorema—Uma serie de termos positivos é convergente quando para valores crescentes de n a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ entre um termo de ordem qualquer e o precedente converge para um limite K menor que a unidade.

Com effeito, tendo-se

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < K, \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < K, \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < K \text{ etc. resulta}$$

$$u_{n+1} < K u_n, u_{n+2} < K^2 u_n, u_{n+3} < K^3 u_n \text{ etc.}$$

de modo que os termos da serie dada u_{n+1}, u_{n+2} etc. são menores que os termos correspondentes da progressão geometrica decrescente.

Ku_n, K^2u_n etc. e porconsequinte a serie é convergente. Se o limite K é maior que a unidade a progressão geometrica será crescente, e portanto, a serie dada divergente; se K é igual a unidade este theorema nada pode decidir a respeito da convergencia da serie.

Para conhecer-se a precisão da avaliação n'este caso, isto é, para determinar-se o limite do erro que commette-se tomando a somma até o termo de uma certa ordem, procede-se do seguinte modo: Consideremos o termo u_s a partir do qual a relação de um termo para o precedente é menor que um numero K inferior a unidade, segue-se que os termos seguintes $u_{s+1}, u_{s+2}, u_{s+3}$ etc. são menores que os termos correspondentes da progressão geometrica Ku_s, K^2u_s, K^3u_s etc. e, portanto, a somma dos termos despresados inferior a somma dos termos desta progressão ou $\frac{u_s}{1-K}$; d'onde, designando por E este erro teremos: $E < \frac{u_s}{1-K}$

2º Theorema—Uma serie de termos alternadamente positivos e negativos é convergente quando os seus termos decrescem indefinidamente.

Seja a serie $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{n-1} - u_n + u_{n+1} - \text{etc}$
na qual, $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_{n-1} > u_n > u_{n+1}$ etc.

Supponhamos n um numero par, teremos:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 - u_2, \quad s_3 = (u_1 - u_2) + u_3 = u_1 - (u_2 - u_3),$$

$$s_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) = u_1 - (u_2 - u_3) - u_4$$

.....

$$S = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{n-1} - u_n) = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n$$

Analysando estes resultados vemos que as sommas de ordem impar vão diminuindo e as de ordem par vão augmentando, de modo que podemos obter uma aproximação para menos ou para mais, semelhantemente ao que se dá nas fracções continuas, conforme considerarmos um numero par ou impar de termos. Suppondo agora que se tenha sommato os termos que precedem a u_n , o erro commettido será: $E = -u_n + u_{n+1} - u_{n+2} + \text{etc}$ ou

$$E = -\left[\left(u_n - u_{n+1} \right) + \left(u_{n+1} - u_{n+2} \right) - \text{etc} \right], \text{ o que nos}$$

mostra que erro terá sempre o signal do primeiro dos termos despresados u_n . Esta igualdade escripta sob a forma:

$$E = -\left[u_n - \left(u_n - u_{n+1} \right) - \left(u_{n+1} - u_{n+2} \right) - \text{etc} \right] \text{ mostra nos}$$

ainda que o erro E é menor do que o primeiro dos termos despresados, e como este pode se tornar tão pequeno quanto se queira, pois que os termos da serie decrescem indefinidamente, segue-se que a serie estudada é convergente

Appliquemos estes theoremas ás series já consideradas.

Consideremos em primeiro lugar o desenvolvimento

$$\text{de Newton } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \dots$$

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2.3\dots(n-1)} x^{n-1} + \text{etc}$$

O primeiro theorema nos dá:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m(n-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^2$$

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2\dots(n-1)} x^{n-1} = \frac{m-n+1}{n} x$$

$$\frac{n-(m+1)}{n} = \left[1 - \frac{m+1}{n} \right], \text{ cujo limite é:}$$

$$\lim \left[1 - \frac{m+1}{n} \right] x = -x$$

Resulta, pois, que o desenvolvimento de $(1+x)^m$ será convergente quando o valor de x se achar comprehendido entre $+1$ e -1 .

Seja a serie exponencial :

$$x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} + \text{etc.}$$

O mesmo theorema nos dá :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^n}{1.2 \dots n} : \frac{x^{n-1}}{1.2 \dots n-1} = \frac{x}{n},$$

cujo limite é $\lim \frac{x}{n} = 0$, o que nos mostra que a serie exponencial é convergente qualquer que seja x .

Consideremos a serie logarithmica :

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \text{etc.}$$

O primeiro theorema nos dá :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1} x = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} x,$$

cujo limite é $\lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} x = x$; segue-se d'isto que a

serie logarithmica será convergente quando o valor de x fôr uma fracção positiva ou negativa.

Verificada a convergencia da serie logarithmica podemos por meio d'ella obter os logarithmos dos numeros, sendo os erros commettidos, como vimos, sempre inferiores ao primeiro dos termos desprezados.

Como, porém, esta serie tal como a determinamos é pouco convergente, isto é, exige um grande numero de termos para que a somma apresente a necessaria aproximação, torna-se necessario antes da phase de avaliação sujeital-a a transformações convenientes destinadas a fazer desaparecer esse inconveniente de muito peso para as questões numericas.

D'ahi resultam diferentes typos de desenvolvimentos mais ou menos vantajosos para a avaliação dos logarithmos, dos quaes passamos a tratar.

Consideremos a serie :

$$\lg y = \frac{1}{\lambda} \left[(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \text{etc.} \right] \quad (1).$$

Esta serie não é convergente e por conseguinte não pôde servir para achar-se o logarithmo de um numero dado y senão quando este differir pouco da unidade.

Mas, diz Lagrange, podemos tornal-a convergente em todos os casos, substituindo y por $(y)^{\frac{1}{r}}$ e como $\lg(y)^{\frac{1}{r}} = \frac{\lg y}{r}$ temos :

$$\lg y = \frac{r}{\lambda} \left[(y)^{\frac{1}{r}} - 1 - \frac{1}{2} \left((y)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3} \left((y)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^3 - \text{etc.} \right]$$

podendo r ser um numero positivo ou negativo.

Ora, qualquer que seja y pôde-se sempre extrahir a raiz de um gráu r tal que $(y)^{\frac{1}{r}}$ seja um numero

diferente da unidade de uma quantidade tão pequena quanto se queira, o que permite á formula dada fornecer o valor de $\lg y$ com toda exactidão desejada.

Se r é negativo $(y)^{\frac{1}{r}}$ torna-se $\frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}}$ e a serie será

$$\lg y = \frac{r}{A} \left[1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}} \right)^2 + \text{etc} \right] \quad (3) \text{ onde}$$

todos os termos são positivos. Pode-se assim ter para valor de $\lg y$, a vontade, uma serie cujos termos sejam todos positivos ou alternadamente positivos e negativos, porque y sendo um numero maior que a unidade $(y)^{\frac{1}{r}}$ será maior que a unidade, e sendo y menor que a unidade $(y)^{\frac{1}{r}}$ também será; mas as diferenças serão tanto menores quanto maior fôr o indice r da raiz, d'onde resulta que $(y)^{\frac{1}{r}} - 1$ e $1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}}$ serão positivos no primeiro caso e negativos

no segundo. Se a é a base dos logarithmos de sorte que $\lg a = 1$, pode-se pelas mesmas formulas determinar com a desejada aproximação o modulo A , porque fazendo $\log a = 1$, resulta :

$$A = r \left[\left(a^{\frac{1}{r}} - 1 - \frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3} \left(a^{\frac{1}{r}} - 1 \right)^3 - \text{etc} \right) \right]$$

ou

$$A = r \left[1 - \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{r}} \right)} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{r}} \right)} \right)^2 + \text{etc} \right].$$

E' claro que as series dadas para valores de $\lg y$ são necessariamente convergentes, desde que se extrahir de y uma raiz r tal que $(y)^{\frac{1}{r}} - 1$ seja uma fracção menor que a unidade, porque então $1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}}$ será uma fracção ainda menor pois que

$$1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}} = \frac{(y)^{\frac{1}{r}} - 1}{(y)^{\frac{1}{r}}}$$

N'estas condições a serie (2) dará

$\lg y < \frac{r}{A} \left((y)^{\frac{1}{r}} - 1 \right)$, e a serie (3) dará

$$\lg y > \frac{r}{A} \left(1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}} \right).$$

Tem-se assim dois limites para o valor de $\lg y$, os quaes podem ser aproximados tanto quanto se queira tomando-se r cada vez maior. Se fôr $(a)^{\frac{1}{r}} < 2$, temos

pela mesma razão: $A < r \left((a)^{\frac{1}{r}} - 1 \right) < \left(1 - \frac{1}{(a)^{\frac{1}{r}}} \right)$. E'

visível que a differença entre os dois limites de $\lg y$

sendo: $\frac{r}{A} \left[\left((y)^{\frac{1}{r}} - 1 \right) - \left(1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}} \right) \right]$, o erro que

se commette tomando uma ou outra d'estas expressões limites para $\lg y$ será menor que qualquer d'estas quantidades; de modo que por estas expressões podemos ter os logarithmos exactos até s algarismos

tomando $(y)^{\frac{1}{r}}$ tal que apresente *s* zeros depois da virgula e antes dos algarismos significativos.

Em geral, pois que o erro vai diminuindo á medida que se toma o indice *r* maior, pode-se dizer que este erro se torna nullo ou muito proximo disto, se *r* é tomado infinitamente grande, de sorte que então se poderá considerar uma ou outra das formulas

$$\frac{r}{A} \left((y)^{\frac{1}{r}} - 1 \right) \text{ e } \frac{r}{A} \left(1 - \frac{1}{(y)^{\frac{1}{r}}} \right)$$

como a expressão exacta de $\lg y$.

Conclue-se disto que os logarithmos entrão na classe das potencias e formão o primeiro termo da serie das potencias cujos expoentes crescem ou decrescem desde zero, ou o ultimo termo das raizes cujos indices augmentão infinitamente.

É tambem sob esta relação que se pode dizer que um numero tem uma infinidade de logarithmos, pois que a sua raiz infinitamente grande tem uma infinidade de valores.

A melhor maneira de usar da formula precedente é tomar para *r* uma potencia de 2, pois que assim só se terá de fazer extracções de raizes quadradas.

Foi por este modo que Briggs calculou os primeiros logarithmos. Elle notou que fazendo extracções successivas de raizes quadradas de um numero qualquer, se se pára em uma destas extracções, em duas vezes tantos decimaes quantos zeros ahí existem depois da unidade, quando só a unidade está antes da virgula, a parte decimal desta raiz é exactamente a metade da raiz precedente, de sorte que estas partes decimaes têm entre si a mesma relação que os loga-

rithmos das mesmas raizes, o que resulta identicamente da formula precedente.

Este methodo é muito laborioso pelo grande numero de extracções de raizes que exige para ter-se um resultado com muitos decimaes, porem as series que demos servem para o simplificar e completar, porque qualquer que seja o numero y bastará extrahir-se algumas raizes quadradas até que se chegue a um numero $(y)^{\frac{1}{r}}$ que depois da virgula só tenha a unidade, então as potencias de $(y)^{\frac{1}{r}}$ serão fracções tanto menores quanto mais elevada as potencias, de modo que bastará tomar-se um certo numero de termos da serie para os logarithmos exactos até a ordem decimal que se quizer.»

Para construir uma taboa, porem, convem estabelecer series que exprimão um logarithmo qualquer por meio de alguns logarithmos precedentes, e que sejam sufficientemente convergentes para não exigirem grande trabalho numerico. Para obter isto temos ainda os differentes typos que resultarão das transformações feitas á serie logarithmica.

Substituindo na serie (1) y por $1+b$ e substituindo A por seu valor temos :

$$\log(1+b) = \frac{1}{1a} \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc} \right)$$

mudando b em $-b$, temos :

$$\lg(1-b) = \frac{1}{1a} \left(-b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \text{etc} \right);$$

tomando a differença entre estas duas igualdades :

$$\lg\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = \frac{2}{1a} \left(b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \text{etc} \right)$$

Fazendo nesta igualdade

$$\frac{1+b}{1-b} = 1 + \frac{u}{n}, \text{ ou } b = \frac{u}{2n+u}, \text{ temos:}$$

$$\lg\left(1 + \frac{u}{n}\right) = \frac{2}{1a} \left[\frac{u}{2n+u} + \frac{1}{3} \left(\frac{u}{2n+u}\right)^3 + \text{etc} \right]$$

Porém $\lg\left(1 + \frac{u}{n}\right) = \lg\left(\frac{n+u}{n}\right) = \lg(n+u) - \lg n$; fa-
zendo $u=1$ teremos:

$$\lg(n+1) = \lg n + \frac{2}{1a} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \text{etc} \right]$$

serie tanto mais convergente quanto maior fôr n . Por ella podemos calcular $l.a$ para $a=10$, porque: $\lg n = \frac{l.n}{l.a}$, d'onde $l.n = l.a \times \lg n$, de modo que multiplicando ambos os membros de (c) por $l.a$, teremos os logarithmos na base neperiana, e virá:

$$l.(n+1) = l.n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \text{etc} \right]$$

Fazendo successivamente $n=4$ e $n=1$ teremos:

$$l.5 = 2l.2 + 2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3(9)^3} + \frac{1}{5(9)^5} + \text{etc} \right), l.2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \text{etc} \right].$$

d'onde resulta: $l.10 = l.5 + l.2 = 2,30258509 \dots$ e $\frac{1}{l.10} = 0,4342944819$ etc que será o modulo para passar do systema de Neper para o do Briggs.

Vejamos outra transformação. Fazendo na formula

$$(1) y = 1 + \frac{2}{n^2 - 3n}, \text{ temos:}$$

$$\lg\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n}\right) = \frac{1}{l.a} \left[\frac{2}{n^3-3n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 + \text{etc} \right];$$

fazendo na mesma formula $y = -1 - \frac{2}{n^3-3n}$, temos:

$$\lg\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n}\right) = \frac{1}{l.a} \left[-\frac{2}{n^3-3n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 - \text{etc} \right]$$

subtrahindo esta igualdade da primeira:

$$\begin{aligned} & \lg\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n}\right) - \lg\left(\frac{n^3-3n-2}{n^3-3n}\right) = \\ & = \lg\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}\right) = \frac{2}{l.a} \left[\frac{2}{n^3-3n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5 + \text{etc} \right]; \end{aligned}$$

mas como $\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2} = \frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)}$, resulta:

$$\begin{aligned} & 2\lg(n-1) + \lg(n+2) - 2\lg(n+1) - \lg(n-2) = \\ & = \frac{2}{l.a} \left[\frac{2}{n^3-3n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 + \text{etc} \right], \text{ ou} \\ & \lg(n+2) = \lg(n-2) + 2\lg(n+1) - 2\lg(n-1) + \\ & + \frac{2}{l.a} \left[\frac{2}{n^3-3n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 + \text{etc} \right]. \end{aligned}$$

Esta serie não é sufficientemente convergente para o calculo dos tres primeiros numeros primos 2, 3, 5; e mesmo a partir do numero 53 ella é menos vantajosa que a seguinte, devida a Haros.

Consideremos a serie $\lg \left(\frac{1+b}{1-b} \right) = \frac{2}{1.a} \left[b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \text{etc} \right]$; fazendo $\frac{1+b}{1-b} = n$, ou $b = \frac{n-1}{n+1}$, obtem-se:

$$\lg n = \frac{2}{1.a} \left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^5 + \text{etc}; \right]$$

fazendo $n = \frac{p}{q}$ d'onde $n-1 = \frac{p-q}{q}$ e $n+1 = \frac{p+q}{q}$, resulta:

$\lg \frac{p}{q} = \frac{2}{1.a} \left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \text{etc} \right]$, serie sempre convergente:

Suppondo $p = x^4 - 25x^2 = x^2(x+5)(x-5)$, e $q = x^4 - 25x^2 + 144 = (x^2 - q)(x^2 - 16) = (x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$, teremos:

$$\begin{aligned} \lg(x+5) &= \lg(x+3) + \lg(x-3) + \lg(x+4) + \\ &+ \lg(x-4) - \lg(x-5) - 2\lg x - \frac{2}{1.a} \left[\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \left(\frac{72}{x^4 - 25x^2 + 72} \right)^3 + \text{etc} \right] \end{aligned}$$

formula que dá, tomando-se o primeiro termo, os logarithmos dos numeros maiores que 1000 com dez decimaes exactos, tendo-se os logarithmos dos numeros precedentes com a mesma aproximação.

Vamos dar, finalmente, uma formula que dá, tomando-se um pequeno numero de seus termos, os logarithmos dos numeros superiores a 1,000 com toda a aproximação desejada em grande numero de casos.

Tomemos a serie $\log \left(\frac{1+b}{1-b} \right) = 2M \left[b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \text{etc.} \right]$

sendo M o modulo; fazendo-se $\frac{1+b}{1-b} = \frac{x^2}{x^2-1}$

ou $b = \frac{1}{2x^2-1}$ resulta $\lg \left(\frac{1+b}{1-b} \right) = \lg \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)$

$$= 2M \left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{etc.} \right)$$

d'onde : $2 \lg x - \lg(x+1) - \lg(x-1) = 2M \left(\frac{1}{2x^2-1} \right.$

$$\left. + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{etc.} \right)$$

$$\text{ou } \lg x = \frac{\lg(x+1) + \lg(x-1)}{2}$$

$$+ M \left(\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{etc.} \right).$$

serie esta muito convergente.

Se x é maior que 1000 o termo $\frac{1}{3(2x^2-1)}$ póde ser despresado e a formula reduz-se a :

$$\lg x = \frac{1}{2} \left[\lg(x+1) + \lg(x-1) \right] + M \times \frac{1}{2x^2-1}$$

Ficam por esta fórma apreciadas todas as theorias que normalmente devem ser dadas no estudo da algebra isolada; toda extensão que possam exigir os dominios superiores, nenhuma difficuldade poderá fazer surgir que não se possa facilmente vencer, uma vez bem comprehendida a base que deixamos construida.

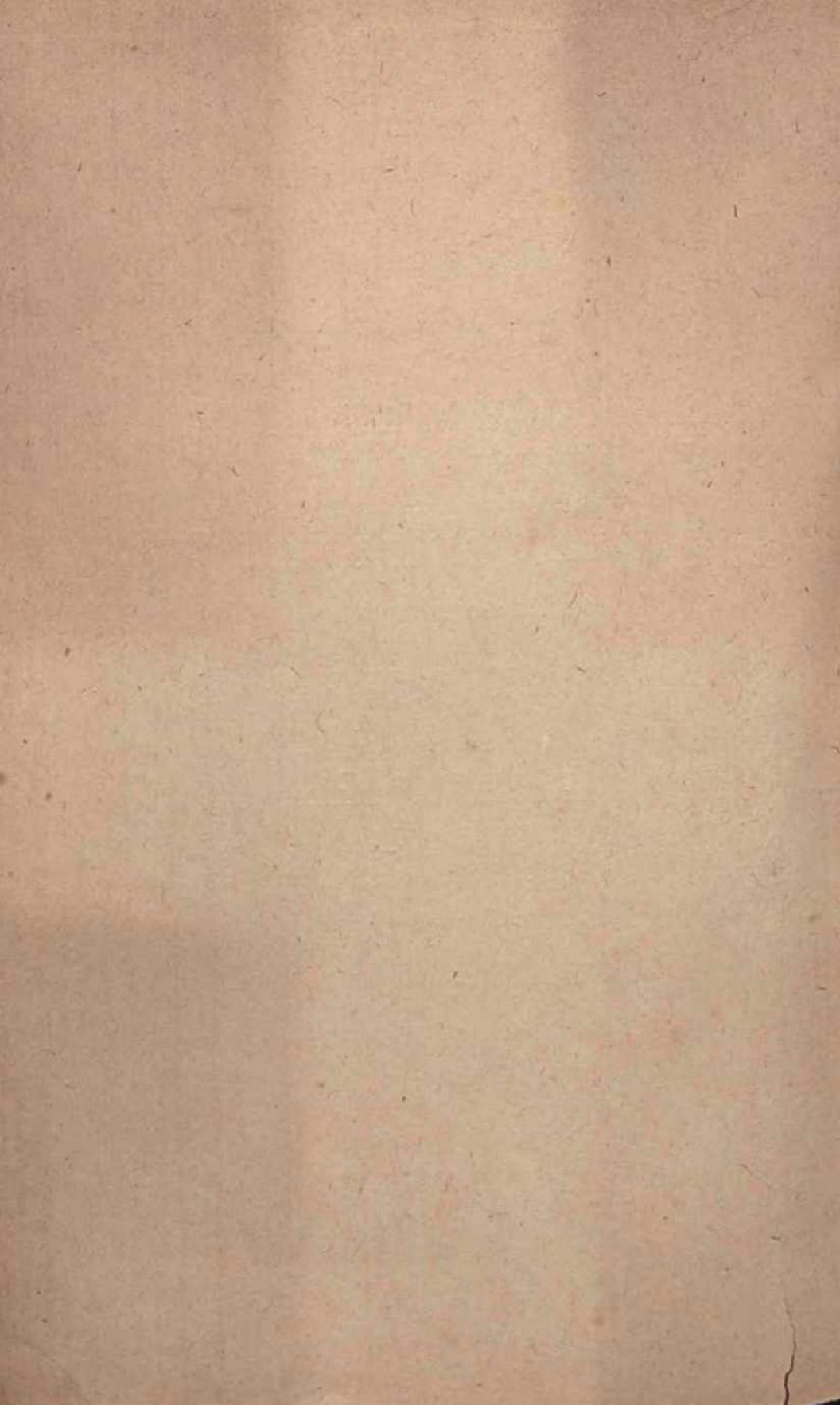
FIM

INDICE

	Pags.
Observação.....	5
Theoria elementar da abstracção.....	7
Classificação das sciencias.....	45
Apreciação da logica positiva.....	91
Coordenação da philosophia mathematica.....	143
Apreciação geral.....	177
Instituição fundamental.....	207

COORDENAÇÃO ESPECIAL

Calculo determinado do 1º grau.....	245
Transformação das formulas—Maximo commum divisor...	291
Lei binominal de Newton—Potencias e raizes.	357
Fracções continuas—Calculo indeterminado do 1º grau....	405
Equações do segundo grau—Methodo de Decartes—Irracio- naes singulares—Maxima e minima.....	457
Equações do 3º e 4º graus.....	507
Progressões geometricas—Calculo exponencial—Logarithmos	531
Series.....	577



ERRATA

PAG.	LIN.	ERROS	CORRECÇÕES	
	11	23	escuda	estuda
	41	4	Plutão	Platão
	111	25	complexas	realizadas
	112	5	correcta	concreta
	116	27	accidental	occidental
	120	7	estão	estas
	141	7	nação	noção
	141	8	logar	ligar
	153	3	outros	astros
	162	26	determinada	determinados
	163	3	a massa	a camada da massa
	165	2	Gicebert	Giabert
	175	20	tem	tendo
	178	11	acto	facto
	185	20	dentre	entre
	191	30	substituida	subentendida
	218	20	$x^2 \times px - q^2 = 0$	$x^2 \pm px - q^2 = 0$
	25	9	$\frac{\lg x}{a-a}$	$\frac{\lg x}{a-x}$
2.	3	3	quer algebraicas, quer transcendentes	em algebraicas e transcendentes
	276			
	283	3	$c = \frac{b'c}{b'} + \frac{d}{b'}$	$c = \frac{bc'}{b'} \pm \frac{d}{b'}$
	288	3	phrases	phases
	288	3	vis	trez
	328	11	vis	trez
			$\frac{a}{-}(1)$	$y = \frac{a}{a} = 1$

331	25	$\frac{-}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$
335	24	$8a^4b^5c^4 + 10a^3b^2c^3 -$ $- 2a^2b^3c^2 -$ $- 2a^2b^2c^2 \text{ etc}$	$8a^4b^5c^4 + 10a^3b^2c^3 -$ $- 2a^2b^3c^2 = 2a^2b^2$ $c^2 \text{ etc}$
350	2	$x - a$	$\frac{x+a}{2}$
394	16	$F_1(x) - F_2(x) = 0$	$F_1(x) - F_2(x) = 0$
395	20	$f_1(x) = f_m(x)$	$f_1(x) = f(x)_m$
406	12	$\frac{1}{M-N}$	$\frac{1}{M-n}$
406	26	(1)	(a)
414	12	$B, \Rightarrow A$	$B, > A$
419	13	(1)	(a)
419	23	$\frac{1}{D_i(D_i M_i + C_i)}$	$\frac{1}{D_i(D_i M_i + C)}$
454	25	$3x + 7y + 5z + 11u$ $- 521$	$3x + 7y + 5z +$ $+ 11u = 521$
459	8	equações a duas	equações do 2º grau a duas
474	4	$x^4 - 2x^2 + 2mx + n$	$x^4 - 2x^2 + mx + n$
474	19	quarta potencia ser	quarta potencia é ser
522	4	parte algebrica da solução	solução da quass ^{es}
538	15	$\frac{(1-a+r)(1+a)}{20}$	$\frac{(1-a+r)(1+r)}{2r}$
538	26	$= S_1 \frac{(a+1)n}{2}$	$S_1 = \frac{(a+1)^n}{2}$
539	19	$(n-1)r)^n + (a+m)^n$	$(n-1)r)^n + (a+nr)^n$
541	13	$S_3 = \frac{n^2(n+1)}{4}$	$S_3 = \frac{(n-1)^2}{4}$
542	26	$\frac{n^2 \times 3n^2 \times 2n}{6}$	$\frac{n^2 \cdot 3n^2}{6}$

4	$\frac{S_3 + 3S_2 \times 2S_1}{6}$	$\frac{S_3 + 3S_2 + 2S_1}{6}$
4	$3 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$	$3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$
5	$2 \times \frac{n(n+1)}{2} +$	$2 \times \frac{n(n+1)}{2} =$
5	$(1-x)^{-n-1}$	$(1-x)^{-n-1} =$
5	$S = \frac{lr-a}{r-1}$	$S = \frac{lr-a}{r-1}$
5	z e novas	z e u novas
5	$Ay^m + By^n + \dots = 0$	$Ay^m + By^n$ $+ \dots = 0$
5	(2)	(1)
4	quando a variavel	quando dobra-se a variavel.
27	$(a^n)^2 =$	$(a^n)^2 =$
58	$2E = 16E$	$2E = 16E$
5	$ax = 1 + Bx + \text{etc.}$	$a^x = 1 + Bx + \text{etc.}$
27	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.4}$ $+ \text{etc.}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4}$ $+ \text{etc.}$
18	$\frac{x^3}{1.1.3}$	$\frac{x^3}{1.2.3}$

Esta errata só estão mencionados os erros mais graves; quanto aos outros o leitor terá a bondade de corrigi-los, pois, a simples leitura basta para incluí-los.

331

332

333

334

335

336

OBR

610

RIS 52

282834

10062475

