Nro

Vêr, sobre Antonio Ferrão Moniz de Aragão, o que diz Clovis Bevilaqua, *Esboços e Fragmentos*, ps. 70, 71, 72, 73.

Homero Pires
Bahia, 16/1/917

Nasceu a 28 de Dezembro de 1813.

ELEMENTOS

DE

MATHEMATICAS,

POR

Antonio Ferrão Moniz de Aragão.

BAHIA.
TYP. E LIVRARIA DE E. PEDROZA.
Rua dos Capitães n. 49.
1858.

PREFACIO.

O estudo das sciencias serve não só para desenvolver, e aperfeiçoar as faculdades intellectuaes como para adquirir-se conhecimentos positivos. As mathematicas, como todas as mais sciencias, satisfazem estes dous fins, um logico, outro scientifico; e devemos considerar o seu estudo debaixo d'estes dous aspectos.

1.° E' uma verdade geralmente reconhecida que para formar um perfeito e completo raciocinador não basta a natureza só; a experiencia nos ensina que a educação desenvolve faculdades que sem ella nunca se manifestariam completamente, não podemos raciocinar correctamente sem aprendermos a fazer bom uso da razão. O melhor modo, ou talvez o unico, de aprender a fazer bom uso de uma faculdade qualquer é exercel-a muito, e methodicamente. As faculdades intellectuaes não podem ser aperfeiçoadas, como diz Locke, senão pelos mesmos meios que empregamos para aperfeiçoar as faculdades corporeas. Não podemos esperar que um homem escreva, pinte, ou pratique qualquer outra operação manual bem e com facilidade, ainda que seja dotado naturalmente de muita força, actividade, e dextreza sem que se tenha exercitado, e empregado tempo e exforços em adestrar suas mãos nos movimentos precisos. O mesmo acontece com a intelligencia, para que um homem possa raciocinar bem, é necessario que raciocione muitas vezes e sobre diversas cousas; emfim, que exerça a intelligencia observando a connexão das ideias, e o encadeamento dos pensamentos. Para este exercicio mental, todos os assumptos servem; basta que se raciocine sobre uma cousa seja ella qual for, com tanto que a seu respeito se possa raciocinar com certesa. As propriedades da materia, as linguas, a historia natural, e as mathematicas podem preencher este fim. Mas um d'estes estudos deve ser escolhido para dar principio á esta disciplina intellectual, e a preferencia não deve ser arbitraria. As mathematicas são particularmente proprias para esse fim, pelas seguintes razões: 1.º o seu objecto é o mais simples de todos, a quantidade: 2.º cada termo que empregam tem um sentido unico, e bem determinado: 3.º os principios sobre que se baseam são evidentes e claros de modo que não podem ser contestados: 4.º as suas demonstrações são rigorosamente logicas não empregando senão definições já estabelecidas, principios concedidos como evidentes, ou previamente demonstrados, e nada devendo á autoridades, ou á probabilidades: 5.º quando chegamos a uma conclusão pelo raciocinio, podemos verifical-a por meio de calculos numericos, ou de medições, o que nos dá uma confiança inteira em seus resultados.

Alem de todas estas razões, que só por si bastariam para recommendar o estudo das mathematicas como disciplina intellectual, apresenta ainda uma outra grande vantagem, que é contrahir a intelligencia por este estudo certos habitos que são de muito proveito para a formação do espirito; sendo o mais importante de todos o de concentrar os pensamentos e firmar a attenção profundamente.

Como alguns philosophos tem contestado a utilidade do estudo das mathematicas como disciplina intellectual, bom é determinar até que ponto favorece elle o desenvolvimento das faculdades superiores da intelligencia, e que importancia deve ter n'uma educação liberal, isto é n'aquella em que o individuo não é considerado como um instrumento em vista de um fim ulterior, mas pelo contrario como sendo elle mesmo o seu proprio fim, em outros termos, n'uma educação que tem por objecto directo, e immediato o aperfeiçoamento do homem como homem, e não a sua aptidão relativa para exercer uma profissão qualquer.

N'uma educação deste genero todas as faculdades do espirito devem ser cultivadas igualmente, e como para o estudo das sciencias, que é um dos fins da vida humana, as faculdades necessarias são as de observação, inducção, e dedução; é evidente que para o aperfeiçoamento intellectual do homem, todas devem ser igualmente cultivadas, desenvolvidas, e desciplinadas; toda cultura exclusiva de uma destas faculdades causa uma falta de equilibrio mental, que não póde deixar de ser muito prejudicial. As mathematicas não exercem verdadeiramente senão uma destas faculdades, a deductiva, as observações e inducções n'esta sciencia sendo mui simples e limitadas, e nenhum exercicio dando as mais faculdades, o seu estudo, como disciplina intellectual, tem todo o seu valor no exercicio que dá a faculdade deductiva unica que pode realmente aperfeiçoar, deixando as outras quase sem cultura; mas como em nenhuma sciencia se pode fazer um uso tão extenso e tão certo do raciocinio deductivo, é só nas mathematicas que podemos aprender com vantagem a bem empregal-o. Por outro lado, se no estudo das sciencias mais complicadas do que precisamos principalmente é de fazer boas observações e experiencias, e tirar dellas inducções, tambem precisamos á cada passo de deducções para tirar todas as cousequencias possiveis dos principios formados pela inducção. Além d'isto todas tem por objecto final reduzir as suas verdades á nada mais serem senão deducções de um pequeno numero de principios fundamentaes, unicos que devem ter por base as observações e a inducção, e sendo este o estado de perfeição á que todas aspiram, e que nenhuma tem podido atingir senão as Mathematicas, é evidente que o estudo d'esta ultima sciencia é uma preparação indispensavel para o de todas as mais, como um modelo de perfeição logica, que deve servir de typo á todas as sciencias positivas.

Por todas estas razões não podemos deixar de dar um imminente lugar ás mathematicas na educação geral, e concluir que como disciplina intellectual é a mais importante de todas as sciencias, mas que não deve ser estudada exclusivamente. Recommendando o estudo d'esta sciencia como uma disciplina intellectual indispensavel, não queremos com isto exigir que todos se tornem profundos mathematicos, bastando que adquiram noções elementares mas completas d'esta importante sciencia, e sobre tudo que se familiarisem com o methodo de demonstração que emprega, á fim de poderem transferil-o para outras materias, pois em todas as sortes de raciocinios deductivos, cada argumento deve proceder como nas demonstrações mathematicas.

2.° As Mathematicas como sciencia, isto é como uma massa de conhecimentos, devem ser consideradas debaixo dos tres aspectos seguintes. 1.° Como introducção, e chave de outros estudos ulteriores: 2.° Como satisfazendo a curiosidade, propensão natural ao homem de conhecer a verdade, só pelo desejo de saber, o que é origem de grandes deleites mentaes: 3.° Como dando os meios de satisfazer todas as precizões dos homens pelas suas applicações ás artes uteis.

1.° As Mathematicas como a mais simples e a mais abstracta de todas as sciencias, e a que tracta das propriedades as mais geraes e independentes, é uma introducção indispensavel ao estudo de todas ellas, e occupa o primeiro lugar na classificação encyclopedica dos conhecimentos humanos. Considerada, pois, como introducção ao estudo das sciencias é ainda mais importante do que como disciplino intellectual.

O seu objecto é uma propriedade que pertence á todos os seres observaveis. Dependendo o estudo da natureza, de duas cousas, do movimento e da figura dos corpos, as sciencias que se occupam d'estas duas propriedades universaes, isto é, a Mechanica e a Geometria, são as chaves indispensaveis, e necessarias da sciencia do mundo, a qual deve preceder a do homem, porque não podemos estudar o agente do desenvolvimento social sem conhecermos primeiro o theatro em que tem lugar, e que tanto influe sobre os seus resultados. A Geometria que deve preceder a Mechanica, como mais simples, deve tambem ser precedida por uma outra sciencia ainda mais universal, a que tracta das propriedades das quantidades em geral, e que se chama calculo: assim pois, o estudo do calculo facilita muito o da Geometria, ambos o da Mechanica, e todos tres são precisos para o estudo do mundo physico, que é indispensavel para o do homem individual e social. (1)

Na Introducção mostraremos que as sciencias devem ser classificadas n'uma ordem encyclopedica determinada e fixa, ao mesmo tempo logica e scientifica; e a applicação directa d'esta theoria encyclopedica, nos conduz á determinar exactamente o methodo que deve ser seguido no ensino das sciencias. A principal utilidade que devemos tirar d'esta theoria na educação, é que no estudo das sciencias positivas a lei hierarchica das sciencias deve ser necessaria e restrictamente observada.

Para cada iniciação individual nas sciencias, é sempre indispensavel que o espirito positivo va desenvolvendo o seu regimen á medida que augmenta o seu dominio, e se eleve pouco á pouco do estudo mathematico inicial ao estudo da moral e da politica, percorrendo successivamente as sciencias intermediarias, Astronomia, Physica, Chimica, Biologia e Sociologia. Nenhuma superioridade pessoal de talentos póde dispensar d'esta gradação fundamental: assim pois, as Mathematicas são de todas as sciencias a que deve ser estudada em primeiro logar como introducção indispensavel á todas as mais, n'uma

(1) D'Alembert.

educação scientifica verdadeiramente methodica. (*)

2.º Considerada em si mesma, a sciencia Mathematica contém uma collecção de verdades mui curiosas, formando uma das mais perfeitas e bellas sciencias. O espirito humano é constituido por tal modo que ha o quer que seja de particularmente agradavel á todos os homens (ao menos aos que não são d'uma natureza inteiramente sensual e baixa) na acquisição de novos conhecimentos em si mesma, e independentemente de toda outra consideração qualquer. Quando vemos um objecto pela primeira vez sentimos prazer, a nossa attenção se fixa, e desejamos saber alguma cousa á seu respeito. Se é um animal queremos conhecer os seus habitos, e sentimos este desejo sem de nenhum modo pensar que poderá jamais ser-nos util. Fazemos á seu respeito perguntas, e temos grande satisfação quando á ellas achamos respostas, isto é, temos prazer em receber informações e em saber mais do que sabiamos. Se tornamos à ver o mesmo animal sentimos prazer ao lembrar-nos de já o ter visto, e em pensar que sabemos alguma cousa a seu respeito. Se vemos um outro animal parecido com o primeiro em algumas cousas, mas differente em outras, temos prazer em comparal-os, e em notar em que concordam, em que differem. Todos estes prazeres são puros e desinteressados, e nenhuma referencia tem áos fins vulgares da vida, entretanto são prazeres fortes. Não ficamos mais ricos possuindo estes conhecimentos, não lisongeamos com elles o nosso paladar nem outro qualquer sentido do corpo, e não obstante nos dão tanto deleite que de boa vontade dariamos algum dinheiro para obtel-os, e sacrificariamos alguns prazeres materiaes para este fim. Os prazeres que nos dão o estudo das sciencias são da mesma especie e natureza, ou antes são os mesmos, pois todos estes conhecimentos constituem sciencia, que nada mais é do que uma serie de conhecimentos reduzidos á

(*) A. Comte introducção de sua Astronomia.

systema, isto é, classificados em ordem regular de modo á poderem ser ensinados, lembrados com facilidade, e promptamente applicados. (*)

Os objectos principaes das sciencias são as leis geraes da natureza, e não os phenomenos particulares. Uma lei da natureza póde ser elucidada pelo facto o mais simples e familiar, como pelo mais sublime phenomeno; uma bola de sabão, pelas brilhantes côres que apresenta, serve para a descoberta dos mais importantes principios da optica, a queda de uma maçãa pode ser a causa de se descobrirem as leis que governam as revoluções dos planetas nas suas orbitas, e a situação de um seixo póde offerecer evidencias do estado do globo que habitamos milhares de seculos antes de ser occupado pela raça humana. Assim, um philosopho das mais pequenas producções naturaes póde tirar sublimes lições. Um espirito que se tem embebido no gosto das sciencias, e que tem adquirido o habito de applicar os seus principios promptamente á todos os casos que se apresentam, tem dentro de si uma fonte inexhaurivel de prazeres puros e sublimes. Por tanto o estudo das sciencias é em si mesmo uma occupação em que o espirito humano goza dos mais delicados, e intensos prazeres, e com esta grande vantagem que esses prazeres podem ser disfructados em todos os tempos e lugares, e são independentes, assim como os que são devidos á poesia, e ás bellas artes, das circumstancias externas, encontrando-se em todas as situações da vida em que se póde achar um homem. (**)

Todas as sciencias tem um dos dous objectos seguintes, o mundo, ou o homem, ambos estes estudos são interessantes, podem fornecer occupação constante ao espirito humano, e são fontes de prazeres intellectuaes inesgotaveis.

O estudo do homem como objecto final de todas as especulações, que todas devem tender para o a-

(*) Pleasures and usefulness of sciencies.

(**) Herschel the estudy of natural Pphilosophy.

perfeiçoamento material, physico, intellectual, e moral do homem individual e social, é de todos o mais interessante, o que mais excita a curiosidade. Mas por uma fatalidade inherente ao espirito humano, os estudos que mais directamente o interessam são justamente aquelles em que tem conhecimentos menos satisfactorios, de modo que acha mais alimento para a sua curiosidade na sciencia da natureza, do que na do homem, e até no estudo da natureza as sciencias as mais geraes e abstractas são as que conhece melhor. Assim todas as sciencias são igualmente importantes para satisfazer o espirito, as que mais directamente interessam os sentimentos são as mais imperfeitas e atrasadas, e assim tem menos interesse logico; e as que não tem senão um interesse esthetico longiquo, são as mais perfeitas e adiantadas, e por tanto, as mais interessantes, logicamente consideradas.

As Mathematicas são de todas as sciencias, a mais perfeita, e a mais adiantada, e por esta razão, apesar de ser a que menos directamente se refere ao conhecimento do homem, e a que tem menos interesse sentimental, é uma das que mais prendem a attenção e satisfazem a curiosidade, a que mais interessante é no ponto de vista logico, pois a sciencia que pode dar mais prazer ao espirito, é de certo aquella que contém verdades certas, precisas, e bem encadeadas, formando um todo completo e harmonico. Nenhuma sciencia n'este ponto póde ser considerada como mais propria para deleitar o espirito do que as Mathematicas; e de facto, nenhuma absorve mais a attenção dos que a cultivam. E' bem conhecida a abstracção continua dos mathematicos, e a abnegação com que se entregam á sua sciencia predilecta, esquecendo-se de seus interesses materiaes, e despresando as vantagens sociaes, do que é exemplo bem conhecido de todos, a vida do mais celebre dos mathematicos antigos, Archimedes. Este desinteresse e indifferentismo que mostram os mathematicos são taes, que causam admiração e espanto á todas as pessoas, ainda áquellas que não são estranhas aos prazeres intellectuaes, no que não cedem nem aos poetas; mostrando assim que os prazeres logicos que sentem são tão intensos como os estheticos que sentem os ultimos.

3.º Todas as sciencias são de grande utilidade nas artes, estas não são senão applicações dos principios das sciencias: estas fornecem todos os meios que emprega o homem na sua acção sobre o mundo material áfim de adoptal-o á satisfação de todas as suas precisões; pois como diz Bacon, a sciencia e o poder humanos se correspondem em todos os pontos, e vão ao mesmo fim, é a ignorancia das cousas que nos priva dos effeitos, pois não podemos vencer a natureza, senão obedecendo ás suas leis, e o que era principio, causa, ou effeito, na theoria, torna-se na practica regra, meio, ou fim. O homem interpetre e ministro da natureza não extende os seus conhecimentos, e a sua acção senão á medida que descobre a ordem natural das cousas pela observação, e pela meditação. (*) Não ha duvida que consideradas sob este aspecto, as sciencias todas são de grande valor, e quase que de igual utilidade; não podemos contemplar os prodigios da arte moderna devidos ás especulações as mais sublimes das sciencias sem admiração. Entretanto a pergunta « cui bono » para que fim practico, e vantagem tendem vossas especulações?—E' uma que, o philosopho especulativo, que ama as sciencias só pelo amor do saber, e que goza de um grande prazer na mera contemplação de verdades harmonicas e mutuamente dependentes, pode raras vezes ouvir, sem um sentimento profundo de humilhação. Tem consciencia de que ha um deleite sublime e desinteressado em suas occupações que o deveria poupar á semelhante pergunta; o estudo das sciencias communicando ao seu espirito a mais pura felicidade (depois do exercicio das affeições benevolentes), de que é susceptivel a

(*) Bacon. Novum organon.

natureza humana, e com isso não offendendo aos mais, poderia certamente dar isto como uma resposta sufficiente e directa áquelles que tendo pouca capacidade, e ainda menos gosto para as occupações intellectuaes, estão continuamente repetindo-lhe esta pergunta. Querendo porém descer dessá alta e legitima posição, para justificar-se aos olhos do vulgo, nada mais devêra fazer do que apontar para a historia das sciencias, e mostrar que as especulações aparentemente as menos proveitosas, tem sido sempre aquellas das quaes tem emanado as applicações practicas as mais importantes. O que, por exemplo, poderia parecer menos proveitoso do que as especulações dos antigos geometras sobre as propriedades das secções conicas, ou do que os sonhos de Kepler (como seriam provavelmente chamados pelos seus contemporaneos) sobre a harmonia numerica do mundo: entretanto são estes os degráos pelos quaes subimos ao conhecimento do movimento elleptico dos planetas, e á lei da gravidade com todas as suas consequencias, e todos os seus resultados practicos, como o aperfeiçoamento da navegação, que tem sido de tanta utilidade ao commercio, e por conseguinte, as artes, ás manufacturas, e a todas as commodidades, e prazeres da vida social (*). As Mathematicas consideradas n'este ponto de vista é de todas as sciencias, uma das que mais applicações tem ás artes. As operações do Commercio, a Architectura, a Engenharia civil, a construcção naval, todas as artes mechanicas, e uma infinidade de outras, entre as quaes desejaria não mencionar a arte terrivel de destruir os homens, á que se dá o nome de arte da guerra, devem muito a esta sciencia e até podemos dizer que nada seriam sem ella. Pelo lado da utilidade as Mathematicas não cedem á nenhuma outra sciencia, senão talvez a Chimica.

(*) Herschel Study of natural philosophy.

Um tratado de Mathematicas deve apresentar caracteres mui differentes, quando o seu objecto é exercer o espirito, e desenvolver as faculdades intellectuaes para tornal-as proprias para a meditação; ou quando é apresentar os resultados da sciencia a fim de serem estudados em si mesmos.

O primeiro objecto não pode ser conseguido isoladamente, todo tractado de Mathematicas escripto com o fim de disciplinar a intelligencia, communica necessariamente conhecimentos mathematicos, mas n'este caso deve se limitar aos principios indispensaveis para servirem de introducção às mais sciencias.

E' difficil determinar que gráo de desenvolvimento devem ter as obras elementares, pois devem ser mais ou menos extensas conforme o fim que se tem em vista. Uma obra só para disciplinar a intelligencia, e dar os conhecimentos mais precisos para servirem de introducção ao estudo das mais sciencias, pode ser muito condensada, mas então é preciso que nada seja tractado superficialmente, e n'este caso melhor é diminuir o numero das materias; do que sacrificar os desenvolvimentos necessarios para chegar á toda a evidencia propria do assumpto: um tractado escripto n'este ponto de vista deve ser um pouco abstracto e occupar-se principalmente da philosophia da sciencia, seguindo um methodo severo, que não deve ser confundido com as fórmas minuciosas que só servem para obscurecer as ideias as mais claras, e tornar duvidoso por provas inuteis o que é evidente por si mesmo. O merito principal de uma tal obra deve consistir em pôr muita ordem nas proposições, em tornar evidente o encadeamento que as liga umas as outras, e sobre tudo em fazer patentes as diversas fórmas de raciocinios empregados, e acautellar o espirito contra as conclusões precipitadas, e as enumerações incompletas. (*) Por outro lado, uma obra escripta em vista das applica-

(*) Lacroix sobre o ensino das Mathematicas.

ções ás artes pode ser muito abreviada e resumida, apresentando só aquillo que é necessario á estas applicações, sem entrar na parte philosophica da sciencia. Quando porèm, o fim é ao mesmo tempo disciplinar a intelligencia, e communicar conhecimentos theoricos que sirvam de introducção ás mais sciencias, e para as applicações importantes, deve ter mais desenvolvimento, sem por tanto entrar em tantas particularidades como uma que tem por unico objecto apresentar todos os resultados da sciencia, e tudo quanto se sabe sobre a materia e que só serve para os que fazem desta sciencia uma occupação especial.

A obra que emprehendi, é um tratado elementar de mathematicas, appropriado a servir de disciplina intellectual, e ao mesmo tempo, para apresentar um quadro completo, ainda que condensado, das ideias fundamentaes da sciencia, e dos resultados os mais importantes pelas suas applicações, servindo assim de introducção ao estudo geral das sciencias positivas.

O nosso compatriota o Sr. Christiano Benedicto Ottoni, publicou compendios sobre diversos ramos das mathematicas puras, de muito merecimento, que me fariam abondonar a minha empreza, a não ser a consideração de que os fins de nossas obras são mui differentes. As excellentes obras do Sr. Ottoni tem por fim apresentarem todos os conhecimentos mathematicos precisos nas escholas de Marinha, e de Engenharia, o meu fim é apresentar os elementos da sciencia mathematica debaixo do ponto de vista philosophico, tendo principalmente em vista os methodos, sem por tanto deixar de dar os resultados mais importantes da sciencia.

INTRODUCÇÃO.

No estudo das sciencias encontramos a cada passo certas noções geraes; para dellas termos uma perfeita intelligencia, devemos nos collocar n'um ponto de vista elevado a fim de podermos consideral-as simultaneamente na totalidade das concepções humanas. Este ponto de vista elevado é o da philosophia, mas por philosophia é preciso, como faziam os antigos, e especialmente Aristoteles, entender o estudo das generalidades de todas as sciencias concebidas como sujeitas ao mesmo methodo, e como constituindo cada uma differentes partes de um só grande facto, ou d'uma unica e vasta sciencia. E' pelo estudo do desenvolvimento total das sciencias desde os tempos mais antigos até o presente, que se pode chegar ao conhecimento da verdadeira philosophia. Como para o estudo de qualquer sciencia é preciso adoptar uma philosophia que sirva de guia, apresentaremos nesta introducção, um resumo muito succinto da philosophia positiva de Augusto Comte. De todos os philosophos de nossos tempos, é este o que nos deo a mais vasta e completa concepção systematica abrangendo a totalidade das sciencias fundamentaes, baseada sobre principios positivos, e o que mais tem aprofundado a systematisação de cada uma dellas.

ARTIGO 1.º

DAS SCIENCIAS EM GERAL.

§ 1.º

Desenvolvimento do espirito humano.

A lei fundamental do desenvolvimento do espirito humano, lei que se manifesta em cada ramo de nossos conhecimentos, consiste em que cada uma das sciencias possa successivamente por tres estados theoricos differentes; 1.º o estado theologico, ou ficticio; 2.º o estado metaphysico ou abstracto, e 3.º o estado positivo ou scientifico. O espirito humano por sua natureza emprega successivamente tres methodos differentes em cada uma de suas investigações, que dão origem a tres philosophias, ou á tres systemas geraes de concepção sobre a totalidade dos phenomenos naturaes, que se excluem mutuamente. O primeiro destes tres estados da intelligencia humana, é o seu ponto de partida necessario, o terceiro o seu estado final, ou definitivo, no qual as sciencias podem progredir continuamente e com toda a liberdade, o segundo é unicamente destinado a servir de transição do primeiro para o terceiro.

No estado theologico o espirito humano dirige-se exclusivamente para a investigação da natureza intima dos seres, e procura conhecer a origem de todas as cousas, as causas essenciaes primarias e finaes dos diversos phenomenos, e os seus modos fundamentaes de producção; em uma palavra procura conhecimentos absolutos. E então todos os phenomenos naturaes são considerados como produsidos pela acção directa e continua de seres sobrenaturaes, mais, ou menos numerosos, cuja intervenção arbitraria explica todas as anomalias aparentes do universo. Na philosophia theologica tudo se explica pela vontade dos deuses, não só a origem e formação do mundo, e do homem, como tambem a producção de cada facto particular.

No estado metaphysico, estado de transição, que não é senão uma simples modificação do primeiro, o espirito humano em lugar de considerar todos os phenomenos como resultados da vontade de seres sobre-naturaes, attribue a producção d'estes phenomenos á forças abstractas, verdadeiras entidades, ou abstracções personificadas, inherentes aos diversos seres do mundo, consideradas como capazes de engendrarem todos os phenomenos observaveis. Então a explicação de um phenomeno consiste em procurar se é produzido por uma ou mais d'estas forças, e em designar uma ou mais entidades correspondentes.

No estado positivo emfim, o espirito humano reconhecendo a impossibilidade de obter noções absolutas, renuncia a indagação da origem e da destinação das cousas, e das causas intimas dos phenomenos, para só tractar de descobrir pelo uso bem combinado da observação e do raciocinio as suas leis effectivas, isto é, as suas relações invariaveis de semelhança e succesão. A explicação dos factos, então redusida à seus termos reaes, nada mais é do que a ligação estabelecida entre os diversos phenomenos particulares, e alguns factos geraes considerados como causa, cujo numero vai sempre diminuindo com o progresso das sciencias. Assim na Philosophia positiva a causa primaria, e a natureza intima dos phenomenos são cousas que não podem entrar em suas especulações, como achando-se fóra da esphera dá razão especulativa, e inteiramente estereis para a sciencia, pois n'esta Philosophia a investigação do como é substituida á do porque, que nunca podemos saber pela razão só.

O systema theologico chega ao seu mais alto grão de perfeição, quando substitue a acção providencial de um Ser unico à acção variavel das numerosas divindades independentes que originariamente presidiam aos phenomenos diversos da natureza. O ultimo termo do systema metaphysico consiste em conceber, em lugar de differentes entidades particulares, uma unica grande entidade geral a Natureza considerada como a unica origem de todos os phenomenos. A Philosophia positiva ainda não chegou ao seu estado de perfeição, e por tanto não podemos precisal-o bem; mas a sua tendencia é reunir cada vez mais os phenomenos particulares á alguns factos geraes considerados como causas. O seu mais alto gráo de perfeição, para o qual tende constantemente sem talvez poder jamais atingir, seria poder representar todos os phenomenos observaveis como casos particulares de um facto geral.

Em todas as epochas de seu desenvolvimento, o espirito humano precisa de uma theoria qualquer para ligar os factos observados, e poder fazer novas observações, os factos isolados não podendo ser nem lembrados nem comparados. De outro lado nenhuma theoria positiva pode ser fundada senão na observação. O espirito humano assim obrigado a observar para poder formar theorias reaes, e a crear uma theoria qualquer para poder observar, nunca poderia sair desta difficuldade, se as concepções theologicas não se apresentassem espontaneamente. Mas o estado theologico é tão differente do positivo, que não seria possivel passar do primeiro para o segundo immediatamente, e a intelligencia teve de adoptar para poder realisar esta passagem, uma philosophia intermediaria, substituindo no estudo dos phenomenos as acções immediatas dos seres sobre-naturaes, por entidades correspondentes e inseparaveis dos phenomenos, este methodo gradualmente condusio o espirito à habituar-se a não considerar senão os factos em si mesmos, em quanto que as noções d'essas entidades metaphysicas acabaram por nada mais representarem senão os nomes abstractos dos phenomenos.

§ 2.º

Classificação das sciencias.

Depois d'estas noções geraes sobre os estados porque passam os conhecimentos humanos para chegarem ao estado positivo, devemos apresentar um resumo da classificação das sciencias á fim de determinarmos o lugar que occupam as Mathematicas na sciencia universal; esta classificação é a de A. Comte com algumas modificações.

Todos os conhecimentos humanos dividem-se em duas classes principaes, a dos conhecimentos especulativos, e a dos conhecimentos practicos.

Nos primeiros o objecto é considerar os phenomenos debaixo de todos os pontos de vista, e liga-los uns aos outros de modo a formarem um systema completo e methodico, preparando-os assim para que sejam facilmente applicados ás precisões physicas intellectuaes e moraes do homem.

Nos segundos os factos taes quaes são apresentados nos primeiros, são utilisados directamente em proveito da especie humana. Os primeiros são mais simples, mais geraes, e mais independentes, e servem de base fundamental aos segundos. N'esta introducção sò nos occuparemos dos primeiros, pois as Mathematicas fazem parte d'elles.

SCIENCIAS ESPECULATIVAS.

As sciencias especulativas dividem-se tambem em duas cathegorias, a 1.ª é composta das sciencias abstractas, e a 2.ª das sciencias concretas.

As sciencias abstractas, ou theoricas, tem por objecto a descoberta das leis que seguem as diversas classes de phenomenos, considerados todos os casos que se podem conceber.

As sciencias concretas ou descriptivas, são especiaes, e consistem na applicação das leis descobertas pelas precedentes á historia real de cada ser em particular,

As primeiras são fundamentaes, e servem de base ás segundas, formando o que se chama a philosophia natural. As segundas formam o objecto da historia natural, reunindo ao que se dá geralmente este nome a statistica e a historia. Sobre estas ultimas nada mais diremos n'esta introducção, para nos occupar exclusivamente da philosophia natural de que fazem parte as Mathematicas.

PHILOSOPHIA NATURAL.

As sciencias abstractas ou theoricas dividem-se em um certo numero de sciencias, que devem ser classificadas, n'uma ordem methodica, principiando pela mais simples e terminando pela mais complexa, e sobretudo conforme a ordem de dependencia; a ordem de dependencia das sciencias resulta da dos phenomenos correspondentes; e a d'estes é determinada pelo grao de simplicidade e generalidade. Considerando a totalidade dos phenomenos observaveis, reconhece-se que formam um certo numero de classes naturaes, que podem ser dispostas de modo que o estudo racional de cada uma seja baseado sobre o conhecimento das leis principaes que formam o objecto da classe precedente.

A primeira grande divisão que devemos fazer dos phenomenos é em anorganicos, e organicos, isto é, os que nos apresentam os corpos brutos, e os que nos apresentam os corpos dotados de vida. As sciencias que se occupam dos primeiros d'estes phenomenos podem ser chamadas sciencias cosmologicas, e as que se occupam dos segundos, sciencias biologicas. Os phenomenos anorganicos são máis simples e geraes, porque não só pertencem aos corpos brutos, como tambem aos que são dotados de vida, que alem d'estes phenomenos geraes á todos os corpos manifestam ainda outros que lhes são particulares, e que constituem a vida. Os phenomenos biologicos pois são muito mais complicados, e não podem ser estudados senão depois de conhecidos os cosmologicos, com os quaes sempre se complicam. Alem d'isso a existencia anorganica é inteiramente independente da organica, que pelo contrario depende da primeira que lhe serve de base e condição, pois podemos conceber a existencia dos astros e da terra sem organismos existindo sobre estes corpos, e não podemos conceber a existencia de um organismo qualquer, sem que exista sobre um planeta appropriado a sua existencia especial.

Assim pois, não ha duvida que na serie encyclopedica as sciencias cosmologicas devam preceder as biologicas.

1.º SCIENCIAS COSMOLOGICAS.

As sciencias que tem por objecto o estudo do mundo, dividem-se em duas classes; os corpos que o constituem considerados em toda sua totalidade apresentam phenomenos de duas especies, uns relativos ao tamanho, à figura, e ao movimento, ou ás propriedades mathematicas, formam a primeira classe, e outros relativos á consistencia, temperatura, côr etc., ou as propriedades physicas formam a segunda classe. As sciencias que se occupam dos phenomenos da primeira classe tomam o nome de sciencias mathematicas, as que tractam dos da segunda classe, de sciencias physicas. Não se pode estudar as propriedades physicas sem primeiro ter conhecimento das mathematicas, pois não ha phenomeno physico que não dependa da figura, e do movimento dos corpos; assim as sciencias mathematicas como mais geraes devem preceder as physicas.

1.° SCIENCIAS MATHEMATICAS.

Estas sciencias comprehendem as leis as mais geraes da existencia anorganica redusida aos unicos phenomenos de extensão e movimento, sem as quaes nenhum corpo pode ser percebido por nós.

Todos os mais phenomenos, ainda os mais nobres, dependem d'estes phenomenos fundamentaes que pelo contrario são inteiramente independentes de todos os mais.

Este primeiro gráo da existencia real dá origem á dous estudos differentes que podem ser caracterisados pelas qualificações de abstracto, e concreto. Podemos primeiro estudal-a como um attributo universal dos seres, mesmo os mais complexos, abstrahida dos diversos phenomenos que a acompanham; e em segundo lugar, esta primeira existencia material geometrica, e mechanica pode ser estudada como propria aos corpos que não nos offerecem outros phenomenos, por não serem accessiveis senão á exploração visual, péla distancia em que se acham de nós. D'aqui resulta a divisão do estudo mathematico da cosmologia, em mathematicas propriamente taes, e em astronomia. A distincção real entre estas duas sciencias parece pouco profunda, pois ambas tem por fim estudar os mesmos phenomenos elementares em casos differentes, e debaixo de diversos aspectos. Mas subjectivamente percebemos logo a independencia caracteristica da primeira, e a subordinação necessaria da segunda, que sem a base mathematica não poderia fazer progressos, nem talvez ter existencia.

1.° MATHEMATICAS. Sobre esta sciencia temos que fallar depois especialmente. As Mathematicas occupando-se das propriedades as mais geraes, a quantidade, a extensão, e o movimento, são de todas as sciencias, a que tem por objecto os phenomenos os mais simples, e independentes. Esta sciencia ainda que nos dê conhecimentos muito reaes e importantes, que a constituem uma sciencia independente, é menos util pelas informações directas que nos dá, apesar de serem estas applicaveis á todos os corpos, e necessarias ao estudo de todas as mais sciencias, do que como constituindo o instrumento o mais poderoso que o homem pode empregar na investigação das leis dos phenomenos naturaes; e portanto tem muito mais valor pelas suas funcções logicas, do que pelas scientificas.

2.° ASTRONOMIA. Esta sciencia que tem por objecto, os tamanhos, as figuras, as distancias, e os movimentos dos astros, deve muito mais á experiencia que as Mathematicas, que devem tão pouco à observação, que por muitos são consideradas como uma sciencia toda racional, e á priori. Todos os resultados da Astronomia são devidos à observação paciente e minuciosa das apparencias celestes, e assim é uma sciencia muito mais complicada que as Mathematicas. Sem esta ultima nada pode a Astronomia, a Geometria, e a Mechanica damlhe os meios de especular sobre as observações que lhe são proprias, e de tirar d'ellas toda a theoria dos movimentos celestes. Entretanto depois das Mathematicas a sciencia astronomica é a que se occupa dos phenomenos os mais geraes e os mais simples, e por tanto é a mais abstracta. As leis à que estão sujeitos os phenomenos celestes influem sobre as de todos os mais, dos quaes pelo contrario em nada dependem; por exemplo, em todos os phenomenos physicos observamos primeiro os effeitos da gravitação, e depois combinados com estes os de mais alguns outros agentes particulares á esta ultima sciencia. Todo phenomeno terrestre physico ou chimico é sempre mais complicado que um phenomeno celeste, por mais complexo que seja. Não é pois possivel estudar a physica com proveito senão depois da astronomia, que por sua generalidade e independencia deve ser collocada na serie encyclopedica logo depois das mathematicas. A historia nos ensina que a primeira sciencia que tomou o caracter positivo foi a sciencia mathematica, e que a segunda foi a Astronomia; eram estas duas sciencias as unicas que já tinham este caracter entre os antigos.

2.° SCIENCIAS PHYSICAS.

Depois dos phenomenos mathematicos vem os physicos, que formam o objecto da physica geral, que deve ser dividida em duas sciencias, uma que estuda os corpos no ponto de vista mechanico, e outra no ponto de vista chimico. Assim, pois, a physica geral divide-se em Physica mechanica, ou Physica simplesmente, e Physica chimica, ou Chimica simplesmente. Esta ultima para ser estudada de um modo methodico, e racional suppoem evidentemente o estudo previo da primeira Os phenomenos chimicos são necessariamente mais complicados que os physicos, e dependem d'estes em quanto que sobre elles nada influem; por exemplo, todas as acções chimicas estão sujeitas á influencia do pezo, do calor, da luz, da electricidade, e além de tudo isso apresentam alguma cousa de especial que modifica a acção d'estes agentes.

1.º PHYSICA. Esta sciencia tem por objecto o estudo das propriedades dos corpos, e as acções que exercem uns sobre os outros quando estas acções não alteram a sua natureza. Sem alterarem a constituição intima dos corpos, os phenomenos physicos affectam somente o estado exterior dos corpos, e ao mais o seu genero de consistencia. Esta sciencia divide-se em 5 ramos que formam quase outras tantas sciencias independentes, que tem por objecto estabelecerem successivamente as leis do pezo, do calor, da luz, do som, e da electricidade. D'estes diversos ramos da sciencia, os 3 primeiros tem uma connexão immediata com a Astronomia, e o 5.º a liga com a Chimica por uma relação espontanea, e immediata. Assim, à posição encyclopedica da Physica entre a Astronomía, e a Chimica conforme a sua destinação dogmatica, resume felizmente a totalidade de seus verdadeiros caracteres essenciaes, tanto logicos como scientificos. A actividade universal não é estudada na Physica ainda debaixo do aspecto que a aproxima mais da espontaneidade vital. Entretanto esta sciencia considera um modo de existencia anorganica muito mais complicado, e muito superior as simples propriedades de extenção e movimento, unicos objectos da Astronomia. A Physica funda o estudo especial do meio terrestre, determinando as suas leis as mais fixas. Os seus phenomenos são jà modificaveis até certo ponto, ainda que não ao mesmo gráo que os chimicos. Os agentes que estuda são os principaes motores das acções chimicas, e até das vitaes, mas limita-se a contempla-los em si mesmos independentemente das acções moleculares no gráo normal em que não modificam senão a constituição externa dos corpos. As reacções que a Physica aprecia fornecem a primeira base systematica do poder material do homem.

As relações da Physica com a Biologia são bem pronunciadas ainda sem a interposição da Chimica. De um lado caracterisa as primeiras condições externas da existencia vital sempre subordinada aos principaes agentes physicos; e de outro lado fornece a introducção indispensavel ao estudo da animalidade determinando as propriedades materiaes que se referem aos diversos sentidos. Independentemente de suas relações necessarias com as duas sciencias adjacentes de que forma um ligame espontaneo, a Physica constitue por si mesma um elemento fundamental da Philosophia natural; realisa um progresso capital no conhecimento do meio inerte, e prepara directamente o estudo da Biologia tanto vegetál como animal, de modo á permittir o estabelecimento da scieneia do homem.

Na Physica as Mathematicas são indispensaveis; com o auxilio d'ellas o espirito penetra profundamente na regra das cousas, sem este soccorro, que as vezes rectifica a experiencia, e outras a precede, as theorias physicas seriam menos seguras, e menos comprehensiveis. Entretanto esta sciencia está longe de apresentar a regularidade, e a perfeição das mathematicas e da astronomia; e a razão é que os dados da experiencia na Physica são em muito maior numero, e complicam grandemente as indagações; e os seus phenomenos reaes nem sempre podem passar pela elaboração directa do instrumento mathematico. A historia provanos a subordinação da Physica á Astronomia, e ás Mathematicas, já entre os Gregos a Geometria tinha se enrequecido com brilhantes descobertas, e a Astronomia com grandes acquisições, chegando estas duas sciencias ao estado positivo, quando a Physica estava ainda apenas esboçada, e entregue á todas as divagações metaphysicas, das quaes não se livrou senão nos tempos modernos.

2.º Chimica. Esta sciencia estuda os elementos dos corpos em suas acções moleculares, e os phenomenos de composição, e decomposição dos corpos que alteram sua constituição de um modo permanente, dando lugar a novos productos. A Chimica não póde ser estudada senão depois da Physica como já dissemos, e não póde deixar de formar uma sciencia independente, ainda que seja muito difficil separa-la distinctamente da Physica. Seja qual fôr a opinião que se adopte a respeito das affinidades chimicas, ainda que sejam consideradas como modificações da gravidade, ou da electricidade etc., determinadas pela figura e disposição mutua dos atomos, incontestavelmente a necessidade de tomar em consideração, e de estudar estas condições não permitte fazer da

Chimica um mero appendice da Physica. Esta sciencia forma a transição entre os phenomenos anorganicos, e os organicos; os seus phenomenos caracterisam uma actividade intermediaria entre a que manifestam os astros, e a que é propria aos corpos vivos. Sem a Chimica não se poderia fazer um estudo racional da vida vegetal, estudo que serve de base ao da vida animal. Os phenomenos chimicos são muito mais complicados que os physicos, pois todas as combinações e decomposições dependem do estado physico dos corpos, que se acham em presença uns dos outros, e além d'isso de certas leis particulares que se complicam com as do calor, da luz, da electricidade etc.

Depois da Physica é a sciencia a mais regular e a mais perfeita, e até em um certo ponto de vista póde ser considerada como apresentando uma superioridade logica sobre a Physica, visto que a Chimica é uma sciencia verdadeiramente unica, todos os seus phenomenos formando um só todo, e seguindo sempre as mesmas leis, em quanto que a Physica não tem esta unidade, é propriamente um complexo de 5 sciencias independentes seguindo os phenomenos de que se occupam leis particulares, mas a physica conserva sempre a sua superioridade scientifica apesar d'esta falta de unidade pela maior precisão de todas as suas leis. As Mathematicas que exercem um dominio absoluto na Astronomia, e uma grande e importante influencia na Physica, quase nenhuma exerce na Chimica directamente, e por esta razão as theorias d'esta sciencia privadas d'este grande e poderoso instrumento logico, são mais limitadas e muito menos precisas que as da physica. Os phenomenos chimicos são muito mais modificaveis que os physicos, e por esta razão esta sciencia é uma das que mais serviços presta ao homem na sua acção sobre o mundo material. A posição encyclopedica da Chimica depois da Physica, e antes da Biologia, nos é indicada pela historia, pois a Physica constituio-se sciencia positiva no tempo do immortal Galileo quando a Chimica só tomou verdadeiramente o estado positivo depois dos trabalhos do grande Lavoisier, e de seus dignos successores.

Com estas quatro sciencias terminamos o estudo da primeira parte da philosophia natural, que tem por objecto o Mundo, e que chamamos Cosmologia: temos agora que tractar dos corpos organicos, ou dotados de vida, que formam uma classe separada muito differente pelas suas manifestações de actividade, do dos corpos brutos ou anorganicos, que formam os materiaes de que é composto o mundo.

2. SCIENCIAS BIOLOGICAS.

Todos os seres dotados de vida apresentam duas ordens de phenomenos essencialmente distinctos, os relativos á vida individual, e os relativos a especie, ou a vida social. E' verdade que esta distincção não dá origem a uma verdadeira sciencia senão relativamente aos animaes, e sobre tudo ao homem, n'este ultimo as considerações sociaes são fundamentaes, e constituem uma vasta e importante sciencia. Estas duas ordens de phenomenos não podem ser confundidas, e por tanto o estudo dos corpos vivos divide-se em duas sciencias principaes, a sciencia geral da vida, ou Biologia, e a dos phenomenos sociaes, ou Sociologia. A primeira que tracta dos phenomenos physiologicos ou das leis da vida em geral, deve ser estudada antes da segunda, que se occupa das leis da sociedade, porque é mais simples, mais geral, e mais independente, pois os seus phenomenos influem grandemente nos da sociedade, sendo o agente d'esta o homem, que como um ente dotado de vida, está sujeito á todas as leis physiologicas, além das leis particulares aos phenomenos sociaes.

1.° BIOLOGIA.

Esta sciencia tem por objecto o estudo da organisação, e das manifestações de actividade dos corpos vivos, e deve ser dividida em duas sciencias, uma tendo por objecto os phenomenos da vida vegetal, e outra os da vida animal; a primeira tomarà o nome de Phytobiologia, e a segunda de Zoobiologia.

A. Comte na sua classificação das sciencias não adoptou esta subdivisão da Biologia, considerando a vida vegetal e a vida animal como formando uma só sciencia. Mas separando o estudo da vegetalidade do da animalidade, nada mais fazemos do que applicar o mesmo principio de separar os estudos mais simples e independentes, dos mais complicados e dependentes. Os phenomenos da vida vegetal podem ser muito melhor estudados nas plantas em que se apresentam isolados, do que englobadamente nestas e nos animaes, onde estão sempre mais ou menos modificados pelos da vida propriamente animal.

1.° PHYTOBIOLOGIA. Este estudo tem por objecto a organisação, e as manifestações de vida dos vegetaes, e deve evidentemente preceder o dos animaes.

E' n'esta sciencia que podemos estudar as propriedades fundamentaes da vida; os phenomenos de nutrição, e de propagação, que não só se manifestam nos vegetaes, como tambem nos animaes, formam o seu objecto especiál; estes phenomenos não podem ser estudados com vantagem, de modo a serem perfeitamente analysados senão nas plantas onde se mostram com toda a simplicidade, e livres de todas as perturbações provenientes dos phenomenos animaes. Por esta razão, o estudo da vida vegetal deve formar uma sciencia distincta, tendo por objecto o estudo d'estes phenomenos fundamentaes da vida, isolados dos mais complicados, que apresentam os animaes, o que muito facilita depois o estudo d'estes. A Phytobiologia succede á Chimica, e della depende, pois os tessidos de que são formados os corpos organicos, e os humores que nelles circulam, são compostos de elementos chimicos, e os materiaes que servem de alimento aos differentes organismos soffrem uma infinidade de composições e decomposições, que dão origem á nutrição e á reproducção que são os phenomenos que constituem a vida inteira do vegetal, e a base da dos animaes.

Esta sciencia está tão intimamente unida com a Chimica, que actualmente acham-se confundidas nos seus limites, de modo a formarem uma classe de phenomenos a que se dá o nome de chimica organica, e que é um composto confuso de phenomenos chimicos e biologicos. A posição encyclopedica d'esta sciencia entre a chimica e a Zoobiologia acha-se assim bem caracterisada.

N'esta sciencia assim como nas que se seguem as mathematicas não exercem influencia directa alguma, e as tentativas feitas por alguns philosophos de applicarem o calculo ao estudo da vida não apresentam resultados satisfactorios. Os phenomenos vitaes são mui variaveis, e modificaveis. Esta sciencia não tomou um caracter verdadeiramente positivo senão depois das grandes descobertas da chimica, e principalmente n'estes ultimos tempos.

2.º Zoobiologia. Esta sciencia tracta da organisação e das manifestações de vida dos animaes. O estudo da animalidade não pode ser feito senão depois do da vegetalidade, pois os animaes estão sujeitos á todas as leis da vida vegetal, e de mais as dos phenomenos verdadeiramente animaes. Estes phenomenos especiaes aos animaes, e que se ajunctam aos da vida vegetal modificando-os grandemente, são tambem chamados de relação, e são os de locomoção, e sensibilidade que dependem evidentemente dos de nutrição. Relativamente aos phenomenos communs as plantas e aos animaes existe a mais intima relação entre esta sciencia e a chimica, mas os phenomenos especiaes aos animaes não tem senão uma connexão muito indirecta com esta sciencia, e só devida a sua dependencia immediata dos da vida vegetal, porém tem uma relação menos remota com os phenomenos physicos que servem directamente para explicarem em grande parte a locomoção, e a sensação. Esta sciencia serve de passagem para a sociologia. Não chegou ao estado positivo senão em nossos dias para o que muito contribuiram os trabalhos de Bichat, e Blainville, e por isso ainda conserva em muitas partes restos da philosophia metaphysica, de cuja tutella ha pouco se emancipou.

2.ª SOCIOLOGIA.

A Sociologia, ou sciencia que tem por objecto os phenomenos sociaes divide-se em duas outras, a Sociologia propriamente tal, e a Teleologia. A primeira tem por objecto a organisação da sociedade, e o desenvolvimento total da humanidade; a segunda estuda os fins que o homem tem de realisar na vida social.

O primeiro estudo servindo de base ao segundo deve ser collocado antes na serie encyclopedica.

1.º SOCIOLOGIA. Em todos os phenomenos sociaes observamos primeiro a influencia das leis physiologicas do individuo, e alem d'isso alguma cousa de particular que modifica os seus effeitos, e que provém da acção dos individuos uns sobre os outros, singularmente complicada na especie humana pela acção de cada geração sobre a que segue. E' pois evidente que para estudar convenientemente os phenomenos sociaes é preciso partir do conhecimento profundo das leis relativas a vida individual. Mas esta subordinação necessaria entre estes dous estudos não nos autorisa, a ver na sociologia um simples appendice da physiologia, apesar de serem os seus phenomenos homogeneos, não são identicos, e a separação das duas sciencias é d'uma importancia fundamental. Seria impossivel tractar o estudo collectivo da especie como uma pura deducção do estudo do individuo, pois que as condições sociaes que modificam a acção das leis physiologicas são precisamente então a consideração a mais essencial. Assim a sociologia deve ser fundada sobre um corpo de observações directas que lhe são proprias, não deixando de ter sempre em consideração a sua intima relação necessaria com a physiologia. O objecto especial desta sciencia é o estudo dos elementos da sociedade, que são, o homem intellectual e moral, a familia, e o estado, e do progresso successivo da evolução da humanidade, assim como das relações do homem e da sociedade com a natureza. A connexão da Sociologia com a Zoobiologia é tão intima como a da Phytobiologia com a Chimica ; assim como a chimica organica confunde-se com a anatomia dos vegetães; do mesmo modo o estudo da sensibilidade, que faz parte da Zoobiologia, confunde-se com o das faculdades intellectuaes e affectivas do homem, que faz parte da Sociologia.

Esta sciencia que é uma das mais complicadas está em relação directa com quase todas as mais , já mostramos como depende em grande parte da Biologia , as suas relações com a Cosmologia são tambem directas e importantes, pois o mundo physico tem uma grande influencia sobre o desenvolvimento social , influencia que se attribue ao que se chama clima, e que tem sido muito exaggerada por alguns sociologistas; e de outro lado um dos resultados do desenvolvimento social é a acção directa , e gradualmente crescente dos homens sobre o mundo material , a fim de adaptal-o cada vez mais as suas precisões.

Esta sciencia ainda se acha no estado metaphysico , apesar dos trabalhos de Smith, de Montesquieu , de Condorcet; apenas n'estes ultimos annos vai tomando um caracter positivo ainda muito imperfeito; A. Comte na sua obra sobre politica positiva deo-lhe o verdadeiro caracter positivo, mas ainda assim , precisa de ser mais cultivada para que se torne inteiramente uma sciencia positiva.

2.º Teleologia. Esta sciencia tem por objecto determinar os fins da vida humana , e os meios de os realisar. Como o fim do homem consiste em se desenvolver em todas as suas faculdades, applicando-as à todas as relações em que se acha com a natureza , e com seus semelhantes , devemos considerar como um fim principal da actividade humana, cada complexo de relações fundamentaes , nas quaes , o homem se desenvolve pela applicação de suas faculdades. Estes fins , são a Verdade, o Bello, o Util, e o Bem , dando origem ás sciencias, ás bellas artes, as artes industriaes, á moral, ao direito, e a religião. Esta sciencia não pode ser estudada sem que se tenha um conhecimento completo do theatro do desenvolvimento humano , que é o mundo, e do agente deste desenvolvimento que é o homem social , por esta razão não pode ser classificada senão depois da Sociologia. Esta sciencia é a mais importante de todas e a que serve de termo de todas as nossas meditações, e devemos considerar todas as mais sciencias anteriores como servindo de introducção á esta, mas de introducção indispensavel, á não se querer fazer da sciencia dos fins da actividade humana, uma sciencia vaga, nada apresentando de positivo, fundada só em hypotheses metaphycas, ou em opiniões religiosas, dando lugar á uma divagação sem limites, origem de uma infinidade de systemas que não podem ser nem provados nem refutados. A Teleologia determinando os fins da vida humana, e mostrando os meios de os realisar, contribue mui directamente para o aperfeiçoamento material, physico, intellectual, e moral do homem, e serve de passagem das sciencias theoricas, para as practicas, que todas tem por objecto os meios de conseguir o aperfeiçoamento do homem, n'um de seus diversos ramos. Esta sciencia é mais deductiva do que inductiva, e como tracta do objecto que mais directamente interessa os homens, da sua destinação, tem sido cultivada desde os tempos mais remotos debaixo do nome de philosophia, mas por falta de sua base scientifica, que ainda não está de todo completa, não pode ainda tomar o caracter verdadeiramente positivo.

E' digno de observação que as duas sciencias extremas da encyclopedia dos conhecimentos humanos, as Mathematicas, e a Teleologia, são inteiramente quase, sciencias deductivas, em quanto que as mais são essencialmente experimentaes, e inductivas, mas com esta differença, que a primeira parte das inducções as mais simples, faceis, e espontaneas para d'ellas tirar uma serie importante de deducções, e que a ultima parte das inducções as mais complicadas, e elaboradas de todas, que lhe fornece o complexo de todas as sciencias positivas intermediarias, e dellas tira todas as deducções proprias para conseguir o grande fim de determinar a destinação do homem e da sociedade, e de indicar os meios de conseguir o aperfeiçoamento indefinito do homem e da sociedade. Esta analogia subjectiva entre as mathematicas e a Teleologia relativamente ao methodo logico de que se servem, nos da a explicação do facto historico de terem sido os grandes mathematicos, sempre ao mesmo tempo grandes philosophos, como Descartes, Leibnitz, Newton, Pascal, D'Alembert, Condorcet, Kant, etc., e d'outra parte de terem sempre os grandes philosophos sido versados nas Mathematicas, como Pythagoras, Platão, Aristoteles, Malebranche, Locke Reid, D. Stewart, Condillac, etc.

Esta sciencia é com pouca differença a mesma que A. Comte chama Moral, não approvando a extensão que da a significação d'esta palavra, accepção muito geral que não concorda com as ideias que geralmente se lhe tem unido, para poder abranger não só a moral propriamente, como tambem a Esthetica, a Politica etc., adoptamos o termo Teleologia, ja empregado pelos Allemães para significar a sciencia dos fins, dando-lhe uma accepção positiva, como faz John Mill, em vez da metaphysica que lhe deram Kant, Schelling Hegel etc.

Temos concluido o resumo da classificação das sciencias: 1.° dividimos todas as sciencias theoricas em Cosmologicas e Biologicas. 2.° dividimos depois cada uma destas grandes classes de sciencias geraes, formando assim quatro sciencias fundamentaes. 1.° Mathematicas, 2.° Physica geral, 3.° Biologia, e 4.° Sociologia; 3.° emfim, subdividimos cada uma d'estas sciencias em duas, e assim chegamos a formar 8 sciencias principaes. 1.° Mathematicas puras, 2.° Astronomia, 3.° Physica, 4.° Chimica, 5.° Phytobiologia, 6.° Zoobiologia, 7.° Sociologia, 8.° Teleologia. A. Comte só admitte 7, mas esta differença só consiste em que subdividimos a Biologia que elle considera como uma unica sciencia.

Podemos representar esta classificação no quadro seguinte:

Sciencia	Cosmologicas	Mathematicas	1. Mathematicas
			2. Astronomia
		Physica geral	3. Physica
			4. Chimica
	Biologicas	Biologia	5. Phytobiologia
			6. Zoobiologia
		Sociologia	7. Sociologia
			8. Teleologia

A ordem fundamental que estabelecemos entre todos estes estudos devia ser fixada a fim de conhecermos a verdadeira posição que deve occupar, no todo da philosophia natural o estudo de que tracta exclusivamente este compendio. Longe de considerar esta classificação didactica como indifferente, conforme á opinião dos escriptores do regimen scientifico empirico, podemos assegurar pelo contrario, que é d'ella sobre tudo que depende a principal efficacia intellectual e social da philosophia positiva. Existe uma intima solidariedade entre a concepção encyclopedica, e a lei fundamental de evolução que serve de base a esta philosophia. Uma tal ordem deve por sua natureza preencher duas condições essenciaes, uma dogmatica, e outra historica, cuja convergencia necessaria deve ser reconhecida. A primeira consiste em dispôr as sciencias conforme sua dependencia successiva, de modo que cada uma se funda sobre a precedente e prepara a que segue; a segunda prescreve de as dispôr conforme a sua formação effectiva, passando sempre das mais antigas ás mais modernas. A equivalencia espontanea d'estes dous methodos encyclopedicos provém em geral da identidade fundamental que existe inevitavelmente entre a evolução individual, e a evolução collectiva, as quaes tendo a mesma origem, uma semelhante determinação, e o mesmo agente devem sempre offerecer phases correspondentes, salvo as diversidades de duração, de intensidade, e de rapidez inherentes á desigualdade dos dous organismos. Este concurso necessario permitte conceber estes dous modos como dous aspectos corelativos de um unico principio encyclopedico, de modo a podermos habitualmente empregar aquelle que em cada caso manifesta melhor as relações consideradas, e com a preciosa faculdade de poder constantemente verificar por um o resultado do outro.

A lei fundamental d'esta ordem commum de dependencia dogmatica, e de successão historica acha-se completamente estabelecida na obra de philosophia positiva de A. Comte, cujo plano um pouco modificado apresentamos acima.

Consiste esta em classificar as differentes sciencias conforme a natureza dos phenomenos estudados, e em relação a sua generalidade e independencia decrescente, ou sua complicação crescente, do que resulta especulações cada vez menos abstractas, e mais defficeis mas tambem cada vez mais eminentes e completas, em virtude de sua relação mais intima com o homem e com a humanidade, objecto final de todo o systema theorico. Esta classificação tira o seu principal valor philosophico tanto scientifico como logico da identidade constante e necessaria que existe entre todos os diversos modos de comparação especulativa dos phenomenos naturaes, do que resulta theoremas encyclopedicos cuja explicação e uso pertence á philosophia positiva,que alem d'isso debaixo do aspecto pratico ajunta esta importante relação geral que os phenomenos tornam-se nesta serie cada vez mais modificaveis, de modo a offerecerem um dominio cada vez mais vasto a intervenção humana. O unico fim que tivemos em vista aqui foi a determinação racional da verdadeira hierarchia dos estudos fundamentaes concebidos directamente como differentes elementos essenciaes de uma unica sciencia, a da humanidade.

Assim chegamos gradualmente a descobrir a invariavel hierarchia ao mesmo tempo historica e dogmatica, igualmente scientifica e logica das 8 sciencias fundamentaes já mencionadas, a primeira constitue necessariamente o ponto de partida exclusivo, e a ultima o unico fim essencial de toda a philosophia positiva considerada como formando por sua natureza um systema verdadeiramente indivisivel no qual toda decomposição é radicalmente artificial, sem ser por tanto de nenhum modo arbitraria, tudo refirindo-se finalmente à humanidade, unica concepção verdadeiramente universal. A totalidade d'esta formula encyclopedica exactamente conforme com as verdadeiras affinidades dos estudos correspondentes, e que comprehende evidentemdnte todos os elementos de nossas especulações reaes, permitte emfim a cada intelligencia renovar a sua vontade a historia geral do espirito positivo, passando de um modo quase insensivel das menores ideias mathematicas aos mais elevados pensamentos sociaes.

E' claro que cada uma das sciencias intermediarias confunde-se por assim dizer, com a precedente quanto aos seus mais simples phenomenos, e com a seguinte quanto aos mais eminentes. Esta perfeita continuidade espontanea torna-se ainda mais perfeita quando consideramos que o mesmo principio encyclopedico fornece a classificação racional das diversas partes constitutivas de cada estudo fundamental, de modo que os grâos dogmaticos, e as phases historicas podem ser aproximadas tanto quanto o exige a precisão das comparações.

Esta theoria da classificação deve ser considerada como inseparavel da theoria da evolução exposta no principio desta introducção. A consideração habitual de uma tal hierarchia deve tornar-se indispensavel, seja para applicar convenientemente a lei dos tres estados, seja para dissipar sufficientemente as unicas objecções sérias que offerece ; pois a frequente simultaneidade historica das tres grandes phases mentaes, relativamente a especulações differentes, constituiria de outro modo uma inexplicavel anomalia, que resolve, pelo contrario, espontaneamente a lei hierarchica tambem relativa a successão quanto a dependencia dos diversos estudos positivos; em sentido contrario, concebe-se que a regra da classificação suppoem a da evolução, pois que todos os motivos essenciaes da ordem assim estabelecida, resultam da desigual rapidez do desenvolvimeute nas differentes sciencias fundamentaes. A combinação racional d'estas duas ideias fundamentaes constituindo a unidade necessaria do systema scientifico, no qual todas as partes concorrem pàra um mesmo fim, assegura tambem de outro lado a justa independencia dos diversos elementos principaes. (1)

ARTIGO 2.º

DAS MATHEMATICAS.

As Mathematicas consideradas em sua totalidade como formando uma unica sciencia, define-se geralmente, a sciencia das quantidades.

Por quantidades entende-se tudo que é susceptivel de augmento e de diminuição. Um objecto qualquer material, não é para nós, abstrahindo a sua natureza physica, senão um aggregado de partes, isto é, uma quantidade maior ou menor susceptivel de augmento ajuntando-se-lhe novas partes, ou de diminuição, tirando-se-lhe algumas das que o compoem. A quantidade é pois uma propriedade universal que pertence à todos os objectos do mundo physico, do que resulta que a sciencia das quantidades abrange todos os phenomenos do universo, e que as leis da quantidade são applicaveis ás leis de todos os phenomenos.

O termo, sciencia das quantidades, é muito vago e não caracterisa bem o objecto particular das Mathematicas, para precisal-o mais se tem dito que as Mathematicas tem por objecto a medição das quantidades, esta definição porem, ainda que exacta, e incompleta, porque apresenta como um fim directo, o que as mais das vezes não é senão um fim indirecto. A medição directa das quantidades é uma operação muito simples que não pode dar origem a uma vasta sciencia como as Mathematicas. Quase sempre não podomos medir as quantidades senão indirectamente. A definição exacta das Mathematicas é a se-

(1) A. Comte, introducção a Astronomia.

guinte, a sciencia que tem por objecto a medição indirecta das quantidades, e assim o seu objecto é constantemente determinár as quantidades umas pelas outras, pelas relações precisas que existem entre ellas. Esta definição em lugar de dar somente a ideia de uma arte, como a primeira, caracterisa immediatamente uma verdadeira sciencia, e a mostra como composta de um grande numero de operações intellectuaes encadeadas umas ás outras, que podem se tornar mui complicadas em razão da serie de intermediarios que são precisos entre as quantidades incognitas e as que podem ser directamente medidas, do numero de variaveis coexistentes na questão dada, e da natureza das relações entre todas estas diversas quantidades que fornecem os phenomenos considerados. Por esta definição devemos considerar o espirito mathematico como consistindo em suppôr sempre como ligadas entre si todas as quantidades que pode apresentar um phenomeno qualquer em vista de deduzir umas das outras. Não ha phenomeno que não possa dar origem a considerações d'este genero, do que resulta a extenção naturalmente indefinita, e até rigorosamente, a universalidade logica da sciencia mathematica; que justifica o emprego do nome que serve para designar esta sciencia; esta denominação que tem hoje uma accepção determinada significa simplesmente a sciencia em geral. Uma tal designação exacta para os antigos que não tinham outra sciencia real, não pode ser conservada pelos modernos senão para indicar que pode ser considerada como a sciencia por excellencia. De facto a definição que demos d'esta sciencia, afastando a circunstancia de precisão das determinações, nada mais é do que a definição de toda verdadeira sciencia qualquer, pois cada uma não tem necessariamente por fim senão determinar phenomenos uns pelos outros em razão das relações que existem entre elles. Toda sciencia consiste na coordinação de factos, se as diversas observações ficassem inteiramente isoladas, não existiria sciencia. A sciencia é destinada a dispensar, tanto quanto comportam os differentes phenomenos, de toda observação directa. permittindo deduzir do menor numero possivel de dados immediatos, o maior numero possivel de resultados; este é o uso real, seja na especulação, seja na practica das leis que conseguimos descobrir entre todos os phenomenos naturaes.

A sciencia Mathematica não faz senão levar ao mais alto gráo possivel, tanto em relação a quantidade, como em relação a qualidade, sobre os objectos de seu dominio, o mesmo genero de indagação que proseguem em grãos mais ou menos inferiores cada sciencia real na sua esphera respetiva. E' pois pelo estudo das Mathematicas, e somente por elle, que se pode fazer uma ideia justa e apeofundada do que seja uma sciencia.

E' n'elle que unicamente se deve procurar conceber com precisão o methodo geral que o espirito humano emprega constantemente em todas as suas investigações positivas; porque em neuhum outro as questões são resolvidas de um modo tão completo, e as deducções prolongadas tão longe com rigorosa exactidão. E' n'esta sciencia que o nosso entendimento tem dado as maiores provas de sua força, porque as ideias que n'ella se consideram são do mais alto grão de abstracção possivel na ordem positiva. Toda educação scientifiea que não principia por este estudo pecca necessariamente pela base.

DIVISÃO DAS MATHEMATICAS.

Para que as divisões d'esta sciencia sejam verdadeiramente racionaes e derivadas da natureza da materia, é preciso que se apresentem espontaneamente fazendo-se a analyse exacta d'uma questão mathematica completa.

A solução completa de teda questão mathemafica decompoem-se necessariamente em duas partes de natureza essencialmente differentes. Toda investigação mathematica tendo por fim determinar quantidades incognitas pelas relações que existem entre ellas, e quantidades conhecidas; devemos evidentemente conhecer com precisão as relações existentes entre as quantidades consideradas, esta primeira ordem de investigações constitue a parte concreta da solução; uma vez estas relações determinadas, a questão muda de naturcza, fica então radusida a uma pura questão de numeros, consistindo simplesmente em determinar numeros incognitos, quando se sabe que relações precisas os ligam à numeros conhecidos, é n'esta segunda ordem de investigações que consiste a parte abstracta da solução. D'aqui resulta a divisão fundamental das mathematicas em duas grandes sciencias, as mathematicas abstractas, e as mathematicas concretas. Esta divisão dà-se em todas as questões mathematicas, por mais simples, ou mais complicadas, que sejam. Estas duas partes essencialmente distinctas pelo objecto que se propoem o espirito em cada uma, não o são menos pela natureza das investigações de que se compoem. As mathematicas concretas dependem evidentemente do genero de phenomenos considerados, e devem necessariamento variar quando apresentam-se novos phenomenos: as mathematicas abstractas são completamente independentes da natureza dos objectos examinados, e versam sómente sobre as relações numericas que apresentam. As mesmas relações podem existir em um grande numero de phenomenos differentes, que apesar da extrema diversidade, são considerados pelo mathematico como offerecendo uma mesma questão analytica susceptivel de ser resolvida isoladamente uma só vez. A parte abstracta commum à umas poucas de questões mathematicas, sendo uma vez tractada por occasião d'uma só d'entre ellas, acha-se resolvida para todas as outras, a parte concreta deve pelo contrario ser tractada separadamente em cada questão, sem que a solução de algumas possa fornecer um soccorro directo para a de outras. Não é pois possivel estabelecer verdadeiros methodos geraes, que por uma marcha determinada, e invariavel assegurem em todos os casos a descoberta das relações existentes entre as quantidades relativamente a phenomenos quaesquer; esta materia não è susceptivel senão de methodos especiaes para tal, ou tal classe de phenomenos. Pelo contrarario podemos, seja qual fôr a natureza das quantidades consideradas, estabelecer methodos uniformes, para as dedusir umas das outras, suppondo conhecidas as suas relações exactas. A parte abstracta das Mathematicas è de sua natureza geral, e a parte concreta especial. Esta ultima tem um caracter philosophico essencialmente experimental, physico, ou phenomenal, ao passo que o das mathematicas abstractas è puramente logico, e racional.

Não é aqui o lugar proprio de mostrar o processo empregado pelo espirito humano para descobrir as leis mathematicas dos phenomenos. Mas quer sejam estas leis suggeridas pela observação precisa dos phenomenos, quer sejam, pelo contrario como acontece frequentemente, construidas pelo raciocinio baseado sobre factos mais communs, não podem em caso algum serem consideradas como reaes sem que se mostrem de acordo com os resultados da experiencia directa. Assim a parte concreta de toda questão mathematica é necessariamente fundada sobre a consideração do mundo exterior e não pode jamais, seja qual for a parte do racciocinio, resolver-se por uma simples serie de combinações intellectuaes. A parte abstracta pelo contrario, depois de bem separada, não pode consistir senão n'uma serie de deducções racionaes mais, ou menos prolongada; pois uma vez achadas as equações d'um phenomeno, a determinação d'uma pelas outras das quantidades que n'ellas entram, por mais difficuldades que offereça, é unicamente do dominio do raciocinio. E' a intelligencia que pertence deduzir d'estas equações resultados que são comprehendidos nos dados ainda que de um modo implicito, sem que seja preciso consultar de novo o mundo exterior, cuja consideração é então extranha, e deve ser afastada para reduzir o trabalho á sua verdadeira difficuldade propria. Assim pois a divisão fundamental das mathematicas, em abstractas e concretas é muito natural e profunda. Agora podemos determinar o campo de cada uma destas duas grandes divisões.

1.º Mathematicas abstractas. Quanto as mathematicas abstractas que formam o objecto da primeira divisão da sciencia mathematica, a sua natureza acha-se já clara e exactamente determinada. Compõe-se do que se chama calculo, tomando esta palava na sua maior extensão que abraça todas as operações numericas d'esde as mais simples até as mais sublimes combinações da analyse transcendente. O calculo tem por objecto resolver todas as questões de numeros. O seu ponto de partida é o conhecimento das relações precisas, isto é, a equação entre diversas quantidades que se consideram simultaneamente, o que é pelo contrario o termo das mathematicas concretas. Por mais complicadas ou indirectas que possam ser estas relações o fim da sciencia do calculo é deduzir d'ellas os valores das incognitas por meio das quantidades conhecidas. Esta sciencia apezar de ser a mais perfeita de todas, acha-se ainda pouco adiantada, de modo que o seu fim raramente pode ser conseguido de um modo satisfactorio. Mas este é o seu verdadeiro caracter, para conceber completamente o objecto d'uma sciencia é preciso sempre consideral-a como perfeita. As ideias analyticas como mais simples e geraes devem preceder as que formam o objecto das mathematicas concretas. A analyse é no ponto de vista logico essencialmente independente das mathematicas concretas, que pelo contrario são fundadas sobre ella.

A analyse é pois a verdadeira base racional do systema inteiro dos conhecimentos positivos, constitue a primeira e a mais perfeita das sciencias fundamentaes. As ideias de que se occupa são as mais universaes, as mais abstractas, e as mais simples que o homem pode realmente conceber.

2.º Mathematicas concretas. As mathematicas concretas tendo por objecto descobrir as equações dos phenomenos parecem a primeira vista deverem ser compostas de tantas sciencias distinctas quantas são as cathegorias reaes de phenomenos naturaes. Mas assim não acontece. Estamos muito longe de ter descoberto leis mathematicas em todas as ordens de phenomenos. Na realidade não ha senão duas cathegorias de phenomenos de que se conheça sempre as equações que são, os phenomenos geometricos, e os mechanicos. Assim pois a parte concreta das mathematicas compõe-se só da Geometria, e da Mechanica racional, ou Pheronomia. Na verdade basta isto para dar-lhe um caracter completo de universalidade logica quando consideramos a totalidade dos phenomenos do ponto de vista o mais elevado da philosophia natural. Se todas as partes do universo fossem concebidas como immoveis não haveriam para observar senão phenomenos geometricos, pois que então tudo se reduziria á relações de forma, de tamanho, e de situação, tendo porém tambem em consideração os movimentos, ha lugar para os phenomenos mechanicos. Applicando-se uma consideração philosophica de Blainville generalisada, pode se estabelecer que no ponto de vista statico o universo não apresenta senão phenomenos geometricos, e no ponto de vista dynamico, senão phenomenos mechanicos. Assim pois a Geometria, e a Mechanica constituem por si sós as duas sciencias naturaes fundamentaes, n'este sentido que todos os effeitos naturaes podem ser concebidos como simples resultados necessarios das leis da extensão, e das leis do movimento. Não entraremos em mais particuloridades a respeito d'esta parte das Mathematicas, para nos occupar especialmante da primeira.

MATHEMATICAS ABSTRACTAS.

O fim definitivo das mathematicas concretas é a descoberta das equações que exprimem as leis mathematicas dos phenomenos considerados, e estas equações são o verdadeiro ponto de partida das mathematicas abstractas, que tem por objecto d'ellas deduzir a determinação das quantidades umas por meio das outras. Por tanto é muito preciso ter uma ideia exacta do que se entende por equação; ordinariamente forma-se uma ideia muito vaga da equação, dando-se este nome a toda especie de relação de igualdade entre duas funcções quaesquer das quantidades consideradas. Pois se toda equação é evidentemente uma relação de igualdade, não podemos dizer que toda igualdade seja uma verdadeira equação a que se pode applicar os methodos analyticos. Admittindo-se em geral na definição da equaço todas as especies de funcções não se pode dar a razão da grande difficuldade que se encontra em muitos casos para pôr um problema em equação, difficuldade as vezes igual, ou maior que a da resolução da equação uma vez obtida. Devemos distinguir duas especies de funcções as abstractas, ou analyticas , e as concretas , as primeiras são as unicas que podem entrar na verdadeira equação , de modo que se pode definir de um modo exacto toda equação, como uma relação de igualdade entre duas funcções abstractas das quantidades consideradas. A distincção entre funcções abstractas e concretas pode ser estabelecida de dous modos differentes , a priori , e aposteriori , isto é, caracterisando de um modo geral a natureza propria de cada especie de funcção, e depois fazendo a enumeração effectiva de todas as funcções abstractas conhecidas , ao menos das elementares, de que todas as mais são compostas. A priori as funcções abstractas são aquellas que exprimem entre quantidades um modo de dependencia que se pode conceber unicamente entre numeros sem ser preciso indicar um phenomeno qualquer no qual se realise; pelo contrario são funcções concretas aquellas para as quaes o modo de dependencia expressado, não pode ser definido nem comcebido senão assignalando um caso physico determinado geometrico, ou mechanico, ou ainda de toda outra natureza, no qual tenha effectivamente lugar.

A maior parte das funcções na sua origem foram concretas, assim X^2, e X^3 que são actualmente abstractas, foram á principio concretas, exprimindo as relações da superficie de um quadrado , ou do volume de um cubo, ao comprimento d'um dos lados. Não entraremos aqui no exame das funcções a posteriori , só diremos qne as funcções abstractas hoje conhecidas limitam-se á um pequeno numero , mas que não podemos determinar qual deva ser o seu numero total , podendo-se ainda achar novas. Assim pois , para se estabelecer uma verdadeira equação, é preciso representar as leis mathematicas de um phenomeno por meio de funcções inteiramente compostas do pequeno numero de funcções elementares abstractas conhecidas; é então que o problema torna-se verdadeiramente abstracto , e fica reduzido á uma pura qnestão de numeros, estas funcções sendo as unicas relações simples que sabemos conceber entre numeros considerados em si mesmos.

Agora podemos passar á divisão fundamental das mathematicas abstractas em duas sciencias distinctas , isto é em calculo algebraico, e em calculo arithmetico , tomando estas palavras na accepção logica a mais extensa.

A resolução completa de toda questão de calculo compoem-se de duas partes successivas de natureza essencialmente differentes. Na primeira temos por fim transformar as equações propostas de modo á pôr em evidencia o modo de formação das qnantidades incognitas pelas conhecidas, o que constitue a questão analytica. Na segunda temos em vista avaliar as formulas assim obtidas, isto é determinar immediatamente o valor dos numeros procurados representados já por certas funcções explicitas dos numeros dados, esta é a questão arithmetica.

Vê-se pois, que em toda questão verdadeiramente racional, ella segue necessariamente a questão algebraica de que forma o complemento indispensavel, pois que deve ser conhecida a formação dos numeros procurados antes de se determinar os seus valores effectivos, para cada caso particular, o termo da parte algebraica torna-se o principio da parte arithmetica. O calculo algebraico e o calculo arithmetico differem essencialmente pelo fim que se tem em vista, e não menos pelo ponto de vista em que são consideradas as quantidades; no primeiro tracta-se de suas relações, no segundo de seus valores. O verdadeiro espirito do calculo exige que esta distincção, seja conservada com toda a exactidão, mas por causa da imperfeição do calculo muitas vezes são misturadas, para a solução de um problema, as considerações algebraicas com as arithmeticas. Resumindo pois, a Algebra, pode ser definida como a sciencia que tem por objecto a resolução das equações, o que é uma definição assás extensa, com tanto que se tome estas expressão em toda a sua accepção logica, que significa transformar funcções implicitas em funcções explicitas equivalentes. A Arithmetica pode ser definida como a sciencia que tem por objecto avaliar as funcções. Assim pois as Mathematicas abstractas dividem se em calculo das funcções, ou Algebra, e em calculo dos valores, ou Arithmetica.

1.° Calculo dos valores. O calculo dos valores como mais simples e independente deve preceder o das fnncções; a primeira vista parece que este calculo deve apresentar um campo tão vasto como o da Algebra, pois parece dar lugar a tantas questões distinctas quantas formulas algebraicas differentes se pode conceber como devendo ser avaliadas.

Mas uma simples reflexão basta para mostrar que o dominio do calculo dos valores é por sua natureza infinitamente menos extenso que o do calculo das funcções; porque distinguindo-se as funcções em simples, e compostas, é evidente que sabendo se avaliar as primeiras, a consideração das outras não apresenta difficuldades. No ponto de vista algebraico uma funcção composta é tão importante, e representa uma questão mui differente das que representam as funcções elementares que a constituem, e dahi nascem precisamente as principaes difficuldades analyticas; não é assim na Arithmetica, o numero das operações numericas verdadeiramente distinctas n'esta sciencia, é sómente marcado pelo das funcções abstractas elementares que não passam de 10 pelo mais. A avaliação d'estas 10 funcções dão necessariamente a de todas as funcções em numero infinito que são consideradas na analyse mathematica, ao menos no seu estado actual.

A qualquer formula que possa condusir a resolução das equações, não ha lugar para novas operações arithmeticas senão no caso de se crear um elemento analytico, o que é de muita difficuldade. O campo da Arithmetica, é pois, por sua natureza muito limitado, em quanto que o da Algebra é rigorosamente infinito.

E' preciso porém notar que o dominio desta sciencia é na realidade muito mais extenso do que se poderia pensar pelas obras elementares de mathematicas existentes. Muitas questões verdadeiramente arithmeticas, pois consistem em avaliações de formulas, não são ordinariamente classificadas como taes por ser costume tractal-as como incidentes no meio de um composto de indagações analyticas mais ou menos elevadas: tambem a alta opinião que se faz commummente da influencia dos signaes é uma das razões principaes desta confusão.

Assim, em rigor, não só a construcção de uma taboa de logarithmos como tambem o calculo das taboas trignometricas, são verdadeiramente operações arithmeticas. A resolução das equações numericas que não podem ser resolvidas algebraicamente, e o calculo das integraes definitas de que se ignoram as integraes geraes, fazem realmente parte da Arithmetica, na qual deve ser comprehendido tudo que tem por fim a avaliação das funcções: tambem pertence ao calculo dos valores aquella parte da sciencia que tem o nome de theoria dos nnmeros, este ramo muito extenso por sua natureza, mas de pouca importancia scientifica, tem por objecto descobrir as propriedades inherentes aos differentes numeros em virtude de seus valores independentemente de todo systema de numeração particular, e constitue uma especie de arithmetica transcendente. O dominio da Arithmetica é pois muito mais extensodo que se concebe geralmente; mas no todo das Mathematicas abstractas não é senão um ponto por assim dizer em comparação do calculo das funcções, em que consiste essencialmente a sciencia.

2.° Algebra. Esta sciencia tem por objecto o calculo das funcções, tomando esta expressão n'uma accepção logica, na qual possam ser incluidas todas as questões analyticas d'esde as mais simples até as mais transcendentes, e divide-se em duas sciencias, a analyse algebraica, ou calculo das funcções directas, e a analyse transcendente ou infinitesimal, ou calculo das funcções indirectas. Nada mais diremos oqui sobre esta parte das Mathematicas abstractas que forma o objecto especial de um cempendio que deve seguir a este.

Temos assim mostrado que as Mathematicas dividem-se em abstractas e concretas, e que cada uma d'estas duas sciencias subdivide-se em duas outras, a abstracta em calculo dos valores, e calculo das funcçõoes, as concretas em Geometria, e Mechanica.

$$\text{Mathematicas}\begin{cases}\begin{array}{c}\text{Mathematicas}\\ \text{abstractas}\end{array}\begin{cases}\text{Calculo dos valores}\\ \text{Calculo das funcções}\end{cases}\\[2ex] \begin{array}{c}\text{Mathematicas}\\ \text{concretas}\end{array}\begin{cases}\text{Geometria}\\ \text{Mechanica}\end{cases}\end{cases}$$

ARTIGO 3.°

DA ARITHMETICA.

O calculo dos valores tem por abjecto avaliar as funcções elementares: estas funcções são os differentes modos de formação de numeros que podemos conceber, e a avaliação destas funcções consiste em redusir estes differentes modos de formação á um só uniforme, e primitivo á que se dá o nome de systema de numeração, e então podem ser os numeros, depois de representados assim uniformente, comparados une aos outros, e determinadas as suas relações. A formação e comparação dos numeros é pois finalmente o objecto especial da Arithmetica, que podem ser como todos os mais objectos, considerados em geral, e em particular. Por consideração geral entendemos a que é relativa as leis geraes dos differentes modos de formação de numeros, e à comparação dos numeros em geral: por consideração particular a que se refere as formações especiaes de numeros determinados, e a comparação de numeros particulares, considerados como individualidades, ou aos factos numericos. As leis da formação e comparação de numeros em geral formam o objecto da Arithmetica geral; e as formações especiaes de numeros particulares, ou os factos numericos são o objecto da Arithmetica especial.

Como os factos são necessariamente subordinados ás leis, parece que é mais racional não expôr os factos numericos senão junctamente com as leis geraes da formação e comparação de numeros, e assim a Arithmetica especial ficaria fundida na geral, de modo a não formarem senão uma unica sciencia. Mas para isso seria preciso partir logo no principio da sciencia das noções as mais geraes e abstractas de numeros, e formar as ideias as mais vastas sobre as differentes funcções elementares, que não podem ser adquiridas sem preparação, pois a intelligencia humana não procede do geral para o particular logo no principio de suas investigações, é colligindo os factos um a um que pode chegar as noções geraes, e depois comparando-as descobrir as analogias, e as semelhanças que servem para construir o systema inteiro de uma sciencia, e o methodo proprio para augmentar a extenção de seus principios geraes. Então o espirito elevando-se as considerações as mais geraes, pode facilmente conceber as razões de todos os factos particulares que nenhuma difficnldade mais apresentam. Por este motivo não podemos deixar de fazer preceder a theoria geral das leis das formações differentes de numeros, e de sua comparação uns com os outros, de uma exposição methodica dos factos numericos, ao menos dos mais simples e elementares, e assim a sciencia dos valores tem sido sempre dividida nas sciencias acima mencionadas, a Arithmetica especial é o que se chama vulgarmente Arithmetica simplesmente, a Arithmetica geral tem sido usualmente reunida, e as vezes até confundida, com a sciencia do calculo das funcções directas, debaixo de nome vago de Algebra, que se compoem portanto de dous estudos differentes, o das leis da formação dos numeros, e do calculo das funcções directas.

ARITHMETICA ESPECIAL.

Esta sciencia tem por objecto a avaliação de numeros determinados, representados n'um systema de numeração particular. Em outros termos, a Arithmetica é a sciencia da formação e comparação dos numeros considerados no ponto de vista particular da realisação dos calculos; ou dos factos numericos.

A Arithmetica especial não emprega senão numeros determinados, e todos os seus raciocinios são expressos em lingua usual, pelo contrario na Arithmetica geral, os numeros são considerados como indeterminados ou independentemente de valores particulares, e se faz uso da lingugem symbolica, que se chama algebrica. Pelos dous methodos especial, e geral, podem ser tractadas todas as questões relativas á formação e comparação de numeros, e as duas Arithmeticas não differem senão pelo methodo. O methodo geral é o mais expedito e claro, e o que mais satisfaz o espirito pela generalidade de suas conclusões, e tambem é o unico applicavel as partes mais complicadas da sciencia, que não podem ser aprofundadas pelo methodo especial muito prolixo e confuso, mas por outro lado só pelo methodo especial é que podemos adquirir as primeiras noções de formação de numero. Portanto, a Arithmetica especial não é em rigor senão uma introducção à geral, propria e absolutamente necessaria, para acostumar o espirito pouco a pouco com as combinações numericas, a fim de poder depois elevar-se as noções as mais abstractas, e empregar a linguagem algebrica com vantagem. Esta introducção se limita à parte a mais elementar da Arithmetica. A exposição de um systema particular de numeração, e as quatro operações principaes de sommar, diminuir, multiplicar, e dividir, com numeros inteiros, e fraccionarios, são os objectos verdadeiramente necessarios d'este estudo particular. Todas as mais operações, e todas as propriedades dos numeros, podem ser estudadàs com mais clareza, facilidade, e vigor pelo methodo geral, e só por este ultimo é que podem ser aprofondadas. Mas geralmente se tem achado conveniente fazer entrar na Arithmetica especial uma grande parte da sciencia, e isto com alguma razão, 1.° porque assim se faz uso do simples raciocinio em questões mais complicadas, o que em si è um bom exercicio, e depois passando-se à tractar as mesmas questões pelo methodo geral, no qual podem ser resolvidas com tanta facilidade, aprende-se milhor à fazer uso da linguagem algebraica, e a aprecial-a no seu justo valor. 2.° Por este meio torna-se o estudo da Arithmetica mais util para as applicações aos usos da vida, dando muitas informações sobre os numeros em uma linguagem commum á todos, e podendo entrar assim facilmente na instrucção vulgar da massa dos homens, que não podem fazer um estudo verdadeiramente scientifico do calculo.

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA.

PREFACIO.

Este compendio fazendo parte de uma obra sobre os elementos de todos os ramos das mathematicas puras, poderia ser reduzido á muito menor extensão. Bastaria tratar da parte verdadeiramente essencial da Arithmetica que consiste na exposição de um systema particular de numeração (o decimal por exemplo) e nas demonstrações das regras para fazer as quatro operações numericas fundamentaes, de sommar, diminuir, multiplicar e repartir, numeros inteiros e quebrados, deixando tudo mais para ser tratado por meio da linguagem algebrica, pois a Arithmetica não é propriamente senão uma preparação especial para o calculo geral dos valores. Não procedi, porém, assim, fiz entrar n'esta obra mais do que estes principios elementares e essenciaes; dous motivos me obrigarão a isto; 1.° o desejo de não me afastar muito dos usos recebidos, e de tornar o meu compendio o mais util possivel, servindo até para quem não estuda a sciencia senão em vista de suas applicações aos usos da vida, sem tenção de levar mais adiante os seus conhecimentos mathematicos; 2.° por que tendo n'este trabalho principalmente em vista a parte logica da sciencia, assentei que tratando pelo methodo especial, isto é pelo simples raciocinio, e na linguagem usual, algumas das partes mais complicadas do calculo dos valores, offerecia ás faculdades intellectuaes um util exercicio, pois,como diz o Barão Reynaud,os processos algebricos empregados logo no principio dos estudos mathematicos acostumão os principiantes a se deixarem conduzir cegamente pelo mecanismo das transformações algebraicas, em quanto que as considerações finas e engenhosas que exigem as soluções numericas fortificão o raciocinio, e preparão o espirito para os artificios da analyse. Por estas razões fiz entrar n'este compendio as regras para a extracção das raizes dos dous primeiros gráos e as noções elementares de proporções e progressões, e de Logarithmos, impondo-me a obrigação de não fazer uso senão do simples raciocinio em todas estas demonstrações,ainda que assim se tornassem mais prolixas e complicadas.=

As applicações da Arithmetica ao commercio são consideradas usualmente como devendo fazer uma parte importante dos compendios desta sciencia. Na verdade são de tanta utilidade para todos, que não desapprovo o costume de as fazer entrar na educação geral e preliminar; mas como não podem de modo algum racionalmente fazer parte da sciencia abstracta dos numeros, assentei dever dellas tractar separadamente n'um apendice para que não possão ser confundidas com a parte verdadeiramente scientifica d'este compendio; limitei-me porém neste apendice ás applicações ás mais necessarias.

Um compendio de Arithmetica não pode ter outro merito senão o do methodo que segue na exposição da sciencia. O methodo que adoptei é o que pude colligir da leitura paciente e reflectida das profundas lições de Augusto Comte sobre a philosophia das mathematicas que vem no primeiro tomo da sua obra sobre a philosophia positiva, combinada com a das reflexões judiciosas sobre a sciencia dos numeros que se achão no *System of logic* de John Stuart Mill. Se me compenetrei bem do espirito destes dous eminentes philosophos aos leitores cabe julgar.

A respeito dos theoremas e dos problemas particulares que constituem o todo da sciencia, so tenho á dizer, que tractei de os expôr do modo que me pareceo mais simples, e claro; para isto aproveitei-me com toda a liberdade dos tratados de Arithmetica do Barão Reynaud, de Lacroix, de Bourdon, de Francoeur, de Montferrier, de Hutton, de Bonnycastle, de De Morgan, transcrevendo as vezes o que n'elles se acha. Alem d'estas obras consultei muitas outras, das quaes so apontarei as lições de mathemathicas de Lagrange e Laplace dadas na eschola normal.

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA.

CAPITULO I.

PRINCIPIOS FUNDAMENTAES.

§. 1.°

Noções Geraes.

(1) O nosso objecto redigindo este compendio não é unicamente ensinar a contar; é tambem e principalmente, fazer ver a rasão de todas as combinações, que podemos formar com as noções de quantidade, e numeros: para este fim é preciso remontar á certas observações philosophicas sobre as bases fundamentaes da Arithmetica.

(2) Quando se principia o estudo das mathematicas ja se tem adquirido as ideias de quantidade e numeros; ja se sabe fazer muitos raciocinios relativos aos numeros; ja se sabe ajuntar um numero á um outro, ou tirar de um numero maior um, menor. Tudo isto se aprende nos nossos primeiros annos, e quase que espontaneamente uma criança antes de saber ler, jà sabe que dous com dous são quatro. Seria pois perda de tempo querer aqui mostrar como adquirimos todas estas ideias e como aprendemos a contar pelos dedos, depois por pedri-

nhas, e finalmente por palavras e algarismos. Para mais facil intelligencia] do que temos a dizer adiante daremos aqui a definição de certos termos que temos de empregar frequentemente.

1. Quantidade è tudo aquillo, que é susceptivel de augmento e diminuição.

2. A unidade é um objecto qualquer tomado para termo de comparação de todos os objectos da mesma especie. Seria impossivel ter uma ideia exacta do tamanho das quantidades da mesma especie, se não se escolhesse entre ellas uma certa quantidade, como servindo de unidade. A unidade é o que è opposto á muitos, e á diversos, é o elemento de que consideramos compostas as quantidades. Esta unidade è uma quantidade arbitraria adoptada por convenção, e é ella mesma susceptivel de ser dividida em partes; assim pois não ha unidade absoluta, todas são relativas.

3. Um numero é a reunião de muitas unidades da mesma especie, e do mesmo tamanho. O numero exprime quantas unidades contém uma quantidade.

4. Um numero chama-se abstracto, quando é composto de unidades abstractas, isto é, de unidades, que não se referem á um objecto determinado. Um numero è concreto quando é composto de unidades concretas, isto é, que se referem à um objecto determinado; por exemplo: seis, è um numero abstracto; cinco cavallos um numero concreto.

5. Dous numeros, ou duas quantidades são iguaes, quando contém o mesmo numero de unidades da mesma especie.

(3) Todas as sciencias nada mais são do que uma collecção de factos, e uma serie de raciocinios relativos à um objecto determinado. As sciencias são formadas pelo emprego de nossas faculdades intellectuaes sobre os phenomenos da natureza; a primeira faculdade, de que fazemos uso è a de observação, por meio d'ella formamos todas as ideias provenientes das impressões, que os corpos fazem sobre nossos sentidos, isto è, todas as ideias relativas ás propriedades materiaes dos diversos sères, que nos affectão. Depois por meio das faculdades superiores de meditação formamos inducções, e tiramos consequencias, ou deducções. Por meio das inducções, formamos as ideias geraes ou abstractas; por meio das deducções tiramos todas as consequencias logicas das nossas ideias geraes.

(4) A Arithmetica, como todas as mais sciencias consta de observações, de inducções, e de deducções. As observações sobre que se funda são mui poucas e mui simples; logo nos nossos primeiros annos recebemos todas as impressões necessarias para formar as ideias de quantidade, de numero, de unidade, e de pluralidade. Ideias mui simples, que devemos á observação immediata dos seres da natureza. As difinições dos numeros são os factos primitivos, que servem de base á Arithmetica.

As inducções tambem são poucas e faceis, limitão-se á formação de certas ideias geraes, á que damos o nome de axiomas. Os axiomas são verdades relativas aos numeros, e ás quantidades, á que assentimos logo que nos são apresentadas, e que servem de premissas á todas as deducções e estas formão todo o corpo da sciencia.

A deducção é uma operação intellectual, pela qual de uma verdade evidente, ou previamente demonstrada, tiramos conclusões, e consequencias.

(5) As deducções dão origem á um grande numero de verdades, que são consequencias dos factos, e dos axiomas.

Estas verdades tomão o nome de Theoremas, quando são a demonstração de uma verdade por meio de deducções feitas de verdades ja provadas.

Tomão o nome de Problemas, quando o fim é demonstrar, que podemos fazer uma cousa, uma operação qualquer.

A's vezes para podermos provar uma verdade, precizamos de provar uma outra, que só serve para chegarmos ao conhecimento da primeira; estas verdades incidentes chamão-se *Lemmas.*

Uma verdade, que é uma consequencia immediata e evidente de uma outra chama-se corollario.

Da-se o nome de Scholio à uma proposição, que não abraça uma doctrina particular ao systema, mas que é uma noticia util ainda que não necessaria. As observações e notas explicão ou confirmão ainda mais a proposição principal.

(6) A arithmetica pois é uma sciencia essencialmente deductiva. Mas como não é possivel, que uma sciencia seja toda inteira devida ás deducções, pois estas precisão de uma base, que não pode ser senão verdades adoptadas pela observação e inducção, a Arithmetica parte das definições de numeros e dos axiomas; assim pois, ainda que as observações e as inducções n'esta sciencia sejão mui poucas e simples não

podemos proceder methodicamente sem tractar das definições de numeros, que são os factos, que a Arithmetica deve á observação; e dos axiomas, que são as verdades fundamentaes, que deve à inducção, e que servem para provar todos os theoremas, e problemas relativos aos numeros, antes de passar á tractar de todas as operações arithmeticas.

---

§ 2.°

Definição e nomenclatura dos numeros.

(7) As definições de numeros, como todas as mais definições, são compostas de duas cousas; a explicação de um nome, e a asserção de um facto.

A ultima é unicamente a que pode servir para formar os principios, ou as premissas de uma sciencia. O facto asseverado na definição de um numero é um facto physico. Cada um dos numeros—dous, tres, quatro etc, denota um phenomeno physico, e indica uma propriedade d'este phenomeno. *Dous*, por exemplo, denota um aggregado de dous objectos da mesma especie; *doze* um aggregado de doze objectos da mesma especie; o que faz, que estes dous aggregados sejão differentes um do outro, é alguma cousa de physico; pois não podemos negar, que duas laranjas são physicamente differentes de tres laranjas, dous cavallos de um, e assim por diante; são phenomenos tangiveis e visiveis, mui differentes. Não é o lugar aqui de mostrar em que differem; basta, que se reconheça, que existe uma differença, que pode ser apercebida pelos sentidos. E' verdade, que cento e dous cavallos, por exemplo, não se distinguem tão facilmente de cento e tres, como dous cavallos distinguem-se de tres.

Apesar de que no maior numero de posições os sentidos não possão perceber esta differença, com tudo podem ser collocados de tal modo, que uma differença seja perceptivel; de outro modo nunca teriamos distinguido estes dous numeros differentes de cavallos, e lhes dado nomes particulares. O peso é reconhecido por todos como uma propriedade physica das cousas; entre tanto, differenças pequenas entre grandes pesos são tão imperceptiveis aos sentidos na maior parte das situações, como pequenas differenças entre grandes numeros, e só podem ser postas em evidencia, collocando os dous objectos em posições particulares, como por exemplo, nos braços oppostos de uma balança delicada.

(8) O nome de um numero, pois, denota evidentemente alguma propriedade pertencente á agglomeração de cousas, que appellidamos por esse nome, e esta propriedade é a maneira caracteristica, em que é formada de partes e pode ser separada em partes.

(9) Quando chamamos uma collecção de objectos dous, tres, ou quatro, não são dous, tres, ou quatro em abstracto; são dous, tres ou quatro cousas de alguma especie particular; pedras, cavallos, pollegadas, libras, etc. O que o nome indica é o modo porque os objectos singulares da especie dada devem ser reunidos para produzir aquelle aggregado particular. Se o aggregado é de pedras, e que o chamamos *dous*, este nome exprime, que para compôr o aggregado è preciso unir uma pedra com mais outra; se o chamamos *tres*, queremos dizer que uma, mais uma, mais uma pedra devem ser reunidas para constitui-lo; ou que uma pedra deve ser reunida á um aggregado de pedras chamado dous, ja existente. O aggregado á que chamamos *quatro* tem ainda um maior numero de modos de formação, uma, mais uma, mais uma, e mais uma pedra podem ser reunidas para forma-lo, ou dous aggregados de duas pedras cada um, ou uma pedra com um aggregado de tres pedras. Cada numero successivo na serie ascendente póde ser formado pela união de numeros menores n'uma variedade de modos progressivamente maior. Limitando as partes á duas, um numero pode ser formado, e pode ser separado em tantos modos differentes, quantos são os numeros menores do que aquelle, que consideramos; e admittindo tres, quatro partes, cada numero pode ser formado de um muito maior numero de modos differentes. Outro modo de chegar ao mesmo aggregado è aquelle pelo qual o obtemos não pela união de menores aggregados, mas pelo desmembramento de maiores. Por exemplo, tres pedras è um aggregado, que pode ser formado tirando uma de um aggregado de quatro, e assim por diante.

(10) Todas as proposições arithmeticas, todos os resultados de operações arithmeticas, nada mais são, do que a exposição de um dos modos de formação de um numero dado.

Affirmão, que um certo aggregado póde ser formado, ajuntando certos outros aggregados, ou separando certas porções de um aggregado; e por consequencia, podemos reproduzir estes aggregados invertendo o processo. Tudo, pois, que fazemos em Arithmetica, é formar numeros pela reunião ou pela separação de outros.

Quandô dizemos, que o quadrado de quatro é dezeseis, o que affirmamos é que, se tivermos um numero sufficiente de pedrinhas, ou de qualquer outro objecto, e ajuntarmos estas pedrinhas em aggregados de quatro cada um, e tornarmos a pôr estes aggregados juntos tambem por quatro, os quatro aggregados de quatro pedras cada um formarão o aggregado que chamamos dezeseis, isto é, um aggregado composto de um aggregado de dez pedras, e outro de seis pedras, unidos em um só. A proposição inversa, que quatro è a raiz quadrada de dezeseis, assevera, que o aggregado dezeseis póde ser separado em quatro aggregados de quatro pedras cada um.

(11) Os modos de formação dos numeros são infinitos, podemos formar um mesmo numero de muitos modos differentes; mas quando conhecemos um modo de formação para cada um dos numeros, todos os outros modos podem ser obtidos por deducção.

(12) Bastará pois escolher um dos diversos modos de formação de cada numero, para servir de meio de determinação para todos os outros. Como as cousas uniformes e simples são mais facilmente recebidas, e conservadas no entendimento, é de grande vantagem escolher um modo de formação, que seja o mesmo para todos os numeros, e fixar a significação dos nomes dos numeros sobre um principio uniforme.

(13) O modo por que foi concebida a nossa nomenclatura de numeros possue esta vantagem, e com mais esta, que mostra dous modos de formação do mesmo numero. Cada numero é considerado, como formado pela addicção de uma unidade ao numero immediatamente inferior em tamanho, e este modo de formação é indicado pelo logar, que occupa o numero na serie; e cada numero é tambem formado pela addição de um numero de unidades inferior à dez, e um numero de aggregados cada um igual a um certo numero de dez unidades, e este modo de formação se exprime pelos nomes e pelos algarismos.

(14) Os numeros sendo aggregados de unidades, isto é, de muitas cousas da mesma especie, ou de muitas partes distinctas e iguaes da mesma cousa, a maneira mais natural de os formar, é de unir uma unidade com outra, e depois com mais outra etc, continuando assim, podemos formar aggregados de unidades representadas por nomes particulares. Assim pois a reunião de uma unidade com outra toma o nome de dous, da reunião de dous com uma unidade, formamos o numero á que damos o nome de tres, etc.

(15) Como nada limita o tamanho ao qual se pode elevar um numero, pois que podemos sempre, por maior que seja um numero, ajuntar-lhe uma unidade, concebe-se, que existe uma infinidade de numeros differentes, e que seria impossivel expressal-os todos por nomes particulares á cada um, e quando isto fosse possivel não se poderia conservar na memoria, este numero infinito de palavras isoladas e independentes umas das outras. Para obviar á este inconveniente foi preciso inventar um modo artificial de representar todos os numeros por meio de alguns nomes invariaveis, derivados uns dos outros, por qualquer analogia, d'onde resultou o que se chama systema de numeração. O systema de numeração geralmente adoptado, é o decimal, outros poderião ser adoptados, a escolha é arbitraria: o systema decimal, porém, tem sido universalmente preferido, o que não se explica, senão pelo numero dos dedos, que são dez, e que forão os instrumentos dos primeiros calculos dos homens, como ainda o são hoje, quando principiamos á contar.

(16) O grande objecto, que queremos conseguir pela numeração, é representar um numero qualquer por meio de outros numeros, que consideramos, como simples, ou como dados immediatamente, e que expressamos por meio de palavras particulares, que são os nomes d'estes numeros. Dando se pois um nome particular aos nove primeiros numeros, podemos no systema decimal, representar um numero qualquer, adoptando certas convenções.

Os numeros simples são, um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. Só com estes numeros podemos expressar todos por maiores que sejão, fazendo-se as seguintes convenções; nove e mais uma unidade formão um numero á que se dà o nome de dez, e então podemos fazer d'este numero uma nova unidade á que damos o nome de dezena. Dez com mais dez formão um numero composto de duas dezenas á que chamamos vinte, palavra, que indica dous dez; vinte ou dous dez, com mais uma dezena formão um numero composto de tres dezenas chamado trinta, ou tres dez, o que evidentemente indica pela sua derivação da palavra tres: as collecções, que formamos de quatro, cinco, seis, sete, oito, nove dezenas, tomão os nomes de quarenta, cincoenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa.

Para indicar os numeros, que ficão entre dez e vinte, vinte e trinta etc, e que são compostos de um certo numero de dezenas com mais um certo numero de unidades simples, empregamos os seguintes termos formados pela união dos nomes das dezenas, com os das unidades. Assim, principiando por dez, que è o nome do aggregado de dez unidades, e ajuntando-lhe uma, duas, tres, etc. unidades, temos os seguintes nomes para expressar os numeros, que ficão entre dez e vinte; dez um, dez dous. dez tres, dez quatro, dez cinco, dezeseis, dezesete, dezoito, dezenove: na lingoagem usual os cinco primeiros tomão os nomes seguintes, onze, doze, treze, quatorze, quinze; estes nomes são irregulares, mas pelas suas etymologias vemos, que são modos abreviados de dizer dez um, dez dous etc.; de deseseis para cima a nossa nomenclatura dos numeros é regular; assim dizemos vinte um, vinte dous, vinte tres etc....trinta e um, trinta e dous etc, trinta e nove... noventa e um, noventa e dous etc noventa e nove.

Este ultimo numero è composto de nove dezenas e nove nnidades; ajuntando-se-lhe mais uma unidade temos um numero composto de dez dezenas; para este numero adoptamos um nome particular, que é cem; de cem fazemos uma nova unidade, chamada centena, e os numeros superiores indicão-se dizendo, cento e um.... cento e dous .... cento e vinte.... cento e noventa....cento e noventa e nove, isto é ajuntando á cem os nomes das dezenas e das unidades. O numero cento e noventa nove é composto de uma centena, nove dezenas e nove unidades; ajuntando-lhe mais uma unidade temos um aggregado de duas centenas; á este numero damos o nome de duzentos, e à este numero ajuntamos os nomes das dezenas e das unidades, até chegar ao aggregado de tres centenas, á que damos o nome de trezentos; o numero composto de quatro centenas chama-se quatrocentos, e os de cinco, seis, sete, oito, nove centenas, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos, novecentos. Depois de contarmos até novecentos e noventa e nove, ajuntando á este numero mais uma unidade, temos o aggregado de dez centenas, à que damos o nome de mil, e fazemos d'este numero uma nova unidade, chamada milhar, e contamos então de mil até mil milhares; d'este numero fazemos ainda uma nova unidade á que damos o nome de milhão, e contamos por milhões até chegar à mil milhões; e então formamos uma outra unidade á que dámos o nome de bilhão; mil bilhões toma o nome de trilhão; mil trilhões o de quatrilhão, e assim por diante ao infinito.

Algumas pessoas dão os nomes de bilhão, trilhão, etc, não á mil milhões, e mil bilhões, etc., mas à um milhão de milhões, e á um milhão de bilhões.

(17) Cada uma das collecções designadas precedentemente, é considerada, como formando uma unidade de uma ordem, de mais á mais elevada, à medida, que se compõe de mais unidades simples; assim pois, considerando as unidades simples como da primeira ordem, as desenas são da 2.ª ordem, a, centenas da 3.ª ordem, os milhares da 4.ª ordem, as desenas de milhares da 5.ª, as centenas de milhares da 6.ª, os milhões da 7.ª etc; dando-se um nome novo ás unidades, que ficão distantes umas das outras de 4 em 4 lugares, e repetindo nos intervallos os nomes das unidades simples, das desenas e das centenas. Os numeros expressados por esta fórma decompoem-se em varias collecções ou ordens de unidades quando na enunciação delles entrão mais de uma palavra; por exemplo o numero, que exprimimos por oito mil setecentos e quarenta e cinco, é composto de oito milhares, sete centenas, quatro dezenas, e cinco unidades simples.

(18) Por mais simples que seja esta nomenclatura, quando queremos combiner entre si dous ou mais numeros consideraveis, achamos grandes embaraços, e complicações.

Para evitar este inconveniente forao inventados os algarismos, que são certos signaes adoptados para representarem os numeros.

Jà mostramos, que para enunciar qualquer numero era bastante dar nomes particulares á certos numeros elementares, e á certas combinações d'estes numeros. Do mesmo modo adoptando signaes particulares para os numeros elementares, e certas convenções, podemos representar um número qualquer em algarismos.

O numero dos signaes, as suas formas, e as convenções relativas á combinação d'estes signaes, são cousas arbitrarias;

adoptando a numeração decimal, podemos representar todo e qualquer numero com só dez signaes, e mesmo em rigor com nove.

(19) Os algarismos geralmente empregados são dez. Devemos esta invenção aos Indios, que a communicarão aos Arabes, e estes aos Europeos na idade media: alguns antiquarios querem, que tenhão sido conhecidos dos Gregos; em todo o caso só depois de nossas relações com os Arabes é que forão geralmente empregados; os antigos nunca fizerão uso d'elles, ou entaõ só os empregarão nas suas especulações methaphysicas, e isto mesmo só na eschola de Pythagoras

Em poucas palavras podemos explicar este systema de notação. Os nove seguintes signaes ou algarismos, são empregados para significarem os nove primeiros numeros, que no systema decimal são os elementos da numeração.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
um,	dous,	tres,	quatro,	cinco,	seis,	sete,	oito,	nove.

Para com estes signaes representar um numero qualquer basta fazer as seguintes convenções.

1.° Os numeros maiores, que nove não tem signaes particulares; são representados collocando os signaes á cima ao lado uns dos outros, e concordando em que o primeiro signal á direita conserve o valor, que representa quando isolado; que o 2.° a esquerda signifique dez vezes mais do que quando isolado; que o 3.° signifique cem vezes mais do que quando isolado; o 4.° mil vezes mais, e assim por diante. Por outra; cada um dos signaes escriptos isoladamente representa unidades simples; á esquerda de um outro, dezenas; no 2.° logar a esquerda, centenas; no 3.° milhares; no 4.° dezenas de milhares etc. Podemos suppôr o papel em que escrevemos os numeros como dividido em columnas verticaes, e numeradas á principiar pela direita.

9	8	7	6	5	4	3	2	1
							5	6
						1		4
						7		
			5	2	8			

e considerando cada algarismo escripto n'uma d'estas columnas, como representando unidades, que são em cada columna dez vezes maiores, que as unidades da columna, que lhe fica á direita; a primeira columna á direita é a das unidades simples.

Assim para escrever o numero cincoenta e seis devemos escrever 56; isto é, 6 na primeira columna, onde representa seis unidades, e 5 na segunda onde representa cinco dezenas. Se tivermos de escrever o numero cento e quatro, devemos pôr na 1.ª columna 4, e 1 na 3.ª columna; mas como não riscamos sempre o papel foi preciso inventar um meio de mostrar, que um figurando cem no numero cento e quatro acha-se na 3.ª columna, porque escrevendo 14, o algarismo 1 fica não na 3.ª columna, mas na 2.ª e exprimiriamos não cento e quatro, mas quatorze. Para evitar este embaraço foi inventado o signal — 0 — que chama-se cifra, ou zero, e que nenhum valor tem por si mesmo, mas que serve para nos livrar do trabalho de riscar o papel, e para mostrar pelo logar, que occuppa em que columna achão-se os algarismos significativos; e assim escrevemos 104 para representar o numero cento e quatro, e a cifra só serve para mostrar, que 1 está na 3.ª e não na 2.ª columna, e que na 2.ª nada ha.

3.º Quando um numero é composto de um numero exacto de dezenas, centenas, milhares, etc, devem os pôr tantas cifras á direita, quantas são precisas para que o signal que representa o numero fique na columna, que deve occupar.

Por exemplo.

Cincoenta, ou cinco dezenas. . . .	50
Setecentos, ou sete centenas. . . .	700
Quinhentos e vinte oito mil. . . .	5.28000

Sem as cifras estes numeros serião confundidos com 5, cinco, 7, sete, e quinhentos e vinte oito, 528.

4. Uma cifra no meio de um numero torna-se necessaria, quando qualquer das denominações como dezenas, centenas etc faltão. Uma ou mais cifras á esquerda de um numero não altera o seu valor 025, é o mesmo que 25, a cifra so mostrando, que não ha centenas, o que ja era evidente.

5.° Cada cifra, que se põe á direita de um numero o torna dez vezes maior; por exemplo 2, representa dous, 20, vinte, 200 duzentos etc.

(20) Agora resta-nos mostrar como podemos pôr em algarismos um numero expressado em palavras, e pelo contrario enunciar em palavras um numero dado em algarismos.

1.° Escrever em algarismos um numero expressado em palavras. Todo numero, que se enuncia compõe-se de unidades simples, de dezenas, de centenas, etc, e a collecção de unidades de cada ordem não pode passar de nove; no caso em que o numero não tenha unidades de certas ordens, temos um signal para occupar o logar d'ellas. Assim pois não ha um sò numero, que não se pessa escrever empregando os signaes, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Seja o numero, que queremos escrever em algarismos o seguinte; oito bilhões e cincoenta e seis milhões duzentos e trinta mil e quatro.

Este numero tem unidades simples 4, dezenas não tem, centenas não tem, milhares não tem; dezenas de milhar 3, centenas de milhar 2, milhões 6, dezenas de milhões 5, centenas de milhões não tem, bilhões 8. Assim pois pondo estes signaes por ordem teremos a seguinte expressão, que representará o numero enunciado 8056230004.

Todo numero escripto em algarismos divide-se em centenas, dezenas, e unidades simples; em centenas, dezenas, e unidades de milhares, em centenas, dezenas e unidades de milhões etc, etc; isto é em secções de unidades simples de milhares, de milhões, de bilhões, e cada uma d'estas secções exprime-se por tres algarismos, excepto a ultima à esquerda, que póde constar só de um, ou dous algarismos.

Depois de se estar habituado á escrever os numeros de tres algarismos basta escrever successivamente uns depois dos outros da direita para a esquerda a secção das unidades, dos milhares, dos milhões &c. Póde se principiar á escrever pela esquerda, isto é, escrever primeiro a secção das unidades as mais elevadas, depois á sua direita as outras em successão por ordem ao tamanho das unidades; e é este o modo de escrever em algarismos um numero dictado por outra pessoa em voz alta.

E' bom para os principiantes exercerem-se escrevendo em algarismos numeros dados em palavras.

2.º Traduzir em palavras um numero escripto em algarismos. Para este fim devemos dividir o numero em secções de trez algarismos cada uma, principiando pela direita, e depois enunciar em palavras successivamente cada uma das secções partindo da esquerda, e dando à cada secção o nome, que lhe convém.

Seja por exemplo o numero, que queremos enunciar em palavras, o seguinte.

789098465432101234567892.

Dividindo este numero em secções de trez algarismos cada uma podemos representa-lo assim;

sextilhões,	*quinquilh*	*quatrilh.*	*trilhões,*	*bilhões,*	*milhões,*	*milhares,*	*unid.*
789,	098,	465,	432.	101,	234,	567,	892

lemos então assim: setecentos e oitenta e nove sextilhões, noventa e oito quintilhões, quatrocentos e sessenta e cinco quatrilhões, quatrocentos e trinta e dous trilhões, cento e um bilhões, duzentos e trinta e quatro milhões, quinhentos e sessenta e sete mil, oitocentos e noventa e dous.

Quando um bilhão, um trilhão &c, significão um milhão de milhões um milhão de bilhões, &c. de mil para cima conta-se não por milhares, mas por milhões; e então devemos dividir os numeros em secções de seis algarismos passadas as duas primeiras secções à direita que ficão sempre sendo de tres algarismos.

O numero ácima é enunciado então d'este modo

trilhões	bilhões	milhões	milhares	unidades
789098,	465432,	101234,	567	892

dizemos setecentos e oitenta e nove mil e noventa e oito trilhões, quatrocentos e sessenta e cinco mil quatrocentos e trinta e dous bilhões, cento e um mil duzentos e trinta e quatro milhões, quinhentos e sessenta e sete mil, oitocentos e noventa e dous.

Assim pois, as palavras bilhão, trilhão &c., n'estes dous modos de contar significão numeros de valores mui differentes, e são palavras ambiguas. O primeiro systema é o que adoptão os mathematicos Francezes, e o segundo o adoptado pelos Inglezes.

(21) A numeração escripta dos Romanos era differente da que empregamos. Representavão de um modo muito irregular certos numeros por meio das letras do alphabeto, e fazião uso de uma decomposição muito variavel para expressar todos os outros numeros. A convenção, que serve de base á este systema de notação, consiste em que, os valóres indicados por duas letras consecutivas devem ser sommados, quando a da direita indica um numero menor que o da esquerda, e diminuidos no caso contrario. Esta notação é muito incommoda para calcular, e nunca d'ella nos servimos para este fim; mas é empregada frequentemente de um modo isolado para exprimir certos numeros de ordinação, e arranjo, e por isto é bom conhece-la.

I significa	um	C significa	cem.
V »	cinco.	D ou IↃ	quinhentos.
X »	dez.	M ou CIↃ	mil.
L »	cincoenta.		

Com estes caracteres representão-se todos os numeros' combinando-os de diversos modos, e seguindo as convenções acima mencionadas.

1. Repetindo estas letras, expressamos os seguintes numeros.

II	III	IIII	XX	CC	CCC	MM	etc.
2	3	4	20	200	300	2000.	

2. Ajuntando á direita uma letra representando um numero menor exprimimos a somma dos valores das duas letras.

VI	VII	VIII	XII	XIII	XV	XVI	XVII.
6	7	8	12	13	15	16	17.

XVIII	LX	LXX	DC	etc.
18	60	70	600.	

3. Pondo uma letra de menor valor á esquerda de uma outra, as duas representão o valôr da maior diminuido do da menor.

IV IX XL XC CD etc.
4 9 40 90 400.

4. Um risco por cima de uma d'estas letras da-lhe um valor mil vezes maior por exemplo.

$\bar{X}$ quer dizer 10,000; $\bar{V}$ 5,000; $\bar{L}$ 50,000 etc.

5. A figura IↃ quer dizer 500, e ajuntando-se-lhe um ou mais Ↄ cada um d'estes Ↄ, faz crescer o valor dez vezes; por exemplo, IↃↃ representa 5000, IↃↃↃ 50000; CIↃ representa mil, e para cada C e Ↄ que, lhe ajuntamos o numero é multiplicado por 10; por exemplo; CCIↃↃ representa 10000, CCCIↃↃↃ representa 100000.

(22) Os gregos servião-se das 9 primeiras letras do alphabeto para representarem os 9 primeiros numeros, das 9 seguintes para representarem as dezenas, das 9 seguintes para representarem centenas.

Os milhares denotavão por um !

Além d'esta notação usual tinhão outra empregada pelos mathematicos, que era a seguinte: os nove primeiros numeros erão representados pelas nove primeiras letras do alphabeto, e n'esta parte era a mesma que a notação usual; para representar as dezenas punhão um accento sobre estas mesmas letras; para representar centenas dous accentos etc. Este systema não differe do nosso, senão pela falta da cifra, que era substituida pelo accento.

(23) Muitas vezes, temos de raciocinar sobre os numeros em geral, e as propriedades que pertencem á um numero seja elle qual for. Para este fim pode-se representar um numero, seja qual for o seu valor, por um signal arbitrario qualquer. Por exemplo podemos considerar uns poucos de saccos, cada um contendo um numero qual for de moedas de ouro, e podemos, sem saber quantas moedas tem os saccos, representar por um signal um numero de moedas incognito, por exemplo, pelas letras do alphabeto, e raciocinar sobre o numero que cada um representa por meio d'estes signaes; ajuntar um sacco á um outro, e dizer, que contem A mais B moedas, A representando o numero de moedas, que contem um sacco, e B, o numero de moedas, que contém o ou-

tro. Este modo de representar os numeros é de grande importancia, e facilita muito o estudo das propriedades dos numeros; a Algebra faz uso constante d'esta linguagem.

(24) Para completar a notação arithmetica ainda temos que explicar certos symbolos empregados para indicar as operações arithmeticas.

Todas as operações arithmeticas reduzem-se á formação de um numero, ajuntando á uma unidade, ou á um aggregado de unidades uma outra unidade, ou aggregado de unidades; ou então tirando de um aggregado de unidades, uma unidade, ou uma collecção de unidades. Para podermos formar todos os numeros possiveis basta que nos seja concedido 1.°, que uma quantidade possa ser ajuntada à uma outra, um numero á um outro, 2.°, que de uma quantidade maior se possa tirar uma menor, de um numero maior, outro menor.

1.° Pela numeração ajuntamos á um numero qualquer uma unidade, e formamos o numero seguinte: por exemplo: 5 com mais 1 são 6, e 6 com mais 1 são 7 etc.

A operação de sommar não é senão a mesma numeração, quando em lugar de ajuntar à um numero uma unidade, ajuntamos umas poucas; por exemplo, quando ajuntamos ao numero 5 o numero 7, formamos uma somma, ou uma addição, e o numero, que resulta da reunião destes dous numeros, chama-se a somma.

Empregamos o signal + para indicar esta operação; e quando queremos mostrar que 15 tem de ser ajuntado á 38, escrevemos 15+38; e dizemos 15 mais 38.

2.° Assim como ajuntando á um numero uma unidade obtemos o numero seguinte, do mesmo modo tirando de um numero uma unidade, obtemos o numero, que fica atráz na serie da numeração; esta operação pode ser chamada denumeração pois é o contrario da numeração desfazendo o que esta faz, e podemos sempre tirar de um numero uma unidade depois outra &c., e assim obtemos todos os numeros em uma ordem opposta á da numeração, isto é, de maior para menor, em vez de menor para maior. A subtracção é uma denumeração feita logo de uma só vez, tirando de um numero umas poucas de unidades: subtrahir pois é tirar de um numero umas poucas de unidades, ou um outro numero; o resultado d'esta operação chama-se differença. O signal — indica a subtracção; 64—12, quer dizer que de 64 devemos tirar 12, e dizemos 64 menos 12.

3.º Se em vez de ajuntarmos á um numero um outro numeros ajuntamos á este numero o mesmo numero, teremos uma somma em que o mesmo numero entra duas vezes; se ajuntarmos á esta somma ainda o mesmo numero teremos uma somma em que entra tres vezes.

Assim em lugar de dizer, que sommamos o mesmo numero duas trez, etc vezes, empregamos uma outra palavra, e dizemos, que multiplicamos o numero por um outro numero. Multiplicar um numero pois è ajuntar este numero á si mesmo um certo numero de vezes; por exemplo, multiplicar quatro por tres é sommar quatro, tomado tres vezes.

O numero, que se toma para multiplicar chama-se multiplicando, o numero de vezes, que tem de ser tomado chama-se multiplicador, e tanto o multiplicando, como o multiplicador, chamão-se factores; o resultado da multiplicação, ou a somma total, chama-se producto; 3 multiplicados por 5 quer dizer, que devemos achar a somma de tres tomados 5 vezes.

O signal $\times$ indica a multiplicação: 9×8, quer dizer, 9 multiplicado por 8, e dizemos 9 multiplicado por 8; o resultado d'esta operação é o producto de 9 por 8.

4.º Podemos tirar, subtrahir de um numero dado qualqer outro numero dado, e depois do resto o mesmo numero, e do 2.º resto ainda o mesmo numero, e assim por diante; esta subtração sucessiva do mesmo numero de um outro é o que se chama divisão: assim podemos do numero 60 tirar 20, depois mais 20, e ainda mais 20; e isto é, dividir 60 por 20, e por este meio podemos saber, quantas vezes 20 é contido em 60. O numero, de que se subtrahe chama-se dividendo, o numero que se subtrahe chama-se divisor; e o numero de vezes, que é possivel subtrahi-lo do primeiro chama-se quociente. A divisão é o contrario da multiplicação, e serve tambem para repartir um numero em um certo numero de partes iguaes.

O signal $\div$ entre dous numeros, ou um risco separando dous numeros, um por cima do risco outro por baixo indica a divisão. Por exemplo $6\div2$, ou $\frac{6}{2}$, quer dizer 6 divididos por 2; e exprime o quociente de 6 por 2, ou 6 repartido em duas partes iguaes. Enuncia-se 6 dividido por 2.

5.º Um numero tambem póde ser formado pela multiplicação de um numero por si mesmo uma, duas, tres vezes, ou pela multiplicação de dous, tres, etc factores iguaes, então chama-se esta operação involução, e o resultado uma potencia, 2.ª po tencia, 3.ª potencia etc quando os factores iguaes são dous, tres etc. Para exprimir esta operação escreve-se por cima do numero e á direita um numero, que indica quantas vezes o primeiro deve ser tomado, como factor; á este numero dá-se o nome de expoente. Por exemplo 4×4 é a 2.ª potencia de 4, e escreve-se 4^2; $2\times2\times2$ é a 3.ª potencia de 2, e escreve-se 2^3.

6.º Chama-se raiz de um numero aquelle que elevado á uma certa potencia produz o numero proposto. Achão-se as raizes por meio de uma operação opposta á da involução á que se dá o nome de evolução ou extracção de raizes. O signal que indica esta operação, é $\sqrt{}$ e lê-se a raiz de; o signal $\sqrt{}$ deve ser acompanhado de expoente, que indique o gráo. Por exemplo 3 é a raiz 3.ª de 27, e devemos representa-la por $\sqrt[3]{27}$.

As 2.ª e 3.ª potencias de um numero chamão-se o quadrado, e o cubo d'este numero; e as raizes 2.ª e 3.ª raizes quadrada e e cubica

7.ª Quando queremos indicar, que um numero è igual á outro empregamos o signal $=$ posto entre os dous numeros, ou as duas quantidades iguaes. Por exemplo $3+2=5$, quer dizer $3+2$ igual á 5.

Uma expressão d'esta especie chama-se uma igualdade; o que fica á esquerda do signal, denomina-se primeiro membro, e o que fica á direita 2.º membro.

8.º Quando queremos indicar, que uma quantidade ou um numero é maior ou menor que outro, fazemos uso do signal $>$ ou $<$ entre os dous numeros; havendo sempre a cautela de collocar a abertura do signal para o lado da quantidade maior. Por exemplo $6>4$ quer dizer que 6 é maior que 4, e $3<8$ quer dizer que 3 é menor que 8.

9.º Quando empregamos para representar numeros em lugar de algarismos as letras do alphabeto, o que fazemos quando queremos expressar um numero em geral (veja 23), alem d'estes signaes e termos acima explicados fazemos uso de mais dous termos.

Chama-se coefficiente o numero, que indica addição de parcellas iguaes representadas por letras, o coefficiente é o numero das parcellas, e se escreve á esquerda da lettra, que representa as paãcellas. Assim $a\times a\times a\times a\times a$ representa-se por $5\,a$; e 5 é o coefficiente.

10. Quando umas poucas de quantidades são reunidas por meio d'estes signaes, formão o que se chama uma expressão

arithmetica ou algebrica, que não é mais do que modos abreviados de indicar as operações mencionadas. Chama-se então monomios as expressões, que não são compostas de partes, como $5a^2$, 8×2^2 etc quando são compostas de partes separadas pelos signaes + ou — chamão-se Polynomios; Binomio quando tem duas partes, Trinomio, quando tem tres partes etc.

---

§ 3.º

Dos Axiomas.

(25) Os axiomas são verdades fundamentaes devidas á inducção, que servem de base, ou de premissas á todas ás demonstrações. Os axiomas da Arithmetica são mui poucos.

1.º Axioma O Todo é maior que cada uma de suas partes. Por exemplo se A e B são as partes, que formão o todo X, é evidente, que X é maior que cada uma das partes A ou B.

2.º Axioma. O Todo é igual á todas as suas partes tomadas juntas; isto é, se X è um aggregado composto das partes A, B, C, é evidente, que $A+B+C$ são iguaes ao todo X.

3.º Axioma. As quantidades iguaes á mesma quantidade são igues umas às outras, ou em termos ainda mais geraes, cousas iguaes à mesma cousa são iguaes umas às outras. Se as quantidades A e B são cada uma igual á quantidade Z, A é igual à B, ou se $A=Z$, e $B=Z$, então $A=B$.

4.º Axioma. Se à quantidades iguaes ajuntamos quantidades iguaes as sommas serão iguaes, ou em termos mais geraes; iguaes ajuntados á iguaes formão sommas iguaes. Se A é igual à B, e $a=b$, as sommas $a+A=b+B$.

Todos os axiomas podem ser reduzidos à estes quatro; entretanto muitos mathematicos admittem mais alguns, que em rigor não são, senão deducções mui simples destes, que com as definições de numeros, é quanto basta para se poder deduzir todas as verdades relativas á formação dos numeros.

(26) Como existem ainda algumas verdades mui simples, precisas nas demonstrações, e que são tidas por axiomas geralmente, mas que podem ser deduzidas das quatro àcima, vamos aqui mostrar esta deducção.

1.º Se de iguaes tiramos iguaes os restos são iguaes. Se $A=a$, e $B=b$, então. $A-B=a-b$: o que provamos assim;

supponha-se qne $A - B$ não é igual á $a - b$; então deverá ser maior ou menor; snpponha-se, que é maior, e $A - B = a - b + c$, então como $B = b$, ajuntando iguaes à iguaes (Axioma 4) temos $A = a + c$; mas $A = a$, logo $a = a + c$, o que é absurdo.

2.º Se á iguaes ajuntamos desiguaes as sommas são desiguaes. Se $A = a$, e B não$= b$, $A + B$ não$= a + b$. Supponha-se que pelo contrario $A + B = a + b$. Então como $A = a$, e $A + B = a + b$, subtrahindo iguaes de iguaes (26,1) temos $B = b$, o que é contrario a hypothese de ser B não$= b$.

3.º Se de desiguaes tiramos iguaes os restos serão desiguaes. Se A não$= a$, e $B = b$, então $A - B$ não é igual à $a - b$. Supponha-se que são iguaes; então como $B = b$ e por supposição $A - B = a - b$, ajuntando iguaes com iguaes (Axioma 4) $A = a$, o que é contrario à hypothese de ser A não$= a$.

4.º Se de duas cousas uma è igual e a outra desigual à uma 3.ª cousa, ellas são desiguaes uma à outra. Se $A = a$, e B não $= a$, tambem A não$= B$; senão supponhão-se iguaes. Então como $A = a$, e $A = B$, segue-se por (axioma 3), que $a = B$ o que é contra a hypothese.

(27 O que torna a Arithmetica um typo de sciencia deductiva é a applicação à todas as suas demonstrações, de uma lei tão comprehensiva, como a seguinte. A somma de iguaes são iguaes, ou tudo aquillo, que è composto de partes, é composto das partes d'estas partes.

Esta verdade evidente aos sentidos em todos os casos, que podem ser referidos à sua decisão, e tão geral, que é coextensiva á natureza inteira, sendo applicavel á todas as sortes de phenomenos, pois todos podem ser numerados, deve ser considerada como uma verdade inductiva, ou lei da natureza da mais alta ordem. Todas as operações arithmeticas são applicações d'esta lei, ou de outras leis deduzidas d'esta. É à nossa garantia da verdade de todos os calculos. Acreditamos, que 5 e 2 são iguaes á 7, sobre a evidencia d'esta lei inductiva combinada com as definições d'estes numeros. Chegamos á esta conclusão ajuntando uma unidade de cada vez: $5 + 1 = 6$; por tanto $5 + 1 + 1 = 6 + 1 = 7$, e como $2 = 1 + 1$, logo $5 + 2 = 5 + 1 + 1 = 7$.

(28) Observação 1.ª Temos assim apresentado n'este primeiro Capitulo todos os principios fundamentaes da Arithmetica. Aqui acha-se em substancia toda a Arithmetica, e nada mais temos á fazer nos seguintes senão tirar consequencias dos prin-

cipios aqui estabelecidos. Esta quantidade de consequencias encadeadas umas ás outras e todas dedusidas de um pequeno numero de definições e axiomas é que forma a belleza d'esta sciencia.

(29) Observação 2.ª Todas as operações, em ultima analyse, na Arithmetica reduzem-se, a formação de um numero, mas para maior clareza tractaremos primeiro da coustrucção e formação dos numeros, e 2.º da comparação dos numeros. Na 1.ª aprendemos a construir todos os numeros; na 2.ª os numeros, uma vez formados, aprendemos a compara-los uns com os outros, e á determinar seus valòres; o que não é senão um outro modo de encarar as formações dos numeros. A Arithmetica é pois a sciencia que tem por objecto a formação e a comparação dos numeros.

PARTE 1.ª

DA FORMAÇÃO DOS NUMEROS.

CAPITULO II.

DAS OPERAÇÕES ARITHMETICAS SOBRE NUMEROS INTEIROS.

§ 1.º

Addição.

(30) O fim da addição é achar o valòr de um numero chamado somma, que contenha elle só todas as unidades, que contem muitos outros numeros. Assim sommar 5 com 3 é reunir estes dous numeros em um sò, que contenha o mesmo numero de unidades, que contem os dous. Para chegarmos a este conhecimento devemos formar um aggregado composto dos dous numeros, e este aggregado conterá tantas unidades, quantas contèm os dous numeros; ora 5 contem cinco unidades, e 3 tres unidades; devemos pois ajuntar á 5 tres unidades, e as-

sim diremos, $5+1=6$, $6+1=7$, $7+1=8$, o numero 8 é a somma dos dous numeros 5 e 3.

(31) D'este modo se pode obter a somma de quaesquer numeros, isto é, ajuntando a um dos numeros successivamente todas as unidades, que contém os outros numeros.

Mas este processo torna-se longo, e enfadonho, quando os numeros são grandes, e devemos achar um meio de abrevia-lo. Pelas convenções, que adoptamos á respeito da notação dos numeros, podemos redusir todas as addições a sommar entre si os nove primeiros numeros. Para conhecermos porém, as sommas de todos os numeros simples, dous á dous, não ha outro meio, senão o que notamos acima. É facil aprender de cór estas sommas, a seguinte taboada serve para este fim.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Depois de se ter aprendido de còr esta taboada nada ha de mais facil do que achar a somma de dous ou mais numeros por maiores que sejão.

(32) Para addicionar numeros, que contém mais do que nove unidades, é preciso sommar separadamente todas as unidades simples, todas as dezenas, todas as centenas etc, que entrão n'estes numeros, assim nunca temos, que sommar senão numeros simples uns com outros quer representem unidades, dezenas etc. Para isto é preciso escrever os numeros propostos de modo que as unidades da mesma ordem fiquem em uma mesma columna vertical. Por exemplo seja proposto sommar os numeros 53 e 34.

Em lugar de ajuntarmos a 53 successivamente uma unidade depois outra, até lhe ajuntarmos 34 unidades, o que seria muito longo, podemos dispor assim o calculo; escrevemos os dous numeros um por baixo do outro, de modo que as unidades, e as dezenas de um estejão immediatamente por baixo das unidades, e das dezenas do outro.

$$\begin{array}{r} 53 \\ 34 \\ \hline 87 \end{array}$$

Então dizemos 3 unidades com mais 4 unidades, fazem 7 unidades, isto sabemos pela taboada (31); escrevemos 7 por baixo das unidades, depois de ter feito um risco para separar a somma dos numeros propostos: passando depois para a 2.ª columna, que é a das dezenas; 5 dezenas com 3 dezenas são 8 dezenas, o que sabemos pelo mesmo meio, e escrevemos 8 por baixo das dezenas. Concluimos que $53+34=87$. Para abreviar dizemos simplesmente $3+4=7$, e escrevemos 7 na 1.ª columna; $5+3=8$, e escrevemos 8 na 2.ª columna.

(33) Quando os numeros, que queremos sommar são mais de dous, o processo é o mesmo. Por exemplo; seja proposto achar a somma dos numeros seguintes 1473, 40734, 371049, 40057. Escrevemos todos do modo seguinte.

$$\begin{array}{r} 1473 \\ 40734 \\ 371049 \\ 40057 \\ \hline 453313 \end{array}$$

E então dizemos $3+4=7$, $7+9=16$, $16+7=23$, a somma d'estes dous ultimos acha-se pelo modo acima (N.° 32), e como 23 é composto de 3 unidades e 2 dezenas, escrevemos 3 na columna das unidades, e levamos 2 dezenas para a columna das dezenas.

Então proseguindo do mesmo modo dizemos, 2+7=9, 9+3=12, 12+4=16, 16+5=21, escrevemos 1, e levamos para a columna das centenas 2, e continuamos, 2+4=6, 6+7=13, 13+0=13, 13+0=13, e escrevemos 3 na columna das centenas, e levamos 1 para a dos milhares; 1+1=2, 2+0=2, 2+1=3, 3+0=3; escrevemos 3, e continuando, dizemos; 4+7=11, 11+4=15, escrevemos 5 na columna de dezenas de milhares, e levamos 1 para a seguinte, 1+3=4; escrevemos 4 na ultima columna. Assim achamos a somma dos 4 numeros propostos. Pelo mesmo modo se pode achar a somma de quaesquer outros numeros, sejão elles, de que valores forem.

(34) Regra para sommar.

1.° Collocão-se os numeros uns por baixo dos outros, de modo que as unidades da mesma ordem em cada um fiquem n'uma mesma columna vertical.

2.° Addicionão-se todos os numeros da columna das unidades, e separa-se esta somma em unidades e dezenas, escreve-se por baixo as unidades, e guarda-se na memoria o numero de dezenas.

3.° Addicionão-se todos os numeros da columna das dezenas, lembrando-se de ajuntar á esta somma as dezenas, provenientes da 1.ª columna, e separa-se esta somma total em dezenas e centenas, escreve-se o numero de dezenas por baixo da 2.ª columna, e lembra-se do das centenas.

4.° Procede-se do mesmo modo em cada uma das seguintes columnas, e na ultima, em lugar de separar o numero obtido como sõmma, em duas partes, escreve-se todo inteiro.

Exemplo.

$$
\begin{array}{r}
8636 \\
2194 \\
7421 \\
5063 \\
2196 \\
1245 \\
\hline
26755
\end{array}
$$

(35) Observação 1.ª Temos pois mostrado, que podemos sempre formar um numero qualquer pela addição de dous ou mais numeros menores, e que para isto basta saber achar a somma de dous numeros de um algarismo cada um.

Observação 2.ª O mesmo numero pode ser formado por meio da addição de dous ou mais numeros por uma grande variedade de modos differentes. Por exemplo o numero 2 só pode ser formado por meio da addição de um modo, que é $1+1=2$; mas a medida, que os numeros são maiores podem ser formados por mais modos differentes.

Por exemplo.

			1
		1	11
	1	11	111 1
1	11	111 1	1111 11 1
12	1112	111122	11111234252
11	1232	123423	12345222354
33	4444	555555	66666666666

(36) Podiamos sommar os numeros principiando pelas unidades de ordem superior, isto é principiando pela esquerda em vez de pela direita; mas quando principiamos pela direita achamos directamente o resultado, pois deste modo a addição de cada columna vertical fornece um algarismo do resultado; e principiando pela esquerda ja não acontece assim, pois se a addição de uma columna der um resultado maior que dez unidades, será preciso escrever as unidades da ordem da columna sommada, e levar as dezenas para serem ajuntadas a columna, que já se tinha sommado, o que não se pode fazer sem mudar o algarismo já escripto, e talvez os outros antecedentes.

(37) Como è muito facil commetter erros de somma é preciso depois de se ter feito uma addição, verifica-la, isto se pode fazer por muitos modos; o mais simples de todos è o seguinte.

Depois de se ter sommado pelo modo usual principiando do alto para baixo somma-se uma segunda vez de baixo para cima. Seos resultados são os mesmos é provavel, que não houve erro. Por exemplo.

$$\begin{array}{r} 3452 \\ 5241 \\ 46 \\ \hline 8739 \end{array}$$

Depois de termos sommado pelo modo usual tornaremos á sommar assim $6+1+2=9$, $4+4+5=13$, $2+4=6$, e mais 1 da outra columna igual á 7, $5+3=8$; as mais provas dependem de operações que não sabemos ainda fazer.

§ 2.º

Subtração.

(38) A subtração tem por fim tirar um numero de um outro; o resultado chama-se resto ou differença. É evidente que não podemos tirar de um numero senão um menor; o que se consegue tirando do maior todas as unidades, que contem o menor. Por exemqlo para obtermos a differença entre 5 e 3, tiramos de 5 unidades, 1 unidade, depois mais outra finalmente mais 1, dizemos; $5-1=4$; $4-1=3$, $3-1=2$, o resto é 2.

(39) A differença entre dous uumeros exprime o excesso de um sobre o outro; do que resulta, que a differença ajuntada ao menor numero deve dar o maior. Pode-se pois achar o resto de uma subtração procurando o que é preciso ajuntar ao menor para formar o maior dos dous numeros dados.

Assim para achar a differença entre 6 e 4 podemos procurar o que é preciso ajuntar a 4 para formar 6; o que se faz dizendo $4+1=5$, $5+1=6$. Logo ajuntando 2 á 4 teremos 6, e a differença procurada é 2

(40) Todo numero qualquer pode ser considerado como formado pela addição de dous numeros; podemos pois de um número, dado um dos dous que o formam achar o outro tirando do numero a parte dada.

(41) Para fazer subtrações de numeros grandes seria muito longo este processo de tirar gradualmente uma unidade, de um numero maior, atè tirar todas as unidades, que contem o numero menor; devemos pois empregar algum meio de abreviar este processo. Para isto é preciso saber de cor as differenças entre um numero simples qualquer e todos os numeros atè 18, pois estas não podem ser achadas, senão pelo processo acima apontado. Para facilitar este couhecimento serve a seguinte taboada—

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
8	7	6	5	4	3	2	1	0		
7	6	5	4	3	2	1	0			
6	5	4	3	2	1	0				
5	4	3	2	1	0					
4	3	2	1	0						
3	2	1	0							
2	1	0								
1	0									

(42) Esta taboada uma vez bem sabida de cor nada ha de mais facil, do que subtrahir um numero qualquer de outro maior. Por exemplo seja proposto tirar de 87, 35.

Escrevemos estes numeros um por baixo do outro pondo por cima o maior.

$$\begin{array}{r} 87 \\ 35 \\ \hline 52 \end{array}$$

E então dizemos 7—5=2, o que sabemos por meio da taboada (41) e escrevemos 2 por baixo da columna das unidades; e passando a columna das dezenas dizemos 8—3=5, e escrevemos 5 por baixo da columna das dezenas, e concluimos que 87—35=52.

Uma difficuldade as vezes se apresenta, não se pode tirar um numero maior de um menor, entre tanto pode acontecer que o numero de unidades da mesma ordem no numero menor seja maior, que o do numero maior. Então devemos fazer o seguinte raciocinio. Seja proposto tirar de 67, 29.

$$\begin{array}{r} 67 \\ 29 \\ \hline 38 \end{array}$$

Como não podemos de 7 tirar 9 ficamos embaraçados logo no principio, mas podemos ajuntar ás 7 unidades do maior numero 1 dezena, isto é, 10 unidades, e então temos que tirar 9 de 17, o que é possivel, e não de 7; e dizemos 17—9=8; escrevemos 8 por baixo da columna das unidades; mas então os numeros dados ficam dispostos assim.

$$\begin{array}{lcl} 5 \text{ dezenas} & + & 17 \text{ unidades.} \\ 2 \text{ dezenas} & + & 9 \text{ unidades.} \\ \hline 3 & & 8 \end{array}$$

Depois de termos tirado as 9 unidedes de 17 unidades temos a differença 8, e tiramos 2 dezenas das 5 dezenas restantes, e escrevemos o resultado 3 dezenas. Logo 67—29=38. Ainda existe um outro caso, que pode embaraçar o principiante, este é quando o numero superior da columna é um 0, e que o numero, de que se quer tirar uma unidade de ordem superior é tambem 0.

Por exemplo seja proposto tirar de 670035, 89567.

$$\begin{array}{r} 670035 \\ 89567 \\ \hline 580468 \end{array}$$

Dizemos 5—7 não pode ser, e tomamos uma dezena da columna seguinte, e então temos 15—7=8, escrevemos 8; o 3 (pois desta columna tiramos uma unidade) fica valendo 2, e dizemos 2—6 não pode ser, e não podemos tirar uma unidade das duas columnas que se seguem, que são as das centenas, e dos milhares, podemos porem tirar uma unidade da columna das dezenas de milhares; uma unidade desta ordem vale mil dezenas, logo temos 1002—6: o numero 1002 pode ser decomposto em 99 centenas e 12 dezenas, e então temos

12—6=6, e escrevemos 6 na columna das dezenas, e temos então na columna das centenas 9, e dizemos 9—5=4, escrevemos 4; na columna dos milhares temos tambem 9, e dizemos 9—9=0, escrevemos 0; na columna das dezenas de milhares só temos 6, pois tiramos uma unidade; dizemos 6—8 não pode ser, mas 16—8=8, e escrevemos 8, depois temos na ultima columna só 5 dos quaes nada tiramos, e escrevemos 5. Por tanto 670035—89567=580468.

Este processo se reduz a tomar a unidade, que se precisa para tornar possivel a subtração, ao primeiro algarismo significativo, e á considerar as cifras intermediarias como representando cada uma um 9.

(43) Regra geral da subtração. Para subtrahir um numero de um outro.

1.º Escreve-se o numero, que tem de ser subtrahido por baixo do outro de modo que as unidades de mesma ordem deste fiquem por baixo das da mesma ordem do outro.

2.º Subtrahe-se cada algarismo da linha inferior do que lhe fica por cima, se isto se pode fazer. Quando isto não se pode fazer ajunta-se dez ao algarismo superior, e então subtrahe-se o inferior, e cumpre neste caso diminuir o algarismo superior da outra columna, de uma unidade, antes de fazer a subtração de um destes algarismos do outro.

3.º Se os algarismos das columnas a esquerda são cifras toma-se a unidade ao primeiro algarismo significativo, que fica representando uma unidade de menos que seu valor, e consideram-se as cifras, intermediarias, como representando 9.

4.º Escreve-se cada um destes restos parciaes por baixo das suas columnas respectivas.

Exemplos.

1.º Subtráia-se de 5386427 os numeros 2164315 e 4258792.

5386427	5386427
2164315	4258792
3222112	1127635

(44) Sempre se pode effectuar directamente a subtração, principiando pela direita pois assim cada subtração parcial fornece um algarismo do resto, que se procura conhecer; não

acontece o mesmo, principiando pela esquerda, pois se os números do subtrahendo (*) forem maiores que os seos correspondentes no subtrahido, como os algarismos precedentes forão empregados pelas subtrações precedentes, não se pode tornar a subtração possivel por um emprestimo sem mudar os algarismos ja achados do resto.

(45) A prova da subtração é mui simples. Ajunta-se ao subtrahendo à differença, e esta somma deve ser igual ao subtrahido ; ou tira-se a differença , do maior numero, e este resto deve ser igual ao menor. Assim pois podemos considerar a subtração como uma operação, que tem por fim conhecendo a somma de dous numeros, e um dos dous numeros determinar o outro. Temos duas provas:

1.ª Somar a differença com o menor numero, o que deve dar o maior.

$$\begin{array}{rr} & 6578 \\ & 1230 \\ \hline \text{Differ.} & 5348 \\ \hline & 6578 \text{ somma.} \end{array}$$

Para provar a exactidão d'esta subtracção ajunta-se a differença ao menor numero e esta somma deve ser o maior numero; de facto, 5348+1230=6578.

2.ª Subtrahindo do numero maior a diferença, o resultado desta subtração deve ser igual ao menor numero.

Subtração	Prova.
6578	6578
1230	5548
5348	1230

3.ª A subtração serve de prova para a addicção; assim tendo por exemplo feito a seguinte somma

$$\begin{array}{r} 3452 \\ 5241 \\ 46 \\ \hline 8739 \\ 0100 \end{array}$$

(*) O numero maior chama-se subtrahido, e o menor subtrahendo.

Para verificar este resultado, sommaremos os mesmos numeros principiando pela esquerda, deste modo $3+5=8$, 8 tirado de 8 resta 0, na segunda columna temos $4+2=6$, que tirado de 7 dá o resto 1, que com o algarismo seguinte 3 faz 13. Na 3.ª columna $5+4+4=13$, que tirado de 13 fica nada. E na ultima columna $2+1+6=9$, que tirado de 9 dá o resto 0, donde concluimos que a primeira operação está certa: a rasão que temos para conhecer que a primeira operação é correcta todas as vezes que depois desta prova resta nada, é que tendo tirado necessariamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades de que constão todas as parcellas sommadas, da somma destas parcellas, é necessario que o resto seja 0.

(46) Quando o subtrahido é augmentado, ou diminuido de um certo numero de unidades, o resto soffre a mesma alteração, isto é, è augmentado, ou diminuido do mesmo numero de unidades. Por exemplo: $64-32=32$, se ajuntarmos 8 á 64; teremos $64+8-32=32+8$; de facto $64+8=72$, e $32+8=40$, e $72-32=40$. Se diminuirmos 64 de 5, teremos $64-5-32=32-5$, e de facto $64-5=59=$, e... .... $32-5=27$, e $59-32=27$.

Pelo contrario augmentando ou deminuindo de um certo numero de unidades o subtrahendo, o resto será diminuido ou augmentado do mesmo numero de unidades. Por exemplo se na subtracção acima augmentamos o subtrahendo 32 de 5 a differença será diminuida de 5, $64-(32+5)=32-5$, e de facto $32+5=37$., e $64-37=27$, e $32-5=27$. Pelo contrario diminuindo o subtrahendo 32 de 5, o resto será augmentado de 5, $64-(32-5)=32+5$., de facto $32-5=27$, $64-27=37$, e $32+5=37$.

Deste theorema se deduz que a differença entre dous numeros não muda, quando augmentamos ou diminuimos ao mesmo tempo e da mesma quantidade os dous numeros; $64-30=34$; esta differença fica sendo a mesma, quando se augmenta ou se diminue ao mesmo tempo, os numeros 64 e 30 de uma mesma quantidade, 5 por exemplo, e de facto; augmentando, temos $69-35=34$; diminuindo $59-25=34$.

A differença entre dous numeros exprimindo o excesso de um sobre o outro, deve ficar a mesma, quando os dous numeros varião de um mesmo modo, e de uma mesma quantidade.

(47) Em lugar de diminuir uma unidade do algarismo superior, quando se lhe toma emprestado, e de subtrahir depois

o algarismo inferior, podemos não alterar o valor do algarismo superior, e augmentar o inferior de uma unidade. Quando existem cifras na linha superiora, e que tomamos emprestado ao primeiro algarismo significavo, em vez de contar cada uma das cifras por um 9, podemos considera-las, como valendo 10 e tirar o algarismo inferior augmentado de uma unidade.

§ 3.º

Multiplicação.

(48) O objecto da multiplicação é repetir um numero tantas vezes, quantas unidades contem um outro (24, 3.º). Já mostramos, que a mesma regra, que serve para sommar dous numeros, applica-se tambem para achar a somma de tres, quatro etc. numeros. Este modo de formar um numero pela addição de muitos outros menores, apresenta um caso notavel, que dá origem á uma nova operação arithmetica, que se chama multiplicação; este caso é quando os numeros addicionados são todos iguaes. Por exemplo $3+3+3+3=12$; podemos dizer que 12 é formado de 4 vezes 3, e podemos determinar o numero 12 por meio dos dous numeros 3 e 4. A multiplicação pois não é mais, que uma modificação da addição, e de facto todas as operações arithmeticas, podem ser reduzidas ás de sommar e diminuir: não se segue porem que, não se deva empregar senão estas duas operações; as mais regras para fazer outras operações nada mais são do que modos abreviados de fazer com muita vantagem, o que em rigor se poderia fazer com muito mais trabalho, pelo meio das addições e subtrações. Repetir um mesmo numero dado um certo numero de vezes, ajuntar á um numero o mesmo numero tantas vezes menos uma, quantas deve ser repetido, multiplicar um numero por um numero igual ao numero de vezes, que deve ser repetido, achar um numero que seja formado por um outro, como um outro é formado pela unidade, são expressões todas estas, que indicão a mesma operação, por exemplo pela addição seguinte.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

repetimos 16 quatro vezes, ou ajuntamos 16 á 16 trez vezes, ou formamos um numero composto com 16 como 4 é composto com a unidade.

(49) Para obter o producto de dous numeros podemos escrever o multiplicando tantas vezes, quantas unidades contem o multiplicador, e addicionar; a somma será o producto procurado. Mas por este modo tornão-se os calculos muito longos, quando se quer achar o producto de dous numeros grandes, por exemplo para achar o producto de 6502×580 seria penoso escrever 6502, 580 vezes, e fazer esta longa addição. Para evitar isto é que se emprega o processo, que temos de explicar.

(50) Os productos de todos os numeros simples multiplicados uns pelos outros, não podem ser achados, senão pela addição.

Por exemplo o producto de 3×5, não pode ser achado senão sommando tres cincos, isto é, $5+5+5=15$. Mas é facil decorar todos os productos dos 9 primeiros numeros multiplicados uns pelos outros dous á dous, para facilitar este trabalho serve a seguinte taboada attribuida á Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Esta taboada forma-se pelo modo seguinte: na primeira linha estão os 9 primeiros numeros (aqui estão 10) 1, 2, 3, 4, etc. a 2.ª linha contem estes numeros multiplicados por 2, e formão-se este productos ajuntando cada um dos numeros da 1.ª linha á si mesmo; a 3.ª linha contem os productos dos mesmos numeros por 3, e forma-se ajuntando os numeros da 2.ª linha aos da 1.ª etc. e assim por diante.

Por meio desta taboada podemos achar sempre o producto de dous numeros quaesquer de um só algarismo; este producto acha-se no encontro das linhas horizontaes com as verticaes, que principião pelos numeros, que são factores. Assim o producto de 6×7 acha-se procurando o numero, que fica no encontro das duas linhas, uma horizontal, outra vertical, que principião, por 6 e por 7, e achamos que é 42. Uma vez sabida de cór esta taboada, podemos multiplicar dous numeros de mais de um algarismo: antes porém de passar á mostrar como isto se faz, é preciso fazer uma reflexão relativa á esta taboada.

(51) Na taboada acima achamos que 5×6=6×5, 3×4=4×3 etc. De modo que o producto de dous numeros é o mesmo quando se toma o multiplicando por multiplicador, ou o multiplicador pelo multiplicando. De facto assim deve ser, pois multiplicar um numero 3 por um outro 5, é o mesmo que sommar o primeiro numero 3 escrito tantas vezes quantas unidades contem o segundo 5; 3 é o mesmo que tres unidades para sommar cinco 3 pois podemos escrever unidades 1.1.1. cinco vezes, e teremos o seguinte arranjo:

1.1.1.
1.1.1.
1.1.1.
1.1.1.
1.1.1.

Então vemos que o aggregado total é composto de 15 unidades, arranjadas em 5 linhas cada uma de tres unidades, ou em tres columnas verticaes cada uma composta de 5 unidades; por tanto o numero total de unidades será composto de tantas vezes 3 quantas são as linhas, isto é, de 5 vezes 3, e de tantas vezes 5 quantas são as columnas, isto é, de 3 vezes 5; e como o resultado não depende do modo de contar, segue-se que 5×3=3×5.

Podemos extender este raciocinio á outros quaesquer numeros. Este theorema é uma simples applicação dos dous primeiros axiomas. (25)

(52) Agora podemos mostrar como se multiplica um numero qualquer por um outro numero qualquer.

1. Multiplicar um numero de muitos algarismos por um de um só algarismo.

Seja por exemplo proposto multiplicar 567892 por 5. O que queremos é achar um numero qne contenha 5 vezes o numero 567892, este numero pode ser decomposto nas seguintes partes 500000+60000+7000+800+90+2; e se tomarmos os productos parciaes, a somma será igual á 5 vezes o nnmero total 567892. Assim multiplicando 5 unidades da 6.ª ordem por 5 temos 25 unidades da mesma ordem, e fasendo o mesmo com as unidades de ordens inferiores podemos dispor a operação do modo seguinte.

$$
\begin{array}{r}
500000\times5=.2500000 \\
60000\times5=..300000 \\
7000\times5=..\ 35000 \\
800\times5=...\ 4000 \\
90\times5=.....\ 450 \\
2\times5=.......\ 10 \\
\hline
567892\times5=\ 2839460
\end{array}
$$

E' evidente que 5 vezes todas as partes de um todo é igual á 5 vezes o todo.

Para abreviar podemos escrever a operação do modo seguinte:

$$
\begin{array}{r}
567892 \\
5 \\
\hline
2839460
\end{array}
$$

E dizemos $5\times2=10$, e escrevemos 0 na columna das unidades; $5\times9=45$ com mais uma dezena levada da 1.ª columna temos $45+1=46$, escrevemos 6 e reservamos 4 para a columna seguinte; $5\times8=40$, $40+4=44$, escrevemos 4 e guardamos 4; $5\times7=35$, $35+4=39$, escrevemos 9 e guardamos 3; $5\times6=30$, $30+3=33$, escrevemos 3 e guardamos 3; $5\times5=25$, $25+3=28$, e escrevemos 28.

2.º Multiplicar um numero de muitos algarismos por um outro de muitos algarismos. Seja por exemplo proposto multiplicar

tiplicar 68756 por 5482, para isso empregaremos os mesmos raciocinios. Multiplicar 68756 por 5482 é o mesmo que tomar 68756,5482 vezes, e formar um só aggregado: este ultimo numero pode ser decomposto do modo seguinte$=$ $5000+400+80+2$; e então o que temos á fazer é multiplicar 68756 por cada uma destas partes, e sommar todos os productos parciaes, que formão assim o producto total. Podemos dispor a operação do modo seguinte.

$$\begin{array}{l} 68756\times\ldots2\ =\ldots\ldots137512 \\ 68756\times\ldots80=\ldots5500480 \\ 68756\times\ldots400=27502400 \\ 68756\times..5000=34378000 \\ \hline 68756\times5482=376920592 \end{array}$$

Multiplicamos 68756 por 2, o que ja sabemos fazer e escrevemos o producto, depois multiplicamos o mesmo numero por 80; ora $80=8\times10$, por tanto multiplicar um numero por 80, é o mesmo que multiplicar primeiro por 8 e depois por 10; multiplicar um numero por 10 é o mesmo que ajuntar-lhe uma cifra á direita o que indica que os seos algarismos valem 10 vezes mais (19, 5.º) assim tudo se reduz a multiplicar o multiplicando por 8 e ajuntar ao producto uma cifra.

Multiplicar um numero por 400, é o mesmo, que multiplical-o por 4, e depois por 100, pois $400=4\times100$, e $100=10\times10$, logo tudo se reduz aqui a multiplicar o multiplicando por 4 e ajuntar ao producto dous zeros, e assim temos o terceiro producto parcial.

Do mesmo modo continuamos, e depois sommamos todos os prodnctos parciaes. Para abreviar a operação é melhor dispor o calculo deste modo:

$$\begin{array}{r} 68756 \\ 5482 \\ \hline 137512 \\ 550048 \\ 275024 \\ 343780 \\ \hline 376920592 \end{array}$$

Escrevemos o producto do multiplicando por 2: Depois escrevemos o producto do multiplicando por 8 por baixo recuando para a esquerda porque 8 representa dezenas; e depois escrevemos por baixo o producto do multiplicando por 4, recuando tambem de um lugar mais para a esquerda, porque 4 aqui representa centenas, e assim por diante.

(53) A regra geral para multiplicar um numero por outro é a seguinte:

1.º Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando.

2.º Multiplica-se succesivamente todos os algarismos do multiplicando por cada algarismo do multiplicador, o que dá tantos productos parciaes quantos algarismos tem o multiplicador.

3.º Escreve-se um zero á direita do producto parcial do algarismo das dezenas do multiplicador; dous zeros no producto parcial do algarismo das centenas do multiplicador, e assim por diante.

4.º Escrevem-se todos estes productos parciaes uns por baixo dos outros de modo que seus algarismos da mesma ordem se correspondão, isto é, que as unidades fiquem por baixo das unidades, as dezenas por baixo das dezenas etc.

5.º Addicionão-se todos estes productos parciaes. A somma será o producto total.

EXEMPLO.

1.º Multiplique-se 471493475 por 4395.

$$\begin{array}{r} 471493475 \\ 4395 \\ \hline 2357467375 \\ 42434412750 \\ 141448042500 \\ 1885973900000 \\ \hline 2072213822625. \end{array}$$

2.º Multiplique-se 8496427 por 874359.

3.º Multiplique-se 2760325 por 37072.

(54) Para formar os productos parciaes do multiplicando pelos differentes algarismos do multiplicador, deve-se principiar cada multiplicação pela direita do multiplicando, pelas mesmas rasões porque se deve principiar a somma pela direita. A ordem em que se deve proceder á respeito dos algarismos do multiplicador é indifferente; mas o costume é principiar pela direita do multiplicador. Para multiplicar

12353 por 652 é indifferente principiar por 6, por 5, ou por 2.

12353	12353	12353
652	652	652
7411800	617650	24706
617650	24706	61765
24706	7411800	74118
8054156	8054156	8054156

(55) Os productos de um numero qualquer multiplicado por 2, 3, 4, 5, etc. chamam-se multiplos deste numero.

(56) Para achar o producto de muitos numeros multiplicados uns pelos outros, multiplica-se successivamente o 1.º pelo 2.º, e depois o producto desta multiplicação pelo 3.º etc. e assim por diante. Por exemplo para achar producto dos seguintes numeros: 5, 8, 3 e 4 multiplicados uns pelos outros a operação é esta $5\times8\times3\times4=480$ o que se acha do modo seguinte:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 8 \\ \hline 40 \\ 3 \\ \hline 120 \\ 4 \\ \hline 480 \end{array}$$

(57) O producto de muitos factores é o mesmo seja qual for a ordem em que se effectua a multiplicação; isto é, $3\times5\times4=$ $3\times4\times5=5\times3\times4=5\times4\times3=4\times5\times3=4\times3\times5$.

1.º O producto de tres numeros ou factores não muda de valor quando se transpoem os dous ultimos factores.

Seja o producto $4\times3\times5$, para effectuar esta operação na ordem indicada, é preciso multiplicar 4 por 3 e depois o producto desta multiplicação por 5. Já sabemos (51) que 4×3 é o mesmo que 3×4. Ora multiplicar 4 por 3 é o mesmo que formar uma somma com 3 quatros; isto é, $4\times3=$

$4+4+4$. Multiplicar o producto 4×3 por 5 é o mesmo que multiplicar a somma $4+4+4$ por 5, e este producto é o mesmo que tomar cada uma das partes da somma 5 vezes, e ajuntal-as. Emfim $4\times3\times5=4\times5+4\times5+4\times5$, isto é, $4\times3\times5$ é igual á 4×5 tomados tres vezes, ou a $4\times5\times3$; logo $4\times3\times5=4\times5\times3$; e assim podemos transpor os dous ultimos factores sem alterar o valor do producro.

2.º Agora é facil deduzir do que acabamos de provar, que no producto de um numero qualquer de factores pode-se inverter a ordem de dous factores consecutivos sem mudar o valor do producto. Consideremos o producto:

$$2\times6\times4\times3\times5\times8\times9\times7$$

podemos transpor a ordem de dous factores quaesquer, 3 e 5 por exemplo, sem alterar o valor do producto total. O producto $2\times6\times4\times3\times5$ devendo ser effectuado antes que seja multiplicado pelos factores 8, 9, 7, basta provar que

$$48\times3\times5=48\times5\times3$$

o que já provamos àcima (1.º) Destas duas proposições concluimos, que um producto não muda de valor, alterando a ordem de seus factores.

(58) Para multiplicar um numero pelo producto de muitos factores, basta multiplicar este numero successivamente por cada um dos factores do producto; por exemplo é o mesmo multiplicar 7 por 15, ou 7 por 3, e depois o producto 7×3 por 5; porque $15=3\times5$. O mesmo se applica a um numero de mais factores ; 7×135 é o mesmo que $7\times3\times5\times9$; pois $3\times5\times9=135$.

(59) Quando os factores de um producto terminam por zeros, podemos achar este producto multiplicando os factos sem as cifras, e depois ajuntando ao resultado as cifras, que foram supprimidas. Assim para multiplicar 1340000 por 532000 basta muitiplicar 134 por 532, e ajuntar ao resultado 7 cifras. Multiplicar 1340000 por 532000 é o mesmo que multiplicar 134×10000 por 532×1000, isto é, temos de effetuar o producto $134\times10000\times532\times1000=134\times532\times10000\times1000=134\times532\times10000000$; o que se reduz á multiplicar 134 por 532, e depois este producto por 10000000, ou á ajuntar ao producto 7 cifras.

(60) A' medida, que um dos factores augmenta o produc-

to tambem augmenta. Podemos sempre tomar por multiplicando a parte que varia, e por multiplicador a que não varia; é evidente, que se o multiplicando augmenta ou diminue, em quanto que o multiplicador é sempre o mesmo, o producto deve augmentar ou diminuir.

(61) Dous numeros iguaes multiplicados pela mesma quantidade, ou por quantidades iguaes dão productos iguaes, isto é uma simples consequencia do quarto axioma; (25) e dous numeros desiguaes multiplicados por quantidades iguaes dão productos desiguaes.

(62) A prova da multiplicação consiste em fazer a operação em uma ordem differente principiando pela direita do multiplicador, por exemplo.

(63) Quando temos de multiplicar um pelo outro dous numeros muito grandes é muito commodo formar primeiro os productos do multiplicando por cada um dos algarismos do multiplicador que não são repetidos. Seja por exemplo proposto multiplicar um pelo outro os numeros 2937887541 e 67431456. O multiplicador não contem senão os algarismos 134567, multiplicando successivamente o multiplicando por cada um destes algarismos formamos a seguinte tabella:

1	2937487541
2	5874975082
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

Nesta tabella tomamos os productos do multiplicando pelos algarismos 67431456 do multiplicador para os collocar na ordem que devem occupar como se vê abaixo, e então não temos mais que fazer senão uma somma.

```
       17624925246
      14687437705
     11749950164
     2937487541
    8812462625
  11749950164
 20562412787
17624925246
------------------
198079061871489696
```

§ 4.º

Divisão.

(64) A divisão tem por fim, conhecendo um producto de dous factores, e um destes factores achar o outro factor (24,4º). A construção dos numeros por meio de factores nos conduz á esta nova operação, que constitue um outro modo de formar uma quantidade, que é em relação á multiplicação, o que a subtração é em relação á addição O producto de dous numeros forma-se repetindo tantas vezes um delles quantas unidades contém o outro. De um producto qualquer podemos voltar á um de seus factores, procurando quantas vezes este producto contém o outro factor. Por meio da subtração podemos chegar á este conhecimento, mas para abreviar esta operação empregamos um processo particular chamado divisão. Com effeito para sabermos quantas vezes 32 contém 8 basta tirar 8 de 32 tantas vezes quantas forem possivel; e assim teremos $32-8=24$, $24-8=16$, $16-8=8$, $8-8=0$; achamos depois de 4 sultracções, que o resto é nada, e logo concluimos, que 32 contem 8, quatro vezes. Este modo de decompor um numero para saber quantas vezes contem um outro numero, serve tambem para repartir um numero em um certo numero de partes iguaes, de valor dado. Por exemplo para repartir o numero 8 em partes iguaes á 2 cada uma, basta tirar de 8 o numero 2 successivamente umas poucas de vezes até esgotal-o, e acharemos que 8 contem 2, quatro vezes, e que pode ser repartido em 4 aggregados de 2 unidades cada um, ou dividido em 4 partes iguaes á 2. Assim pois a divisão serve para achar quantas vezes um numero é contido em outro, ou para dividir um numero em partes iguaes.

Por meio de sultracções successivas sempre podemos achar o resultado de uma divisão qualquer; mas quando os numeros são mui grandes, este processo torna-se quasi impraticaticavel; é pois preciso achar um modo mais abreviado de chegarmos ao mesmo fim, e que seja em relação á sultracção, o que a multiplicação é em relação á addição.

(65) Quando queremos dividir um numero de dous algarismos por um de um só algarismo podemos fazer uso da taboada da multiplicação para achar o quociente. Por exemplo seja proposto dividir 35 por 7; procuramos na columna vertical, que principia por 7 o numero 35, e como na primeira

columna vertical á esquerda, o numero 5 acha-se no principio da linha horizontal em que está 35, concluimos, que 5 é o quociente, pois $5\times7=35$. Muitas vezes o numero que queremos dividir não se acha na taboada; por exemplo seja proposto dividir 65 por 9, não achamos na columna vertical principiando por 9 este numero; mas achamos 63, e 72, entre os quaes fica o numero 65; e assim o quociente de 65 dividido por 9 é um numero maior que 7, e menor que 8; tomamos para quociente o menor dos dous numeros, e temos neste caso $7\times9=63$ logo $65=7\times9+2$; 7 é o quociente e fica o resto 2. Este resto dá origem á uma especie particular de numeros de que fallaremos depois. Para se poder fazer a divisão de um numero qualquer por um outro qualquer, é preciso saber de cór os productos de todos os numeros simples multiplicados dous á dous, isto é, a taboada da multiplicação, e conservar na memoria os quocientes das divisões de todos os numeros até 90, divididos pelos 9 primeiros numeros.

(56) Dous casos se apresentam na divisão de um numero por outro, o divisor pode ser um numero de um só algarismo ou de muitos algarismos.

1° Caso. Divisor de um só algarismo. Quando queremos dividir um numero de mais de dous algarismos por um numero de um só algarismo, o que procuramos é achar um numero, que multiplicado pelo numero de um só algarismo, dê por resultado ou producto o numero que queremos dividir. Por outra, o quociente que procuramos, é um numero, que multiplicado pelo divisor produz o dividendo. Consideremos pois o dividendo como um producto, e o divisor e o quociente, como factores, e vejamos como se compõe este producto. Sejam por exemplo, os numeros 242, e 5 os factores, e procuremos o producto; para melhor intelligencia do modo porque se forma este producto, consideremos 5 como multiplicando o que podemos fazer, teremos então:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 242 \\ \hline 10=5\times2 \\ 200=5\times40 \\ 1000=5\times200 \\ \hline 1210=5\times242 \end{array}$$

O producto total 1210 é composto da somma dos productos parciaes de 5 por cada um dos algarismos de 240. Tomando agora 1210 por dividendo e 5 por divisor e procurando achar o quociente 242 devemos raciocinar do modo seguinte. O quociente, que queremos achar é um numero, que multiplicado por 5 deve dar por producto o numero 1210. Este deve conter mais de dous algarismos, porque dous numeros de um só algarismo cada um multiplicados um pelo outro não dão em resultado um numero de mais de dous algarismos; ora o numero 1210 tem 4, logo as mais altas unidades do quociente são centenas; não são milhares, porqne, suppondo que o quociente tivesse uma só uuidade desta ordem multiplicada por 5, daria por resultado pelo menos 5 unidades de milhares, e o dividendo só tem uma unidade desta ordem. Podemos pois concluir que 1210 provém da multiplicação de um numero de tres algarismos por 5. Para acharmos este numero devemos proceder do modo seguinte. O numero 1210 é o preduto de 5 multiplicado pelo quociente; logo 12 é o producto do algarismo do quociente de ordem mais elevada multiplicado por 5, juntamente com as centenas provenientes da multiplicação dos outros algarismos do quociente por 5. Assim procurando saber qual é o numero, que multiplicado por 5 produz 12, ou um numero pouco menor, pela taboada achamos, que $2 \times 5 = 10$, e assim podemos concluir que 2 é o algarismo de ordem mais elevada do quociente. Tirando do dividendo 1210 o producto $5 \times 200 = 1000$, temos $1210 - 1000 = 210$: este numeao è o producto da multiplicação de 5 pelas dezenas e unidades do quociente. Procuremos agora o algarismo das dezenas; 21 dezenas é o producto destas dezenas multiplicadas por 5; procurando pois na taboada qual o numero que multiplicado por 5 dá por resultado 21, ou um numero menor, achamos 4, pois $4 \times 5 = 20$, logo 4 dezenas no quociente é o numero que procuramos, e tirando de 210 o producto destas dezenas multiplicadas por 5, ou $40 \times 5 = 200$, teremos por resto $210 - 200 = 10$; e 10 é o producto das unidades do quociente multiplicadas por 5, e como $2 \times 5 = 10$, segue-se que as unidades do quociente são duas. Assim pois temos achado que 242 é o quociente da divisão de 1210 por 5. Esta operação escreve-se do modo seguinte:

dividendo	1210	5 divisor
	10	242 quociente
	21	
	20	
	10	
	10	
	00	

1.º Escreve-se o dividendo e na mesma linha para a direita é separado por um risco o divisor.

2.º Escreve-se o quociente separado por um risco do divisor, por baixo deste.

3.º Para achar este procede-se do modo seguinte, que nada mais é que o raciociuio acima abreviado. Quando o primeiro algarismo á esquerda do dividendo não contém o divisor tomão-se os dous primeiros, e procura-se quantas vezes estes contém o divisor:—no exemplo presente os dous algarismos são 12, e 5 se acha em 12 duas vezes; escrevemos no quociente 2, e por baixo de 12 escreveremos 2X5=10; tiramos este resultado de 12, o resto é 2; escrevemos ao lado deste o numero 1, e temos 21; procuramos quantas vezes 5 é contido em 21, e achamos 4, e escrevemos este numero à direita de 2 no quociente, e tiramos de 21 o producto 5X4=20, e fica o resto 1, escrevemos ao lado uma cifra, e temos 10, procuramos finalmente em 10 quantas vezes é contido 5 e achamos 2, e escrevemos 2 no quociente á direita de 4, e tirando 2X5=10 achamos por resto nada.

Appliquemos agora este raciocinio à alguns outros exemplos. Seja proposto dividir 8769 por 7.

8769	7
7	1252
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

N'este exemplo vemos que o divisor não é contido um numero de vezes certo no dividendo, e que fica um resto da divisão 5, que não pode ser dividido por 7; este resto representa-se do modo seguinte $\frac{5}{7}$ que significa, que 5 deve ser dividido por 7, ou que devemos tomar a setima parte de 5.

Seja proposto ainda dividir 14464 por 8.

$$\begin{array}{l|l} 14464 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{8} & 1808 \\ \;\,64 & \\ \;\,\underline{64} & \\ \;\;\;064 & \\ \;\;\;\underline{064} & \\ \;\;\;000 & \end{array}$$

Neste exemplo quando chegamos á subtracção de 8×8, de 64, achamos por resto —0,— e ajuntando-se-lhe o algarismo seguinte do dividendo, temos 6, que não é divisivel por 8, e escrevemos no quociente —0,— porque está visto que o algarismo de dezenas do quociente multiplicado por 8 não pode dar por resultado 6; o que prova, que no quociente não ha algarismo desta ordem, e que as 6 dezenas do dividendo provêm da multiplicação das unidades do quociente por 8.

Pelo exercicio pode-se fazer a divisão de um numero qualquer por um numero de um só algarismo por um modo abreviado, sem escrever os productos parciaes.

Seja por exemplo proposto dividir 103701 por 3. Escrevemos assim:

$$\begin{array}{l} 103701 \;(3 \\ \;\;34567 \end{array}$$

o dividendo, e por baixo o quociente fazendo mentalmente as operações precisas para achal-o:—assim dizemos 3 em dez 3, escrevemos 3, e tiramos mentalmente $3\times3=9$ de 10; e depois dizemos $\frac{13}{3}=4$, escrevemos 4, e mentalmente tiramos $3\times4=12$ de 13; e depois dizemos $\frac{17}{3}=5$, e escrevemos 5, e tiramos mentalmente $3 \times 5 = 15$ de 17; dizemos então $\frac{20}{3} = 6$, e tiramos $3 \times 6 = 18$ de 20, e dizemos depois de ter escrito $6 : \frac{21}{3} = 7$, e escrevemos 7, o resto é nada, e a divisão exacta.

Para dividir um numero por 10 basta tirar o ultimo algarismo á sua direita, assim 1234 dividido por 10 é 123, por que $123 \times 10 = 1230$, e para 1234 faltam 4, que, é o resto da divisão.

Assim pois sabemos dividir um numero qualquer pelos numeros, que não são superiores á 10.

2.º Caso.—Quando o divisor contem mais de um algarismo ou quando é superior á 10.

O processo neste caso é quase o mesmo. O producto de dous numeros ambos compostos de mais de um algarismo, forma-se do modo seguinte: por exemplo, seja proposto multiplicar 435 por 253.

$$\begin{array}{r}
435 \\
\underline{253} \\
435 \times 3 = \quad 1305 \\
435 \times 50 = \quad 21750 \\
\underline{435 \times 200 = \quad 87000} \\
435 \times 253 = 110055
\end{array}$$

Agora pelo contrario procuremos achar o quociente da divisão de 110055 por 435: devemos achar 253. Vemos logo, que o quociente não contem algarismos mais elevados do que centenas; porque se tivesse ainda que fosse uma só unidade de milhares, esta multiplicada por 435 deveria dar por producto pelo menos 4 centenas de milhares; ora o dividendo só contém uma centena de milhar, que não é proveniente senão da multiplicação do divisor pelas unidades inferiores do quociente. O algarismo das centenas no quociente deve ser tal que multiplicado por 435 dê um resultado igual á 1100, ou um numero, que seja o maior multiplo de 435, contido em 1100; o excesso sendo proveniente da multiplicação das dezenas e unidade pelo divisor, o numero que realisa esta condição é 2, este numero representa centenas; 2 centenas$\times 435 = 870$ centenas, e o dividendo contém 1100 centenas: $1100 - 870 = 230$ centenas. Tirando pois o numero 87000 de 110055 o resto

23055 contém o resultado da multiplicação das dezenas e unidades do quociente por 435; tudo se reduz pois agora a achar um numero, que multiplicado por 435 dê um producto igual á 23055: procedendo pois do mesmo modo acharemos o algarismo das dezenas e das unidades. Assim pois, todo o processo consiste em achar o primeiro algarismo do quociente, multiplical-o pelo divisor, tirar o producto parcial do dividendo, e então o resto formará um novo dividendo; depois procurar qual o numero que multiplicado pelo divisor dá um producto igual ou pouco menor que o 2.º dividendo; este producto tirado do 2.º dividendo, apresenta um outro resto, que serve de 3.º dividendo, e proceder com este como com os outros até esgotar o dividendo primitivo. E' preciso separar do dividendo á esquerda algarismos bastantes para que o numero, que elles exprimem contenha o divisor.

Esta operação pode-se dispôr do modo seguinte:

```
110055 |435
 870   |253
 ----
 2305
 2175
 ----
  1305
  1305
  ----
  0000
```

E toma-se os quatro primeiros numeros á esquerda do dividendo para formar o 1.º dividendo parcial, divide-se este numero pelo divisor, escreve-se no quociente o numero 2, e multiplica-se o divisor 435 por 2, e escreve-se por baixo de 1100, o seu producto que é 870, faz-se a subtracção, fica o resto 230, que se escreve, e então á este numero ajunta-se o numero 5 do dividendo principal, e divide-se 2305 por 435, e acha-se assim o segundo algarismo do quociente 5; escreve-se este numero á direita de 2, e tira-se do resto 2805 o producto $435 \times 5 = 2175$, e fica um outro resto 130 ao qual ajunta-se outro algarismo do dividendo, e divide-se 1305 por 435, acha-se o numero 3, que se escreve á direita de 5. 253 é o quociente procurado. Do mesmo modo se pode dividir um numero qualquer por outro.

(67) Os raciocinios precedentes nos conduzem a dar a seguinte regra para effeituar uma divisão qualquer.

1.° Escreve-se o dividendo e à sua direita separado por um risco e na mesma linha o divisor.

2.° Separa-se à esquerda do dividendo o menor numero de algarismos, que forme um numero maior que o divisor; procura-se quantas vezes o divisor é contido neste numero, e escreve-se este numero de vezes, como o primeiro algarismo do quociente por baixo do divisor separado por uma linha horizontal.

(3.°) Multiplica-se o divisor por este primeiro algarismo do quociente, e tira-se este producto do numero, que foi separado à esquerda do dividendo.

(4.°) A' direita do resto desta subtracção escreve-se o primeiro algarismo, que no dividendo vem depois dos que foram separados (2.°): se o resto assim augmentado for maior que o divisor, procura-se quantas vezes contem este ultimo, e escreve-se este numero no quociente á direita do primeiro, e repete-se o mesmo processo (3.°): se o resto assim augmentado è menor que o divisor, escreve-se á sua direita o algarismo, que segue ao que já se escreveo no resto, escrevendo depois o outro etc. até que o numero seja maior que o divisor, tendo cuidado de pôr no quociente tantas cifras quantos são os algarismos, que se ajuntou ao resto menos o primeiro

(5.°) Procede-se do mesmo modo até esgotar o dividendo.

Exemplos:

```
4068 |18            36326599 |1342
36    226           2684      27069
——                  ————
 46                  9486
 36                  9394
——                   ————
 108                  9259
 108                  8052
———                   ————
 000                  12079
                      12078
                      —————
                          1
```

Pode-se fazer a divisão de um modo mais abreviado não escrevendo o producto da multiplicação dos algarismos do quociente pelo divisor, e fazendo logo ao mesmo tempo esta multiplicação, e a subtração subsequente. Seja proposto dividir o numero 12644 por 232; podemos escrever assim a operação:

$$\begin{array}{l|l} 126440 & 232 \\ \hline 1044 & 545 \\ 1160 & \\ 0000 & \end{array}$$

fazendo na mente a multiplicação e a subtracção só escrevemos os restos parciaes. Podemos ainda empregar um outro modo abreviado de dividir; que é o seguinte, pelo qual se faz de uma só vez a multiplicação e a subtração subsequente. Seja proposto dividir 866294 por 1925

$$\begin{array}{l|l} 8662,94 & 1925 \\ \hline 9629 & 450 \\ 00044 & \end{array}$$

Dizemos, o primeiro dividendo parcial 8662 dá por quociente o numero 4; $4\times5=20$, $22-20=2$, escrevemos 2, e continuamos; $4\times2=8$ com 2, que tiramos emprestado á 6, temos $8+2=10$, e $16-10=6$, escrevemos 6; $4\times9=36$ com 1 que tomamos emprestado $36+1=37$; 37 não podendo ser tirado de 6 ajunta-se á este 4 unidades da ordem superior, e então temos $46-37=9$, escrevemos 9; $4\times1=4$, com 4 tomados emprestado temos $4+4=8$; $8-8=0$.

Procedemos do mesmo modo com os outros algarismos do quociente e dividendos parciaes.

(68) A divisão tambem se abrevia quando o dividendo e o divisor acabam por varios zeros, porque então podemos supprimir estas cifras, isto é, tantas quantas contém o numero, que dos dous contém menos; e dividir os outros algarismos do dividendo pelos do divisor: por exemplo para dividir 84000 por 400, podemos reduzir a operação a dividir 840 por 4, e o quociente será o mesmo, pois assim nada se faz senão mudar os nomes das unidades, pois em lugar de 840 centenas, e 4 centenas temos 840 unidades e 4 unidades; e o quociente, que indica quantas vezes 4 unidades de qualquer ordem são contidas em 840 unidades da mesma ordem, é o mesmo sempre.

(69) Quando o divisor contém muitos algarismos podemos

encontrar alguma difficuldade em saber quantas vezes e contido nos dividendos parciaes. Por exemplo na divisão seguinte podemos ver como determinamos os algarismos do quociente

$$
\begin{array}{r|l}
423405 & 485 \\
\cline{2-2}
3880 & 873 \\
\cline{1-1}
3540 & \\
3395 & \\
\cline{1-1}
1455 & \\
1455 & \\
\cline{1-1}
0000 &
\end{array}
$$

Primeiro separamos 4 algarismos à esquerda do dividendo para formar o primeiro dividendo parcial e então não podemos saber logo quantas vezes 485 é contido em 4234, o divisor é um numero >400 e <500, se fosse um ou outro destes numeros só teriamos de procurar quantas vezes 4 ou 5 centenas são contidas em 42 centenas; temos para o 1° 10, e para o 2° 8; é pois entre estes dous numeros que se acha o quociente. Não pode ser 10 porque isto faria suppor, que as unidades de ordem superior ás centenas do dividendo, podem conter o divisor; o que não se dá; resta pois determinar péla experimentação qual dos dous numeros 8 ou 9, empregados como multiplicador de 485, dá um producto menor que 4234, e acharemos que é 8; é pois este o primeiro algarismo do quociente; feita a subtracção, e abaixando o algarismo seguinte do dividendo temos o 2° dividendo parcial sobre o qual operamos do mesmo modo. O unico modo de achar o numero de vezes, que o divisor é contido nos dividendos parciaes é de tomar por este o numero 9, (pois o 1° algarismo do divisor não pode ser contido no primeiro, ou nos dous primeiros algarismos do dividendo mais de 9 vezes) e ir gradualmente diminuindo até achar um numero, que multiplicado pelo divisor dê por producto um numero igual ou menor, que o dividendo parcial, mas que dê por differença um numero menor que o divisor.

(70) Temos um meio de evitar estas experiencias successivas, que são às vezes aborrecidas, e é o seguinte, que pode convir quando temos de dividir dous numeros grandes um

pelo outro. Podemos reduzir a divisão então á uma simples subtração, fazendo primeiro uma tabella contendo os productos do divisor pelos numeros 1, 2, 3.... 9. Por exemplo seja proposto dividir 4539947812346 por 73809: fazemos primeiro a seguinte tabella

1	. . 73809
2	. 147618
3	. 221427
4	. 295236
5	. 369045
6	. 442854
7	. 516663
8	. 590472
9	. 664281

Devemos então proceder do modo seguinte:

```
4539947812346    | 73809
442854           -----------
-------          61509406     64092
 111407                       -----
  73809                       73809
 ------
  375988
  369045
  ------
    694312
    664281
    ------
     300315
     295236
     ------
      507746
      442854
      ------
       64892
```

Procuramos na tabella o multiplo do divisor mais aproximado do 1° dividendo parcial; isto é, o formado pelos 6 primeiros algarismos á esquerda do dividendo; este multiplo corresponde á 6, 6 é pois o primeiro algarismo do quociente. Tirando este multiplo do dividendo parcial e abaixando o algarismo seguinte do dividendo total, procuramos na tabella qual o multiplo, que se aproxima mais deste 2° dividendo parcial, e achamos 1 por 2° algarismo do quociente; continuamos assim a operação até o fim.

(71) Não se altera o quociente de uma divisão quando multiplicamos ou dividimos o dividendo e o divisor por um mesmo numero; $48 \div 8 = 6$, multiplicando por 5 o dividendo e o divisor temos $(48 \times 5) \div (8 \times 5) = 6$; e de facto effectuando as multiplicações temos $240 \div 40 = 6$. Do mesmo modo $36 \div 9 = 4$, dividindo o dividendo e o divisor por 3 temos $(36 \div 3) \div (9 \div 3) = 4$; com effeito $12 \div 3 = 4$.

(72) Multiplicando só o dividendo por um numero, o quociente será tambem multiplicado pelo mesmo numero, e multiplicando o divisor o quociente será dividido pelo mesmo numero. Por exemplo, $24 \div 3 = 8$: multiplicando o dividendo por 2, temos $(24 \times 2) \div 3 = 8 \times 2$; de facto $24 \times 2 = 48$, e $48 \div 3 = 16$, e $16 = 8 \times 2$. Se pelo contrario multiplicamos 3 por 2, $24 \div (3 \times 2) = 8 \div 2$ de facto $2 \times 3 = 6$, e $24 \div 6 = 4$, e $4 = 8 \div 2$.

Se dividimos o dividendo, o quociente é dividido pelo mesmo numero, e se dividimos o divisor; o quociente é multiplicado pelo mesmo numero; $24 \div 3 = 8$; $(24 \div 2) \div 3 = 8 \div 2$, de facto $12 \div 3 = 4 = 8 \div 2$. Se $32 \div 4 = 8$, $32 \div (4 \div 2) = 8 \times 2$; de facto $32 \div 2 = 16 = 8 \times 2$.

(73) Quando se quer executar muitas divisões successivas, a ordem em que se deve effectuar essas divisões é indifferente, pode-se mesmo não fazer senão uma divisão, tomando-se por divisor o producto de todos os divisores. Por exemplo seja proposto dividir 24 por 2 e depois por 3, obtemos por resultado final 4; mas o mesmo resultado se obtem dividindo 24 por 3 e depois por 2, ou emfim dividindo logo 34 por 3×2. De facto $24 \div 2 = 12$, $12 \div 3 = 4$; $24 \div 3 = 8$, $8 \div 2 = 4$, e finalmente $24 \div (2 \times 3) = 24 \div 6 = 4$: o que é evidente á vista do que fica dito dos factores; $24 = 2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 3 \times 2 \times 4$, e como nas divisões o quociente multiplicado pelo divisor deve dar o dividendo $24 = 3 \times 8 = 3 \times 2 \times 4$, $24 = 12 \times 2 = 2 \times 3 \times 4$, e finalmente $24 = 6 \times 4 = 2 \times 3 \times 4$.

(74) Duas quantidades iguaes divididas pela mesma quantidade, ou por quantidades iguaes dão resultados iguaes. Duas quantidades desiguaes divididas pela mesma quantidade ou por quantidades iguaes dão resultados desiguaes.

(75) Não podemos deixar de principiar a divisão pela es-

querda, porque é facil conhecer a parte do dividendo, que contém o producto do divisor pelo algarismo das mais altas unidades do quociente, e se deduzir d'ahi qual é este algarismo, mas os productos parciaes do divisor pelos outros algarismos do quociente, estando confundidos no dividendo não é possivel percebe-los no dividendo total; o que impede de se achar directamente os outros algarismos do quociente, antes de ter obtido o das mais altas unidades. E' indispensavel principiar a divisão pela esquerda.

(76) A prova da divisão acha-se, multiplicando o quociente pelo divisor; e ajuntando o resto, se há: estas operações feitas o resultado deve ser o dividendo.

OBSERVAÇÕES.

(77) Devemos agora passar ás duas operações seguintes, a evolução e involução, mas como são muito complicadas e de pouca utilidade nas applicações usuaes, deixamos para tractar dellas depois.

(78) Temos concluido a parte mais importante da Arithmetica, aquella, que nos ensina a fazer as 4 operações fundamentaes, sommar, diminuir, multiplicar, repartir ou dividir. Estas operações entram em todos os calculos arithmeticos, que nada são senão combinações destas quatro operações.

(79) Todos os numeros podem ser addicionados uns aos outros, e dão em resultado um numero determinado; e assim todo e qualquer numero pode ser sempre formado por addição.

(80) Todos os numeros podem ser diminuidos de um outro numero com tanto que este seja menor, e dão sempre de resultado neste caso um numero determinado; todos os numeros podem ser formados pela subtracção de um numero menor de outro maior; mas não podemos tirar um numero qualquer de outro, pois não se pode tirar de um numero menor outro maior, entretanto podemos representar esta operação mentalmente, e então concebemos numeros de uma especie particular, que se chamam negativos, e que são de grande importancia na algebra.

(81) Todos os numeros podem ser multiplicados por outro qualquer numero, e dão de resultado um numero determinado.

(82) Muitos numeros podem ser divididos por outros nu-

meros, e dão de resultado um numero determinado; mas tambem existem muitos, que não podem ser divididos uns pelos outros, e quando queremos realisar estas divisões, concebemos numeros de uma especie particular, que se chamam fracções.

(83) Temos pois agora que tractar dos numeros negativos e dos fraccionarios; mas antes devemos tractar da divisibilidade dos numeros, e de outras propriedades dos numeros, que dependem desta.

CAPITULO III.

SOBRE A DIVISIBILIDADE DOS NUMEROS.

§ 1.º

Generalidades.

(84) Um numero é multiplo de um outro numero, quando elle o contem um numero inteiro de vezes; isto é, quando o primeiro numero é exactamente divisivel pelo segundo, reciprocamente o 2º numero é um sub-multiplo, uma parte aliquota, ou um divisor do 1.º Assim 24 é um multiplo de 6 porque $4 \times 6 = 24$, e reciprocamente 4, e 6 são divisores, sub-multiplos, partes aliquotas, emfim, factores de 24.

(85) Chamam-se numeros primos os que não são divisiveis exactamente por nenhum, senão a unidade, que é divisor de todos os numeros, e por si mesmo, pois todos os numeros contém à si mesmo uma vez. Os numeros 2, 3, 5, 7, 11, 13, são numeros primos, mas 4, 8, 9, 12, etc. não o são, porque podem ser divididos por 2 e por 3. Dous numeros são primos entre si, quando não tem um divisor commum; isto é, um numero que divida exactamente ambos, senão a unidade. Assim 4, e 9 são primos entre si, e tambem 7, e 12, 12, e 25 etc. Os numeros 8, e 12 não o são por que são ambos divisiveis ao mesmo tempo por 2, e por 4.

Por mais exforços, que se tenha feito para achar a lei destes numeros não se tem podido descobri-la.

Tem-se feito a enumeração d'elles até um milhão, mas para isto é preciso cada vez procurar, se tal numero é ou não divisivel por algum outro numero. E' verdade, que na construcção de taboadas de numeros primos, empregamos meios mais faceis, como veremos adiante. Mas até o presente não se tem achado meio algum de conhecer a *priori* os numeros primos, nem mesmo de se determinar um numero primo de um tamanho que se queira. Entretanto existem alguns theoremas mui curiosos relativos á estes numeros. Eis um, que nenhuma utilidade tem, mas que é notavel pela sua generalidade, e simplicidade. Se um numero é primo o producto de todos os numeros inferiores, mais a unidade é um numero divisivel por elle.

Por exemplo 5 é um numero primo, e $(2\times3\times4)+1=25$ numero divisivel por 5. Se o numero proposto é 7, $(2\times3\times4\times5\times6)+1=720+1=721$, numero divisivel por 7. Seja ainda o numero 11, teremos $(2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10)+1=3628800+1=3628801$, numero divisivel por 11, o quociente sendo 329891. Este bello theorema é sobre tudo curioso, porque sempre se realisa quando o numero é primo, e nunca quando o numero não o é, o que se póde facilmente verificar. Seja por exemplo o numero 4, e $(2\times3)+1=6+1=7$, e 7 não é divisivel por 4, numero que não é primo.

(86) Faremos aqui algumas observações sobre os divisores e os multiplos dos numeros.

1.º Quando muitos numeros tem um divisor commum, a somma d'estes numeros tem o mesmo divisor.

O quociente de cada numero dividido pelo divisor commum, sendo um numero inteiro, a reunião d'estes quocientes é tambem um numero inteiro, que exprime o quociente total da divisão da somma dos numeros propostos pelo divisor commum. Por exemplo os numeros 6, 12, 15, são todos divisiveis por 3, a somma d'estes numeros $6+12+15=33$ é tambem divisivel por 3.

2.º Os divisores de um numero dividem tambem os multiplos d'este numero. O multiplo de um numero póde ser considerado como a somma de muitos numeros iguaès ao numero proposto; 3×4 é o mesmo que a somma de tres numeros iguaes á 4, e assim esta propriedade entra na primeira. O numero 24 sendo divisivel por 8 e dando por quociente 3, 24 multiplicado por qualquer numero, como 5, é divisivel por 8, e de facto $24\times5=120$, é divisivel por 8 e dá por quociente 15.

3.º A somma de muitos multiplos de um numero é um multiplo d'este numero. E' esta outra consequencia de 1.º, pois cada um d'estes multiplos sendo divisivel pelo mesmo numero, de que são todos multiplos, a somma tambem o será, pois deve ter o mesmo divisor.

Os numeros 6, 9, 12 sendo multiplos de 3, a somma $6+9+12=27$ tambem é um multiplo de 3, e de facto $3\times9=27$, o que é tambem evidente considerando que 6, 9, e 12, são respectivamente iguaes á 2 vezes 3, 3 vezes 3, e 4 vezes 3, a somma d'estes numeros será necessariamente igual à 3 repetido $3+2+4$ vezes, isto é, repetido 9 vezes.

4.° Quando um numero é composto de duas partes, todo numero que divide a somma e a primeira parte, divide necessariamente a 2ª parte. A differença entre a somma das duas partes e a primeira parte, é igual á segunda parte. Dividindo a somma e a primeira parte pelo divisor commum os quocientes são numeros inteiros, e a differença d'elles, que é tambem um numero inteiro exprime o quociente da segunda parte, dividida pelo divisor commum, logo a 2ª parte tambem é divisivel pelo mesmo numero. Por exemplo a somma 21 dos numeros 6 e 15 sendo divisivel por 3, e 6 tambem, 15 tambem é divisivel por 3: $15=21-6$, e $21=7\times5$, e $6=2\times3$, logo $15=(7\times5)-(2\times3)=(7-2)\times3=5\times3$.

5.° A differença entre dous multiplos de um numero é um multiplo do mesmo numero. Esta propriedade é uma consequencia da precedente. Por exemplo 21 é multiplo de 3, e 15 tambem multiplo de 3, segue-se que $21-15=6$, é tambem um multiplo de 3, e de facto $21-15=(7\times3)-(3\times5)=(7-5)\times3=2\times3$.

6.° Quando se combinam muitos multiplos do mesmo numero por meio de addições e de subtracções, o resultado é um multiplo do mesmo numero, é isto uma consequencia do 3° e do 4.° Por exemplo se 21, 15, 6, 9 e 12 são multiplos de 3, $21+15+9-12-6=27$; é tambem um multiplo de 3.

7.° Quando um numero é composto de duas partes, e que uma é divisivel por um numero, e a outra não, a somma das duas partes, ou o numero total não é divisivel por este numero, pois se a somma fosse divisivel por este numero, uma de suas partes o sendo, a outra tambem o seria (4°). Por exemplo 24 sendo divisivel por 6, e 7 não o sendo, a somma $24+7=31$; não é divisivel por 6.

8.° Um numero nunca pode ser divisivel por um numero maior que a sua metade. De facto quando se divide um numero por sua metade o quociente é 2; portanto dividindo-o por um numero maior que a sua metade, o quociente será menor que 2, e logo não será um numero inteiro, pois não pode ser igual à unidade.

§ 2.º

Divisibilidade dos numeros.

(87) Antes de entrar no exame da divisibilidade de um numero pelos numeros 2, 3, 4 etc. é preciso ainda fazer aqui algumas reflexões, que nada mais são do que consequencias, do que dissemos na divisão.

1.º Quando o dividendo augmenta ou diminue de um certo numero de vezes o divisor, a parte inteira do quociente augmenta ou diminue do mesmo numero de vezes a unidade; mas o resto da divisão è o mesmo.

Por exemplo a divisão de 38 por 5, dá por quociente 7, e fica um resto 3: se augmentamos o dividendo de 6 vezes o divisor, temos $38+6\times5=38+30=68$, para ser dividido por 5 e achamos, $68=(13\times5)+3=(7+6\times5+3$. Se diminuimos o dividendo 38 de 6×5 temos $38-30=8$, e $8=(1\times5)+3=(7-6)\times5+3$.

2.º Quando se multiplica o dividendo e o divisor por um numero, e que se dividem os productos um pelo outro, a parte inteira do quociente não muda, mas o resto desta nova divisão é igual ao resto da divisão precedente multiplicado pelo numero. Por exemplo a divisisão de 13 por 5 dá no quociente 2 e de resto 3; isto é, temos

$$13=5\times2+3$$

multiplicando por 4 temos $13\times4=5\times2\times4+3\times4$. Se dividimos 13×4 por 5×4 temos

$$\frac{5\times4\times2+3\times4}{5\times4}=\frac{13\times4}{5\times4}=\frac{52}{20}=2$$

e o resto 12, e $52=(20\times2)+12=(5\times4\times2)+12=(5\times4\times2)+3\times4$; assim o resto é o da divisão anterior multiplicado pelo numero por que se multiplicaram o dividendo e o divisor.

(88) O resto da divisão de um numero por 2 é o mesmo que o de seu primeiro algarismo à direita por 2. Seja proposto dividir o numero 1895779 por 2; podemos decompor este numero do modo seguinte: $1895770+9$; a primeira parte $1895770=189577\times10=189577\times5\times2$; por tan-

to é divisivel por 2 exactamente; logo o resto da divisão não pode provir senão da divisão da 2ª parte 9 por 2. Este raciocinio applica-se á um numero qualquer que pode ser sempre decomposto em um certo numero de dezenas, e um certo numero de unidades; as dezenas são sempre divisiveis por 2. Portanto para que um numero qualquer seja divisivel por 2, è preciso e basta, que o seu ultimo algarismo á direita seja um numero divisivel por 2 ou um zero; isto é, que o numero não contenha unidades simples, ou que contenha 2, 4, 6 etc. Os numeros divisiveis por 2 são chamados pares, porque podem ser considerados como compostos de duas partes iguaes: os que não são divisiveis por 2, chamam-se impares. Entre os numeros simples,

1, 3, 5, 7, 9, são impares.
2, 4, 6, 8, são pares.

Quanto aos numeros compostos, todos que acabam á direita por—0,—ou por um dos 4 numeros pares simples são pares, e os que acabam pelos impares simples são impares. Na serie natural dos numeros, estes alternativamente são impares e pares.

(89) O resto da divisão de um numero por 5 é o mesmo que o da divisão de seu ultimo algarismo à direita por 5. Esta proposição prova-se do mesmo modo que a outra. Seja por exemplo o numero 12578 para se dividir por 5. Este numero pode ser decomposto do modo seguinte $12570+8$; $12570=1257\times10=1257\times5\times2$; logo a primeira parte do numero $12570+8$ é divisivel exactamente por 5, e o resto não pode provir senão da divisão da segunda parte por 5. Logo o numero 12578 deixa de resto de sua divisão por 5, o resto da divisão de 8 por este mesmo numero. Todos os numeros podendo ser decompostos do mesmo modo, a proposição é geral.

Para que um numero seja divisivel por 5, é preciso, e basta, que o ultimo algarismo a direita seja divisivel por 5, o que não se dá senão quando o numero termina por 5, pois este é o unico numero simples divisivel por 5, ou por 0, porque então o numero sò contem dezenas, que são sempre divisiveis por 5.

(90) Alem dos caracteres acima apontados, pelos quaes podemos conhecer se os numeros são divisiveis por 2 ou por 5, existem outros pelos quaes podemos saber se são divisiveis por

outros numeros. Assim como decompomos um numero em duas partes, uma composta de dezenas, e outra de unidades simples, podemos separar os dous algarismos à direita, e decompol-o em uma parte composta de centenas, e outra de dezenas e unidades, separar tres algarismos á direita e decompor o numero em duas partes, uma composta de milhares e outra de centenas, dezenas, e unidades etc.

1.° Para saber se um numero é divisivel por 4, basta ver se os dous ultimos algarismos á direita são divisiveis por 4. Por exemplo 34812 é divisivel por 4, porque 12 é disivel por 4. Podemos considerar o numero 34812 como decomposto do modo seguinte $34800+12=348\times100+12$, a primeira parte é divisivel por 4, porque 100 é divisivel por este numero, logo sendo 12 tambem disivivel por 4, o numero inteiro, ou a somma das duas partes é divisivel por 4. Tambem se pode saber se um numero é divisivel por 25 ou não, por esta mesma decomposição; quando os dous ultimos algarismos à direita são divisiveis por 25, o numero inteiro tambem o é, pois a primeira parte é sempre divisivel por 25. Por exemplo o numero 358975 é divisivel por 25, porque 75 é divisivel por 25, de facto $358975=3589\times100+75=3589\times25\times4+75=3589\times25\times4+3\times25$: as duas partes sendo divisiveis por 25, o numero total tambem o é: os unicos numeros divisiveis por 25 são os que acabam por 25, 50, 75, ou duas cifras.

2.° Todo o numero é ou não divisivel por 8, conforme os ultimos trez algarismos á direita são ou não divisiveis por 8: um numero qualquer como 87956168 pode ser decomposto em duas partes do modo seguinte $87956000+168=87956\times1000+168$. A primeira parte é divisivel por 8, pois é igual á $87956\times125\times8$, e se tambem a outra parte é divisivel por 8, o numero total é divisivel por 8. Tambem é divisivel por 125, o numero que acabar por 3 algarismos divisiveis por este numero, pois a primeira parte é sempre divisivel por 125, sendo um multiplo de 1000 que é divisivel por este numero, sendo a segunda parte tambem divisivel, o numero total é divisivel por 125.

3.° Para achar o resto da divisão de um numero por 9 basta addicionar os algarismos propostos, quando a somma dos algarismos é menos de 9, esta somma exprime o resto da divisão do numero por 9, quando è igual á 9 o número è divisivel por 9 exactamente, e quando esta somma é mais que 9 opera-se sobre ella, como sobre o numero, addicionando-se os algarismos, e assim por diante, até que se chegue a uma somma, que não exceda á 9. Para demonstrar esta proposição observaremos, que a unidade seguida de um ou muitos zeros, exprime um multiplo de 9 augmentado de uma unidade $10=9+1$ $100=99+1$ $1000=999+1$, e os numeros 9, 99, 999 etc. são multiplos de 9, pois $9=9\times1$, $99=11\times9$, $999=111\times9$ etc. Daqui resulta que um numero composto de um certo numero de algarismos seguidos de cifras, exprime um multiplo de 9 augmentado destes algarismos. Por exemplo o numero $8000=8\times1000=8\times(111\times9+1)=111\times9\times8+8$ $=888\times9+8$.

Um numero qualquer sendo igual a somma dos numeros expressos por seus differentes algarismos, e cada algarismo significativo exprimindo por sua posição um multiplo de 9 augmentado deste algarismo, pode-se concluir, que todo numero é igual à somma de muitos multiplos de 9 augmentados da somma dos algarismos significativos deste numero. E como a somma de muitos multiplos de 9, é tambem um multiplo de 9, logo um numero qualquer é um multiplo de 9 augmentado da somma de seus algarismos significativos. Por exemplo o numero 856 é o mesmo que $800+50+6$, ora 800 é um multiplo de 9 mais 8, 50 é um multiplo de 9 mais 5, o numero 856 é composto de dous multiplos de 9 mais 8 mais 5 e mais 6, isto é, 856 é um multiplo de 9 augmentado de $8+5+6=19$, ou

$$\begin{aligned}856&=(99+1)\times8+(9+1)\times5+6\\&=(11\times9\times8+8)+(1\times9\times5+5)+6\\&=(11\times8+1\times5)9+8+5+6\\&=(11\times8+1\times5)9+19\end{aligned}$$

Todo numero inteiro é um multiplo de 9 augmentado da somma de seus algarismos significativos. o resto da divisão de um numero por 9 é pois o mesmo, que o resto da divisão da somma dos algarismos significativos por 9. Por consequencia se esta somma é <9, exprime o resto, se é$=9$ exprime que o numero é divisivel por 9, pois o resto é então zero, se é$>$ que 9, opera-se sobre esta somma, como sobre o numero primitivo, isto é, decompõe-se esta somma do mesmo modo. por exemplo no caso presente a somma dos algarismos é igual a 19 numero>9, decompõe-se este numero do modo seguinte $19=10+9=9+1+9=1\times9+9+1=1\times9+1\times9+1$ $=2\times9+1$, o resto é um numero<9.

O numero 35070 dividido por 9 dà o resto 6, porque este numero é=á um multiplo de 9 mais $3+5+7=15$, o resto da divisão de 35070 por 9 é o mesmo que o resto da divisão de 15 por 9, ora 15 é igual á um multiplo de 9 mais $1\times5=6$, o resto da divisão pois é=6. O resto da divsão de 79890360 por 9, é $7+9+8+9+3+6=44$ dividido por 9, ou $4+4=8$. Como os algarismos significativos ignaes á 9 exprimem multiplos de 9, pode-se despresar os 9 na addição dos algarismos do numero proposto, e então no presente exemplo tomando $7+8+3+6=26$, e $2+6=8$ temos o mesmo resultado 8. O numero 20479806 é divisivel por 9, pois $2+4+7+8+6=27$ e $2+7=9$.

Para que um numero seja divisivel por 9 é preciso e basta, que a somma de seus algarismos seja um multiplo de 9.

4.º Para obter o resto da divisão de um numero por 3, forma-se a somma dos algarismos do numero; quando esta somma è>9 addicionam-se os seus algarismos, e continuam-se estas addições successivas até que se chegue á uma somma, que não seja superior á 9. Esta ultima somma diminuida do maior multiplo de 3, que pode conter, exprime o resto da divisão do numero proposto. Nas addições dos algarismos do numero pode-se despresar os multiplos de 3; 3, 6, 9. Com effeito os numeros 10, 100, 1000 etc. são multiplos de 3 augmentados de 1, pois estes numeros decompõe-se em $9+1$, $99+1$, $+999+1$ etc. e 3 dividindo 9, divide tambem as partes 9, 99, 999 racionando como em (3.º) deduzimos, que o resto da divisão de um numero por 3 é o mesmo que o da somma dos seus algarismos signifinativos divididos por 3, o que conduz á regra enunciada acima. O resto da divisão do numero 5369027 por 3 é o mesmo que o resto da divisão de $5+3+6+2+7=14$ por 3, ou de $1+4=5$ por 3, isto é $=5-3=2$. O numero 5721 é divisivel por 3, porque $5+7+2+1=15$, e $5+1=6$, e $6-6=0$.

Para que um numero seja divisivel por 3 é preciso, e basta, que a somma de seus algarismos seja um multiplo de 3.

5.º Para obter o resto da divisão de um numero por 11, calculam-se duas sommas, uma dos algarismos de ordem impar á principiar pela direita, outra dos algarismos de ordem par: da primeira somma augmentada se for preciso de um multiplo de 11, tira-se a segunda; quando o resto desta subtracção è um numero<11, exprime o resto da divisão do numero por 11, quando o resto é>11, opera-se sobre este resto, como sobre o numero primitivo até chegar á um resto

<11, e então este resto exprime o da divisão do numero por 11, quando o ultimo resto é zero, o numero é divisivel por 11.

Principiando pela direita de um numero cada uma das unidades dos algarismos de ordem impar exprime um multiplo de 11 mais 1, e cada uma das unidades dos algarismo de ordem par exprime um multiplo de 11 menos 1: de facto as unidades de ordem impar principiando pelas de terceira ordem tem por valor 100, 10000, 1000000, etc. ora $100=99+1$, $10000=9999+1$, $1000000=999999+1$, assim pois as unidades de ordem impar tem por valor um numero par de noves mais uma unidade, 99 é divisivel por 11, pois é$=9\times 11$, e por consequencia todos os numeros compostos de um numero par de 9 são divisiveis tambem por 11, $9999=9900+99$, $999999=990000+9900+99$, todas as partes destes numeros 99, 9900, 990000 sendo divisiveis por 11; de mais a unidade de primeira ordem pode ser considerada, como um multiplo de 11 mais 1, pois temos $1=11\times 0+1$: as diversas unidades de ordem impar, pois, exprimem multiplos de 11 mais um. As unidades de ordem par, a principiar pela direita, e da quarta ordem tem por valor 1000 100000 etc. isto é 100×10 10000×10 etc, pode-se pois obter os valores destas unidades de ordem par n'uma forma analoga ás de ordem impar, multiplicando por 10 as igualdades $100=99+1$, $10000=9999+1$ etc. o que dá $1000=990+10$, $100000=99990+10$ etc. ora $10=11-1$, temos pois á final $10=11-1$, $1000=990+11-1$, $100000=99990+11-1$, e como os numeros 990, 99990 são divisiveis por 11, segue-se, que todas as unidades de ordem par exprimem multiplos de 11 diminuidos de 1. E' evidente pois que cada uma das unidades de um algarismo de ordem impar tendo por valor um multiplo de 11 mais 1, todo algarismo de ordem impar exprime por sua posição um multiplo de 11 mais este algarismo; no numero 8657, por exemplo, o 3.º algarismo 6 exprime 6 unidades de 3.ª ordem, ou 600, e 100 sendo um multiplo de 11 mais 1, segue-se que 600 é, igual á 6 vezes o multiplo de 11 mais 6, isto é, igual á um multiplo de 11 mais 6. Do mesmo modo cada unidade de um algarismo de ordem par tendo por valor um multiplo de 11 menos 1, pode-se concluir, que todo algarismo de ordem par è um multiplo de 11 menos este algarismos. Destas duas propriedades deduzimos, que todo numero inteiro é multiplo de 11 augmentado da somma dos algarismos de ordem impar, e diminuido da somma dos algarismos de ordem par, pois os numeros expressados pelos algarismos de ordem impar sendo multiplos de 11 augmentados respectivamente destes algarismos, o numero expressado pelo todo dos algarismos de ordem impar é composto da somma destes multiplos de 11 augmentados da somma dos algarismos de ordem impar, o que vem á ser o mesmo que um multiplo de 11 augmentado da somma dos algarismos de ordem impar. Por uma rasão identica, o numero expressado pela totalidade dos algarismos de ordem par è um multiplo de 11 diminuido da somma dos algarismos de ordem par. Ajuntando estas duas partes do numero proposto é evidente, que a reunião dos argarismos de ordem impar e de ordem par, compõe um multiplo de 11 augmentado da somma dos algarismos de ordem impar, e diminuido da somma dos algarismos de ordem par. Quando a somma dos algarismos de ordem impar, nao é menor que a dos algarismos de ordem par, pode-se tirar a 2.ª somma da 1.ª, e o numero proposto è um multiplo de 11 augmentado da differença entre estas duas sommas, de modo que o resto da divisão d'esta differença por 11 é o mesmo que o da divisão do numero proposto por 11. Quando a somma dos algarismos de ordem impar é menor, que a dos de ordem par, podemos fazer entrar este caso no primeiro, augmentando a primeita somma de um multiplo conveniente de 11, pois com isto nada mais se faz do que ajuntar este multiplo de 11 ao numero proposto, o que não muda o resto da divisão do numero por 11 (87, 1.º)

O resto da divisão de 62410 por 11, é $0+4+6+=10$, diminuido de $1+2=3$, isto é $=10-3=7$. O resto da divisão de 6241 por 11, é $1+2=3$ menos $4+6=10$, e como $3<10$, ajuntamos 11, e temos $3+11=14$; assim $14-10=4$ é o resto da divisão de 6241 por 11.

Pelo que precede concluimos, que para que um numero seja divisivel por 11 è preciso e basta, que a differença entre a somma dos algarismosmos de ordem impar, e a somma dos algarismos de ordem par, seja um multiplo de 11 ou zero. O numero 170819 é divisivel por 11, porque $9+8+7=24$, e $1+1=2$, e $24-2=22$, numero que é um multiplo de 11. O numero 48552372 é divisivel por 11. porque $2+3+5+8=18$, e $7+2+5+4=18$, e $18-18=0$.

6.º Os numeros divididos por 7 dão de resto um numero, que tambem se póde determinar sem fazer a divisão, mas o processo precizo para este fim è tão complicado, que melhor é na pratica fazer logo a divisão: mas como é bom conhecer todas as propriedades dos numeros, apresentaremos aqui o modo, porque se póde saber. se um numero é ou não divisivel por 7. 10 dividido por 7 dá de resto 3, 100 dividido por 7 dá de resto 2, ora $100=10\times 10=10^2=(7+3)\times(7+3)=7\times 7+3\times 7+3\times 7+3\times 3$, isto é, igual á um multiplo de 7 mais $3\times 3=9=7+2$, isto é, a um multiplo de 7 mais 2. O resto da divisão de 1000 por 7 é$=3\times 2=6$, o resto de 10000 por 7 é$=6\times 3=18=14+4=2\times 7+4$, logo è igual a 4. O resto da divizão de 100000 por 7 é$=4\times 3=12=10+2$ por tanto o resto final é $3+2=5$. O resto da divizão de 1000000 é $5\times 3=15=10+5$, logo é igual a $3+5=8$, e finalmente a $8-7=1$, assim pois

$\frac{10}{7}$ dá de resto 3

$\frac{100}{7}=\frac{10^2}{7}$ dá de resto 2

$\frac{1000}{7}=\frac{10^3}{7}$ dá de resto 6

$\frac{10000}{7}=\frac{10^4}{7}$ dá de resto 4

$\frac{100000}{7}=\frac{10^5}{7}$ dá de resto 5

$\frac{1000000}{7}=\frac{10^6}{7}$ dá da resto 1

assim pois dividindo 10 por 7 o resto è 3, e dividindo 100 ou 10^2 por 7 o resto è $3\times 3=3^2$, ou antes $9-7=2$, do mesmo modo o resto de 1000 dividido por 7 ou de $\frac{10^3}{7}$ é $2\times 3=6$ etc., multiplicando cada resto por 3 e tirando 7 sendo possivel, obtem-se os restos successivos 1, 3, 2, 6, 4, 5, da divisão por 7 dos numeros, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, mas chegado à 10^6 o resto é $5\times 3=15$, ou antes $15-14=1$.

Uma vez que se encontra um dos restos precedentes é uma consequencia do calculo, que conduz á estes resultados consecutivos, que serão reproduzidos periodicamente, de modo que levando por diante indefinitamente as divisões por 7 das potencias successivas de 10, se acharão sempre estes restos na mesma ordem. Os numeros 1, 3, 2, 6, 4, 5, que se reproduzem continuamente são o que se chama o periodo. Por exemplo, se queremos saber qual o resto da divizão de 10^{29} acharemos, que é o mesmo que o de 10^5, tirando os multiplos de 6 comprehendidos em 29, pois que o periodo tem 6 termos; este resto é 5. O resto de 10^{25} é o mesmo que de 10, ou 3. Podiamos á *priori* suppor este periodo, pois os restos da divisão por 7 sendo menores que 7 não podem ser senão os 6 seguintes 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas apresentando-se n'uma ordem differente: não podemos achar de resto 0, a divisão não podendo ser exacta, segue-se pois que depois de 6 divisões ao mais devemos achar outra vez um dos restos já obtidos, e então principia omesmo periodo, pois que reproduzimos as mesmas multiplicações pelos primeiros restos. Assim pois, seja qual for o divisor de 1, 10, 10^2, 10^3 etc. com excepção das potencias de 2 e de 5, os restos successivos formarão sempre um periodo, que será composto de termos em numero menor, que as unidades do divisor.

Do que fica dito acima é evidente que um numero qualquer dividido por 7 dá de resto o producto de cada um de seus algarismos multiplicado á principiar pelo 2.º á direita por 3, por 2, por 6, por 4, por 5 e por 1. Se a somma destes productos é um multiplo do 7 o numero é divisivel por 7. Por exemplo 791 é divisivel por 7. e provamos isto do modo seguinte.

$$\begin{array}{r} 791 \\ 231 \\ \hline 1=1\times1 \\ 27=3\times9 \\ 14=2\times7 \\ \hline 42=\text{somma.} \end{array}$$

Escrevemos o numero, e por baixo das dezenas o numero 3, das centenas o numero 2, dos milhares o numero 6, das dezenas de milhar o numero 4, das centenas de milhar 5, dos milhões 1 etc., e principiamos de novo a mesma serie de numeros, e multiplicamos cada algarismo do numero pelo numero correspondente, sommamos os productos, e se esta somma é um multiplo de 7 o numero é divisivel por 7, quando o resto é um numero maior que 7 podemos repetir a mesma operação á seu respeito, e no exemplo acima temos.

$$\begin{array}{r} 42 \\ 31 \\ \hline 2=2\times1 \\ 12=2\times4 \\ \hline 14=\text{somma.} \end{array}$$

que é evidentemente um multiplo de 7, mas podemos ainda fazer a mesma operação

$$\begin{array}{l} 14 \\ 31 \\ \hline 4=4\times 1 \\ 3=3\times 1 \\ \hline 7=\text{somma.} \end{array}$$

e assim chegamos sempre á um resultado igual á 7.

7.° Um numero é divisivel por 6, quando o é por 2, e que a somma de seus algarismos é divisivel por 3, porque então o numero é divisivel por 2 e 3, e portanto pelo producto $2\times3=6$. (73)

8.° Do mesmo modo é divisivel por 18, se é divisivel por 2 e por 9. E' divisivel por 12 se o é por 3 e por 4, por 36 se é divisivel por 4 e por 9. Emfim um numero é divisivel por 15, ou por 45 se é divisivel ao mesmo tempo por 5 e por 3, ou por 9.

§ 3.°

Numeros primos.

(91) Já definimos o que se entende por numeros primos (85), agora fazendo uso das proposições demonstradas em § 2°, deste capitulo podemos determinar todos os numeros primos. Seja por exemplo proposto formar uma taboa de numeros primos de 1 até 1000. Escrevemos todos os numeros desde 1 até 1000 na sua ordem natural da esquerda para a direita, e então suprimimos.

1.° Todos os numeros pares excepto 2, isto é, todos os numeros terminados por 0, 2, 4, 6, 8, pois estes são divisiveis por 2.

2.° Todos os numeros terminados á direita por 0, ou por 5, porque são divisiveis por 5, conservando porém o numero 5.

3.° Todos os numeros, que dão por somma de seus algarismos um multiplo de 3, pois são divisiveis por 3, conservando porém o numero 3.

4.º Todos os numeros que dão por differença entre a somma de seus algarismos de ordem impar, e a de seus algarismos de ordem par um multiplo de 11, ou zero, pois são divisiveis por 11, guardando porém 11.

Tirados todos estes numeros, já a serie dos 1000 primeiros numeros, fica muito reduzida, pois nenhum destes numeros pode ser primo. Estas suppressões feitas, podemos jà concluir, que todos os numeros entre 1, e 7×7=49, que não foram supprimidos são primos, pois que o menor multiplo de 7 que resta, não pode ser senão 7×7, pois os multiplo de 7 por 2, 3, 4, 5, 6, jà foram tirados. assim conhecemos jà todos os numeros primos de 1 até 47 inclusivamente. Agora devemos tirar todos os numeros, que são divisiveis por 7 á principiar por 49, o que se faz experimentado a divisão logo, pois é isto mais facil, que o caracter dado para saber, se um numero è divisivel por 7.

Os numeros não supprimidos até 11×11=121 são todos primos, pois jà foram tirados todos os multiplos de 11 por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, logo todos os numeros primos desde 1 até 113 são conhecidos. Tirando todos os multiplos de 11. principiando de 11×11=121, podemos concluir, que todos os numeros não supprimidos desde 113 até 167 numero primo immediatamente inferior á 169=13×13, são numeros primos, e assim por diante. Assim com muita rapidez podemos formar uma taboa de numeros primos.

Outro modo de formar uma taboa de numeros primos é o seguinte. Escrevem-se todos os numeros impares, pois os pares são divisiveis por 2, e não são primos, e depois contam-se os numeros de tres em tres, e riscam-se como diviziveis por este numero, depois de cinco em cinco a principiar de 5, de 7 em 7 á principiar de 7 etc. e assim por diante seguindo a serie dos numeros impares. 3, 5, 7, $\overline{9}$, 11, 13, $\overline{15}$, 17, 19, $\overline{21}$, 23, $\overline{25}$, $\overline{27}$, 29, 31, $\overline{33}$, $\overline{35}$, 37, $\overline{39}$, 41, 43, $\overline{45}$, 47, $\overline{49}$, $\overline{51}$, 53, $\overline{55}$, $\overline{57}$, 59, 61, $\overline{63}$, $\overline{65}$, 67, $\overline{69}$, 71. 73. $\overline{75}$, $\overline{77}$, 79, $\overline{81}$, 83, $\overline{85}$, $\overline{87}$, 89, $\overline{91}$, $\overline{93}$, $\overline{95}$, 67, $\overline{99}$, 101, 103, $\overline{105}$, 107, 109,

Depois procedemos assim principiando de 3, contamos 5, 7, 9, e riscamos este como 3.º, e assim por diante, riscando todos os terceiros numeros, (pois todos são multiplos de 3.) Os numeros impares vão sempre crescendo de 2 unidades, de modo que $5=3+2$, $7=3+4$, e $9=3+6$, por tanto é um multiplo de 3. $11=3+8$, $13=3+10$, e $15=3+12$, este é um multiplo de 3 e assim todos os numeros de 3 em 3, são multiplos de 3. Do mesmo modo principiando de cinco em cinco a direita de cinco todos os numeros impares são $=5$ mais um multiplo de 2, isto é, tantas vezes 2 quantas unidades tem a sua ordem depois de cinco, de modo que o 5.º numero depois de $5=5+5\times2=5\times10$ e é por tanto divisivel por 5, e assim todos os mais de 5 em 5. O mesmo se pode mostrar á respeito de 7, 11, 13, etc.

§ 4.º

Maior commum divisor entre dous numeros ou mais.

(92) Dous numeros, que não tem um divisor commum, são primos entre si, como 10 e 21, porque $10=2\times5$, e $21=3\times7$. Os factores, e os divisores, que são numeros primos, tomam os nomes de factores e divisores primos. Assim 35 sendo o producto dos factores primos 5 e 7, estes dous numeros são os factores primos de 35, ou os divisores primos de 35.

O maior de todos os divisores communs a dous ou muitos numeros, chama-se o maior commum divisor d'estes numeros.

(93) Temos agora que mostrar, como podemos achar o maior commum divisor de dous ou mais numeros.

1.º O maior commum divisor de dous numeros. Seja proposto achar o maior commum divisor de 170 e 96. Um commum divisor d'estes dous numeros é todo numero, que devide ao mesmo tempo um e outro numero, o maior commum divisor d'estes dous numeros, é o maior numero, que divide ambos estes numeros: este numero não pode ser maior que o menor dos dous. Devemos pois ver, se 96 divide exactamente 170, porque no caso de dividir, é elle o maior commum divisor, dividindo pois 170 por 96, achamos, que é contido uma vez, ficando o resto 84, logo $170=96\times1+84$, e assim certificamo-nos, de que 96 não é o maior commum divisor: e a vista da igualdade acima e de (86, 4.)º o maior commum divisor de 170 e de 96 é o maior numero, que divide 170 e 96, ora para que um numero divida um todo e uma de suas partes, é preciso que tambem divida a outra parte: assim a questão está reduzida à achar o maior numero, que divide ao mesmo tempo 96 e 84, e se acharmos um numero, que divida estes dous, dividirá tambem 170, e se for o maior divisor commum destes numeros, será tambem o maior commum divisor de 170 e 96. Temos pois de proceder com 96 e 84 como com os dous numeros propostos: o maior commum divisor de 96 e 84 não pode ser >84, e dividimos 96 por 84, porque no caso de ser exacta esta divisão, 170 tambem é divisivel por 84, e este numero é o maior commum divisor procurado: achamos que a divisão não é exacta, e que $96=84\times1+12$. Fazendo sobre esta igualdade os mesmos raciocinios, que fizemos sobre a primeira, é evidente, que o maior commum divisor de 84 e 12, é tambem o maior commum divisor de 170 e 96. Fazendo a divisão de 84 por 12 achamos que $84=7\times12$, isto é que 12 divide exactamente 84. Logo sendo 12 o maior commum divisor de 12 e 84, é por tanto o maior commum divisor de 84 e 96, e de 96 e 170, pois $96=7\times12+12=(7+1)\times12=8\times12$, e $170=8\times12+7\times12=(8+7)\times12=15\times12$.

O mesmo raciocinio sendo applicavel á quaesquer numeros, como é facil verificar, concluimos, que todo divisor commum de dous numeros divide o resto da divisão destes numeros um pelo outro, e que o maior commum divisor de dous numeros, é o mesmo que o que existe entre o menor dos dous numeros e o resto da divisão do maior pelo menor; e o maior commum divisor entre o menor numero, e o resto da divisão, é o mesmo que o maior commum divisor entre o resto, e o resto da divisão do menor pelo 1.º resto etc. Podemos dispor o calculo do modo seguinte:

Quocientes	1	1	7
Dividendos	170	96	84
Divisores	96	84	84
Restos	84	12	0

Regra geral: para achar o maior commum divisor de dous numeros, divide-se um pelo outro, divide-se depois o divisor pelo resto, e continua-se assim á fazer do divisor dividendo, e do resto divisor, até que se encontre um divisor exacto, este será o maior commum divisor procurado.

Observação 1.ª Todo divisor commum de dous numeros, divide os restos successivos, que se obtem procurando o maior commum divisor destes dous numeros, e o maior commum divisor de dous numeros é o mesmo, que o de dous restos successivos quaesquer.

Observação 2.ª Podemos pois concluir—

1.° Que todo divisor commum de dous numeros, divide o seu maior commum divisor. Assim os numeros 312 e 132 são ambos divisiveis, por 1, 2, 3, 4, 6 e 12, e o maior commum divisor destes numeros, 12, é tambem divisivel pelos mesmos numeros. Os factores communs á dous numeros são factores do seu maior commum divisor.

2.° A operação para achar o maior comum divisor de dous numeros, conduzindo à restos successivamente decrescentes, deve-se chegar necessariamente á um divisor exacto, ainda que este seja a unidade; neste caso os dous numeros propostos são primos entre si.

3.° O maior commum divisor devendo dividir os restos successivos que se obtem na operação, se achamos um resto, que é primo, e que não divide o resto anterior, ou se achamos dous restos successivos, que sabemos serem primos entre si, podemos concluir, que os numeros propostos são primos entre si.

Observação 3.ª O numero de divisões precisas para achar o maior commum divisor de dous numeros não pode exceder à metade do menor dos dous numeros propostos. De facto quando chegamos à dous restos successivos, que differem um do outro de uma unidade, dividindo estes restos um pelo outro devemos achar de resto 1; o que indica que os numeros dados não tem um commum divisor, ou são primos entre si; por consequencia todas as vezes, que os numeros propostos tem um commum divisor, outro que a unidade, os restos successivos diminuem, ao menos de duas unidades em cada divisão, o que prova a propriedade enunciada.

Observação 4.ª Se na operação para achar o maior commum divisor, reconhecemos que um numero divide dous restos successivos, isto é, um dividendo e um divisor, podemos supprimi-lo n'um e n'outro, e continuar a operação tendo o cuidado de multiplicar o commum divisor achado à final por este factor supprimido. Se reconhecemos que um resto tem um factor primo, que não divide o resto precedente, podemos supprlmi-lo, sem alterar o commum divisor procurado.

Observação 5.ª Quando conhecemos os restos successivos, que fornece a operação para achar o maior commum divisor de dous numeros, podemos deduzir os restos da operação para achar o maior commum divisor entre os productos dos dous numeros propostos por um numero dado, multiplicando por este numero todos os restos obtidos na primeira operação. Assim procurando o maior commum divisor de 48 e 17, achamos os restos 14, 3, 2, 1, 0. Para achar o maior commum divisor de 48×5 e 17×5 os restos são 14×5, 3×5, 2×5, 1×5, 0×5.

Observação 6.ª O maior commum divisor de dous numeros divide todos os restos dados pela operação para achar este maior commum divisor; procuremos os quocientes successivos da divisão dos restos pelo maior commum divisor.

Sejam os numeros entre os quaes procuramos o maior commum divisor 2961 e 799: temos

$$\begin{array}{cccccc}
2961 & \left\{\dfrac{799}{3}\right. & \left\{\dfrac{564}{1}\right. & \left\{\dfrac{235}{2}\right. & \left\{\dfrac{94}{2}\right. & \left\{\dfrac{47}{2}\right. \\
63 & 17 & 12 & 5 & 2 & 1
\end{array}$$

Na 1.ª linha estão os restos successivos; na 2ª os quocientes das divisões destes restos uns pelos outros: agora queremos saber quantas vezes 47, maior commum divisor de 2961 e 799, é contido em cada um destes restos. E' contido uma vez em 47, e 2 vezes em 94, escrevemos 1 por baixo de 47 e 2 por baixo de 94. Temos $235=2\times94+47$, logo $\frac{235}{47}=2\times\frac{94}{47}+\frac{47}{47}=2\times2+1=5$, escrevemos este numero por baixo de 235. Este numero foi obtido multiplicando os numeros escriptos por baixo de 94, e ajuntando ao producto 1, que fica á direita na ultima linha. Do mesmo modo para obter o quociente de 564 por 47 temos $564=2\times235+94$, logo $\frac{564}{47}=2\times5+2=12$; escrevemos este numero por baixo de 564 continuamos a multiplicar entre si os dous numeros, que ficam por baixo do numero da 1.ª linha, e ajuntando o que lhe fica a direita. Eis a serie dos calculos principiando de 5.

$$2\times2+1=5,\ 2\times5+2=12,\ 1\times12+5=17,\ 3\times17+12=63$$

Este calculo será de grande utilidade em outras partes das mathematicas, e jà aqui serve para compor dous numeros para os quaes se da um commum divisor; o numero de divisões precisas para acha-lo, e os quocientes successivos. Depois de ter escripto estes quocientes formando a segunda linha, se deduz a 3ª linha pelo methodo acima; emfim tomando os dous maiores resultados, e multiplicando pelo factor commum proposto estes dous numeros.

Exemplos:—seja proposto achar o maior commum divisor entre 216 e 408

	1	1	8
408	216	192	24
216	192	192	
192	24	10	

24 é o maior commum divisor entre 216 e 408.

Exemplo 2.º Procure-se o maior commum divisor entre 342 e 843.

Exemplo 3.º Procure se o maior commum divisor entre 36 e 42.

Exemplo 4.º Procure-se o maior commum divisor entre 243 e 450.

Exemplo 5.º Procure-se o maior commum divisor entre 575 e 4500.

2.º O maior commum divisor de 3 ou mais numeros.

Este se deduz facilmente da operação precedente. Por exemplo para obter o maior commum divisor de 48, 18 e 15, procuramos primeiro o maior commum divisor de 48 e 18, que é 6, e depois o maior commum divisor de 6 e 15, que é 3, e concluimos, que 3 é o maior commum divisor dos tres numeros dados. De facto todo divisor commum de 48, 18 e 15 devendo dividir 48 e 18, divide necessariamente 6, (1. Observação 2.ª) e como tambem divide 15 segue se que divide 6 e 15, mas 6 sendo factor commum á 48 e 18, todo divisor commum de 6 e 15 divide tambem 48, 18 e 15. O maior commum divisor de 48, 18 e 15 é pois o mesmo que o de 6 e 15. Assim o maior commum divisor de tres numeros, é o mesmo que o de um destes tres numeros, e o maior commum divisor dos dous outros.

Todo divisor de tres numeros divide tambem o 3º numero, e o commum divisor dos dous outros, e o maior commum divisor dos dous outros e do 3.º numero, é o maior commum divisor dos tres numeros. Isto é, todos os divisores de 48, 18 e 15 dividem 6, 15, e dividem o maior commum divisor de 6 e 15 que é o maior commum divisor de 48, 18 e 15.

Todo divisor commum de tres numeros, divide pois o maior commum divisor destes numeros.

O que temos dito de 3 numeros se pode dizer de 4, 5, etc. Para achar o maior commum divisor de muitos numeros, basta procurar o maior commum divisor successivamente do 1.º e do 2.º numero, do maior commum divisor dos dous primeiros, e do 3.º numero, do maior commum divisor dos tres primeiros numeros e do 4.º, e assim por diante atè o ultimo numero. O maior commum divisor achado na ultima operação é o maior commum divisor de todos os numeros dados.

Exemplo 1.º Procura-se o maior commum divisor entre 1908, 986 e 530 Resposta. . . 18

Exemplo 2.º Qual è o maior commum divisor entre 324, 612 e 1032? Resposta. . . . 22

Exemplo 3.º Qual è o maior commum divisor de 15, 18, 21, 24 e 27. Resposta. . . , 3

Observação 1.ª Todo numero, que divide o producto de dous numeros, se è primo com um dos factores divide necessariamente o outro factor. Supponha-se que o numero 6 divide o producto $35 \times 12 = 410$, e que é primo para com 35, então deverá 6 dividir o outro factor 12. E de facto, pois que 35 e 6 são primos entre si, segue-se que se applicarmos à estes numeros o processo para achar o maior commum divisor, devemos chegar depois de um certo numero de divisões à um resto igual á 1. Em lugar de fazer o calculo com 35 e 6 faça-se a mesma operação com 35×12 e 6×12 n'esta nova operação, para achar o maior commum divisor de 35×12 e 6×12, devemos achar de resto final 1×12 (95 1.º observ. 5.ª) isto è, 12. Ora todo o numero, que divide dous outros numeros divide o seu maior commum divisor (93. 1.º Obs 2.ª); 6 divide 35×12 por hypothese, e evidentemente 6×12, logo divide o resto 12.

Observação 2.ª Todo o numero primo, que divide exactamente um producto, deve dividir um dos seus factores. Seja o producto 18×35, e supponha-se, que 7 um numero primo, é divisor deste producto, segue-se que é necessariamente divisor de um dos dous factores 18 ou 35. Se 7 não divide, por exemplo 18, segue-se que é primo relativamente á este numero, e então deverá dividir o outro factor (observ. 1.ª).

O mesmo se póde dizer de muitos factores, isto é, se um numero for divisor de um producto, deverá dividir necessariamente um dos seus factores. Supponha-se que o numero 5 divide o producto $15\times12\times8$, deverá dividir um dos factores 15, 12, ou 8, porque podemos considerar este producto como composto de dous factores 8 e 15×12. Se 5 não divide 8 deve dividir 15×12, e então como 5 divide 15×12 deve dividir um dos dous factores 15 ou 12, e se não divide 12, deverà dividir 15.

Observação 3.ª Todo o numero primo, que divide uma potencia qualquer de um numero, deve dividir o numero. Por exemplo: se um numero primo divide a 2.ª potencia de 9, isto é, $9\times9=81$, deve dividir o numero 9, isto é evidente; porque $81=9\times9$, é um producto composto de dous factores iguaes, e para que o producto seja divisivel por um numero, este deve dividir um dos factores, e por tanto para que 3 divida 81, é preciso que divida um de seus dous factores, ou antes ambos porque são iguaes.

Observação 4.ª Todo numero, que è primo com os factores de um producto o é tambem com o producto. Pois que um numero primo, que divide o producto deve dividir um de seus factores, e por tanto não pode ser primo com todos os factores.

Observação 5.ª Quando um numero é formado pela multiplicação de muitos outros não pode ter outros factores primos, senão os que entram nos numeros que servem de factores ao numero dado. De facto seja o numero 1920 formado pela multiplicação dos numeros $10\times4\times6\times8$, todo numero primo que divide $10\times4\times6\times8$, e não divide um dos factores 8, deve dividir o producto $10\times4\times6$, do mesmo modo todo numero primo que divide o producto $10\times4\times6$ e não divide 6 deve dividir o producto 10×4, e por consequencia 10 ou 4.

Observação 6.ª Todo numero divisivel por dous ou mais numeros primos entre si é divisivel pelo producto destes numeros.

Seja o numero 180 divisivel pelos numeros 5, 3, 2, então é divisivel por $5\times3\times2=30$, De facto já que o numero 5 divide 180, segue-se que $180=\frac{180}{5}\times5=36\times5$ e $\frac{180}{5}$ é um numero inteiro, mas por hypothese 3 tambem divide o numero

180, logo divide 36×5, e como é primo com 5 divide 36, portanto $36=\frac{36}{3}\times3=12\times3$; pois $\frac{36}{3}$ é um numero inteiro; logo $180=36\times5=12\times3\times5$, é divisivel por 3×5 Ora 2 dividindo o numero proposto 180, divide o producto $12\times3\times5$, e como é primo com 3 e com 5, o é com 3×5, e divide por tanto o outro factor 12; logo $12=\frac{12}{2}\times2=6\times2$ pois $\frac{12}{2}$ deve ser um numero inteiro, e por tanto concluimos que $180=6\times2\times3\times5$, e que 180 é divisivel por $2\times3\times5=30$. Este raciocinio applica-se á qualquer outro exmplo semelhante.

§ 5.°

Decomposição em factores primos de um numero qualquer, e determinação de todos os divisores de um numero.

(94) Para decompor um numero dado em seus factores primos, divide-se o numero proposto successivamente por cada um dos numeros primas 2, 3, 5 etc, que não excedem a sua metade, até que se obtenha um quociente exacto.

Se nenhuma destas divisões pode ser effectuada concluimos, que o numero é primo, e não pode ser decomposto em factores. Se porem uma destas divisões tem lugar divide-se de novo o quociente pelo mesmo numero; se o novo quociente é exacto, repete-se a mesma operação, até que se chegue á um quociente, que não seja mais divisivel por este primeiro numero, e procede-se então com este ultimo quociente como com o numero primitivo, observando, que o numero não poderá ser divisivel senão por numeros primos superiores aos que já foram empregados, como divisores. Continua-se assim até chegar á um quociente que seja um numero primo. O numero proposto é igual á este ultimo quociente multiplicado por todos os numeros primos, que serviram de divisores. Seja proposto achar os factores primos ou simples do numero 1155. Este numero não é divisivel por 2, pois é impar; é divisivel porém por 3 porque $1+1+5+5=12=3\times4$: fazendo a divisão temos $\frac{1155}{3}=385$, e $1155=385\times3$. A questão agora está reduzida à achar os factores primos de

385, este numero não é divisivel por 3; mas o é por 5, pois termina á direita por um 5, e feita a divisão achamos $\frac{385}{5}=77$ e $335=5\times77$, e $1155=3\times5\times77$.

Agora temos que decompor 77 em seus factores primos 77 não é divisivel por 5, mas é divisivel 7, pois $\frac{77}{7}=11$, e este quociente sendo um numero primo segue-se que,

$$1155=3\times5\times7\times11$$

e por consequencia 3, 5, 7, 11, são os factores primos de 1155.

Esta operação escreve-se do modo seguinte:

Seja proposto decompor em seus factores primos o numero 5880. Escreve-se este numero, e á sua direita se risca uma linha vertical

5880	2
2940	2
1470	2
735	3
245	5
49	7
7	1

Ao lado deste numero á direita da linha se escreve o divisor, e por baixo do numero o quociente; depois á direita do 1.º quociente um outro divisor superior ou o mesmo e por baixo o 2.º quociente, e assim por diante: achamos que $5880=2\times2\times2\times3\times5\times7=2^3\times3\times5\times7$.

(95) Para determinar todos os divisores de um numero decompõe-se primeiro o numero em seus factores primos ou simples; estes divisores, e seus productos dous á dous, tres á tres, quatro á quatro etc., são os divisores do numero dado. Seja proposto achar todos os divisores do numero 1155

1155	3
385	5, 15
77	7, 21, 25, 105
11	11, 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155.

Procura-se primeiro os divisores primos pelo modo acima ensinado. Os outros divisores acham-se formando os productos dous á dous, tres á tres etc. dos numeros 3, 5, 7, 11, para isto, multiplica-se o 2.º divisor pelo 1.º e escreve-se o producto 15 ao lado direito de 5; multiplica-se o 3.º divisor 7 por cada um dos divisores precedentes 3, 5, 15, e escreve-se 21, 35, 105, á direita de 7; depois multiplica-se o 4.º divisor 11 pelos divisores precedentes, e os productos são escriptos á sua direita.

(96) Quando dous numeros acham-se decompostos em seus factores primeiros, é mui facil deduzir o seu maior commum divisor. Para isto basta formar um producto no qual cada um dos factores primeiros d'estes dous numeros entram tantas vezes quantas elle se acha n'aquelle dos dous numeros, em que entra menos vezes.

Por exemplo, os numeros 90, 126 decompostos em factores primeiros são:

$$90=2\times3\times3\times5 \qquad 126=2\times3\times3\times7$$

O maior commum divisor d'estes numeros é $2\times3\times3=18$. Do mesmo modo se deduz o maior commum divisor de tres ou mais numeros.

(97) Para determinar o menor numero divisivel por numeros dados, decompõe-se os numeros em seus factores primeiros, e forma-se depois um producto no qual cada um d'estes factores primeiros entra tantas vezes quantas entra n'aquelle dos numeros dados em que entra mais vezes.

Acha-se assim que o menor numero divisivel por 90, 126, 540 é

$$2\times2\times3\times3\times3\times5\times7=3780$$

$$\begin{aligned}\text{Pois } 90&=2\times3\times3\times5\\ 126&=2\times3\times3\times7\\ 540&=2\times2\times3\times3\times3\times5\end{aligned}$$

O menor numero divisivel por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, é 2520.

(98) Para se decompor um numero em seus factores, precisamos saber quaes são os seus menores divisores; ora é mui facil conhecer os numeros divisiveis por 2, 3, e 5, mas os que são divisiveis por 7, 11, 13, etc. não podem ser conhecidos sem que se experimente a divisão, pois os caracte-

res de sua divisibilidade por estes numeros são difficeis de verificar, e exige esta verificação calculos tão laboriosos como a divisão directa.

OBSERVAÇÃO.

(99) Antes de passarmos adiante será bom mostrar aqui certas operações, que servem para verificar a exactidão dos resultados das quatro operações fundamentaes da arithmetica, chamadas provas, e que são fundadas sobre certas propriedades dos numeros.

Quando se divide dous numeros, e o seu producto por um mesmo numero, obtem-se tres restos o producto dos dous primeiros restos deve ser igual ao 3º resto; no caso de ser menor, que o numero, que se tomou por divisor commum; e se é maior diminuido do maior multiplo do divisor, que contem, deve deixar um resto igual ao resto do producto dos dous numeros, dividido pelo divisor commum.

Consideremos os numeros 31, 65, e $31 \times 65 = 2015$, e seja o divisor commum 9. Os restos da divisão d'estes numeros por 9, são 4, 2, 8, ora $2 \times 4 = 8$, resto do producto de 31×65 dividido por 9. De facto

31 é=a um multiplo de 9 mais 4.
65 é=á um multiplo de 9 mais 2.

O producto de 31×65 é composto de 4 productos parciaes, provenientes da multiplicação das duas partes de 31 pelas duas partes de 65; isto é, composto do producto dos dous multiplos de 9, que entram nos dous numeros, do producto do multiplo de 9, que entra em 65 multiplicado por 4, do producto de 2 multiplicado pelo multiplo de 9, que entra em 31, e do producto 2×4. Por consequencia o producto total de 31×65 é um multiplo de 9 mais 4×2. O resto da divisão de $31 \times 65 = 2015$, deve ser pois 4×2, producto dos restos das divisões de 31 e 65 por 9.

(100) Esta propriedade dos numeros nos conduz à um modo facil de tirar a prova da multiplicação, e da divisão, á que se dá o nome de provas por noves, e por 11, porque são estes os numeros, empregados como divisores communs, por ser mui facil achar os restos da divisão de um numero qualquer por um d'estes dous numeros.

Na prova por 9, procuram-se os restos das divisões do multiplicando, do multiplicador, e do producto por 9: o producto dos restos do multiplicando, e do multiplicador, diminuido do maior multiplo de 9, que possa conter; é igual ao resto do producto da multiplicação, que se quer verificar.

A prova por 11 se faz do mesmo modo. Seja proposto verificar se com effeito 472878 é o producto da multiplicação de 567 por 834.

1.ª Prova, por 9. Devemos procurar os restos das divisões d'estes tres numeros por 9, e depois multiplicar os restos de 567 e 834 um pelo outro; o resultado dividido por 9, deve dar um resto igual ao resto de 472878 dividido por 9. Os restos d'estes tres numeros divididos por 9, são 0,6,0, o que se acha sommando os seus algarismos. e supprimindo os 9: ora $6\times0=0$, resto do producto, logo a multiplicação é correcta.

2.ª Prova por 11. Procuram-se os restos das divisões de 567, 834, e 472878 por 11, que são 6, 9, 10, (90, 5°), depois multiplicando 6 por 9, devemos ter por producto um numero igual a 10, ou que dividido por 11 dê um resto igual á 10, de facto $6\times9=54$, e $\frac{54}{11}=4\times11+10$, assim por esta prova tambem achamos, que não houve erro na multiplicação.

O resto da divisão de um numero por 9 não muda, quando este numero augmenta ou diminue de um multiplo de 9; por tanto se o effeito produzido pelo erro da operação, é tal que o resultado de uma multiplicação é maior ou menor do que devia ser, de um multiplo de 9, a prova por 9 não pode fazer descobri-lo. Por exemplo supponha-se, que querendo multiplicar 47 por 12, achamos por erro 582; a prova por 9 não indica o erro, pois os restos dos factores são 2 e 3, do producto 6, e $2\times3=6$. Entretanto a operação está errada, porque $47\times12=564$. A differença entre este resultado e o primeiro é $582-565=18=9\times2$.

Por uma rasão semelhante a prova por 11 tambem falha, quando o erro é igual á um multiplo de 11.

Quando as provas por 9, e por 11 estão de accordo, e não indicam erro, é muito provavel, que o resultado obtido é exacto, pois se existisse um erro, para não ser apercebido seria preciso, que fosse igual á um multiplo de $9\times11=99$. As provas não servem senão para augmentar a probabilidade da exactidão dos resultados, sem poderem produzir uma certeza absoluta; porque em todo caso, pode-se sempre suppor, que é possivel, que fazendo a operação para tirar a prova de uma operação já realisada se commettam erros, que neutralisem os que se acham já no resultado, e assim ficarão estes desapercebidos; mas é evidente, que não é muito provavel que fazendo duas operações differentes, para chegar ao mesmo resultado se façam erros iguaes e oppostos de modo á neutralisarem constantemente uns aos outros.

As mesmas operações pelas quaes podemos tirar as provas de 9 e de 11 de uma multiplicação, servem para tirar as provas de uma divisão. O dividendo diminuido do resto da divisão, quando o ha, deve ser igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente, deste modo considerando o dividendo assim preparado, como producto, e o divisor e quociente, como factores deste producto, podemos fazer uso das operações acima para verificar a exactidão do quociente.

(101) Tambem se pode empregar a prova por 9 para verificar a exactidão de uma addição, ou de uma subtracção. Seja por exemplo á verificar a somma seguinte:

$$\begin{array}{rl} 6903 & (6 \\ 7854 & \\ 953 & \\ 7327 & \\ \hline 23037 & (6 \end{array}$$

Tiram-se os 9 de todas as addições consecutivamente, como se formassem um só numero, e assenta-se o resto; faz-se o mesmo com a somma. Se o resto não for o mesmo, de ambas as partes, é prova infallivel, que a conta está errada; pois não é possivel, que a somma seja igual ás addições, quando dividindo ambas estas quantidades iguaes pela mesma quantidade 9 os restos não são iguaes.

Se porém estes restos são iguaes, não é certo, que a conta está exacta, mas muito provavel, porque pode ser que a conta tenha um erro igual á 9, ou á um multiplo de 9. Procede-se do modo seguinte para tirar a prova de 9 da addição acima. Sommam-se os algarismos de todas as parcellas, despresando os 9, e diminuindo as sommas parciaes de 9, todas as vezes, que são maiores que este numero: assim $6+3=9$, tirando-se 9 fica 0; então $0+7+8=15$, $15-9=6$, $6+5=11$, $11-9=2$, $2+4=6$, $6+5=11$, $11-9=2$, $2+3=5$, 5+7=12, 12—9=3, 3+3=6, 6+2=8, 8+7=15, 15—9=6. Agora fazendo o mesmo na somma achamos: 2+3=5, 5+3=8, 8+7=15, 15—9=6.

Para tirar a prova por 9 da diminuição de dous numeros, procura-se o resto da divisão por 9 do subtrahido, e dos dous outros numeros juntos, estes dous restos devem ser iguaes.

Seja proposto verificar a subtracção seguinte

$$\begin{array}{r l}
20064 & 3 \\
\left.\begin{array}{r} 17487 \\ \hline 2575 \end{array}\right\} & 3
\end{array}$$

O resto do numero 20064 deve ser o mesmo que o dos numeros 17489+2575; pois o primeiro não é senão a somma destes ultimos. Procede-se assim: 2+6=8, 8+4=12, 12—9=3, resto 3; 1+7=8, 8+4=12, 12—9=3, 3+8=11, 11—9=2, 2+2=4, 4+5=9, 9—9=0, 7+5=12, 12—9=3 resto 3.

CAPITULO IV.

Das quatro operações arithmeticas sobre numeros negativos.

(102) Já dissemos (n.° 80) que a subtracção dá origem á uma especie particular de quantidades chamadas negativas. Estas quantidades resultam da generalisação da ideia de subtracção, quando consideramos, que a subtracção de um numero qualquer de um outro numero qualquer, deve sempre dar por resultado um 3° numero; quando o numero, que tem de ser tirado de outro, é o maior dos dous, não podemos achar por differença senão um numero negativo. Por exemplo, seja proposto tirar 9 de 5; a differença entre estes dous numeros é 4; assim depois de termos tirado de 5, cinco unidades, ainda temos de tirar mais 4, o que não se pode fazer; mas podemos exprimir esta subtracção á fazer por meio da expressão—4, que indica um numero negativo; e assim dizemos 5—9=—4. As quantidades negativas são de muita importancia nas partes mais elevadas da sciencia mathematica; na algebra daremos uma ideia mais completa destas quantidades.

O modo porque se representam os bens de um homem pode servir para nos dar uma ideia gêral, do que se entende por quantidades negativas n'um sentido concreto. Exprime-se geralmente por numeros positivos e precedidos do signal + o que um homem possue, e as suas dividas são representadas por numeros negativos e precedidos de —. Assim, quando dizemos, que um homem possue 300 contos de rèis, mas que deve 60 contos de réis, isto significa, que possue 300—60=240 contos. Assim podemos considerar os numeros negativos como representando dividas, e os positivos como representando bens effectivos; e podemos neste sentido dizer, que as quantidades negativas são menores, que nada, porque quando um homem nada possue e deve 50 contos de réis, dizemos com muita exactidão, que possue menos do que nada, porque se alguem lhe desse 50 contos de réis, esse homem ficaria na realidade mais rico, do que era, entre tanto ficaria possuindo —0— apezar de possuir mais 50 contos do que dantes Assim pois os numeros positivos são maiores do que nada. e os negativos são menores do que nada. Os numeros positivos são formados, ajuntando-se à zero uma unidade, depois mais uma unidade etc. e assim por diante atè o infinito, o que dá origem á serie dos numeros naturaes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc. Se em vez de continuar assim esta serie por addições successivas da unidade, a continuassemos no sentido contrario por meio de subtracções successivas da unidade, teriamos a seguinte serie de numeros negativos; 0,—1,—2,—3,—4,—5,—6,—7,—8,—9,—10 etc. até o infinito; assim como—1 é menos que 0, devemos considerar—2, menor que 1,—8, menor que—6 etc.

(103) Depois destas ideias geraes sobre as quantidades negativas, podemos passar a mostrar como se fazem sobre estas quantidades negativas, as quatro operações fundamentaes da Arithmetica.

(104) Addição. Para addicionar numeros positivos e negativos, é preciso generalisar o sentido, que temos dado até agora à addição, pois os signaes + e—antes dos numeros, indição realmente addições, ou subtrações parciaes. Consideremos pois a addição de muitos numeros positivos e negativos, como tendo por fim achar um só numero positivo ou negativo, que exprima o resultado das addições e das subtracções parciaes indicadas pelos signaes+,e—,que affectam os numeros empregados, e este resultado será chamado a somma dos numeros propos-os, porque de facto não é senão a reunião em um só todo de to-

das as quantidades dadas, umas positivas e outras negativas: dous casos se apresentão; ou todos os numeros, que temos de addicionar tem o mesmo signal +ou—; ou os numeros, que queremos addicionar, são affectados de differentes signaes, isto é, uns são positivos, e outros negativos.

1.º Todos os numeros positivos, ou todos negativos; á respeito da addição de numeros todos positivos nada temos á dizer aqui; já no capitulo 2º tractamos amplamente desta materia. Para obter a somma de muitos numeros todos negativos, ajuntam-se estes numeros pelo methodo da addição ordinaria, fazendo abstracção dos signaes, e affecta-se a somma do signal—. Por exemplo, seja proposto achar a somma dos numeros —5,—7,—3; procuramos a somma de 5+7+3=15, e affectamos 15 do signal —, e assim achamos, que a somma destes numeros=—15. O que indicam os numeros —5,—7, —3, è que devemos tirar de um aggregado qualquer, 5, depois mais 7, e depois ainda mais 3, o que vem a ser o mesmo, que tirar deste aggregado logo 15.

2.º Numeros uns positivos, outros negativos. Para obter a somma de dous numeros, um positivo e outro negativo, procura-se a differença entre estes dous numeros, e affecta-se esta differença do signal do maior dos dous numeros. Por exemplo seja proposto achar a somma de +9 e—5; procura-se a differença 9—5=4, e escreve-se o resultado +4, porque 9 > 5. O objecto desta operação é ajuntar a um aggregado qualquer 9, e depois tirar deste todo 5; isto é o mesmo, que ajuntar ao aggregado logo de uma vez 4. Se pelo contrario os numeros dados fossem +5,—8, teriamos de ajuntar ao aggregado qualquer 5, e depois tirar do todo 8, isto é o mesmo que tirar logo do aggregado 3; assim 5—8=—3, como 9—5=4. Nestes dous casos a somma é verdadeiramente uma differença, e a addição é uma subtracção,

Para achar a somma de muitas quantidades positivas e negativas, calcula-se separadamente a somma de todos os numeros positivos, depois de todos os numeros negativos, e tira-se a menor destas sommas da maior; o resto affectado do signal da maior somma, é o resultddo ou a somma dos numeros dados.

Por exemplo seja proposto achar a somma dos numeros +9—3+8—5; teremos 9+8=17, e 3+5=8, então achamos 17—8=9; e como 17 é positivo e 8 é negativo, 9 é positivo; de facto o que queriamos fazer por esta somma era ajuntar á um aggregado 9, depois do todo tirar 3, depois ajuntar 8, e finalmente tirar 5; ora tudo isto vem a ser o mesmo que ajuntar de uma sò vez 9; a somma dos numeros acima pois é $+9$. Seja proposto achar a somma dos numeros $-8+5+3-9-4$; fazemos as duas sommas parciaes $5+3=8$, e $8+9+4=21$; tiramos a differença, $21-8=13$, e affectamos 13 do signal —, porque a somma maior 21 é negativa. Quando temos uma expressão composta de uma serie de numeros, ligados entre si pelos signaes $+$ e —, fazendo successivamente as operações parciaes, indicadas por estes signaes, de um termo á outro, achamos sempre no fim um numero positivo ou negativo, que representa o resultado final das operações parciaes; esta operação chama-se reduzir a expressão proposta à sua forma a mais simples. Por exemplo $2-3+8-5+2$, pode'ser reduzido á sua mais simples expressão, assim, de 2 tiramos 3, e temos -1, de 8 tiramos 1 e temos 7; de 7 tiramos 5 e temos 2, á 2 ajuntamos 2 e temos 4, este numero é a mais simples expressão de $2-3+8-5+2=4$.

Assim pois, ajuntar um numero negativo a um numero positivo, è o mesmo que fazer uma subtracção; isto é, diminuir o numero positivo de um certo numero; de facto, ajuntar aos bens de um homem uma divida é o mesmo, que diminuir estes bens do valor da divida.

(105) Subtracção. Esta operação deve ser considerada, como tendo por fim, conhecendo a somma de dous numeros, e um destes numeros, achar o outro Para achar o resto de uma subtracçao basta escrever o numero, que se quer subtrahir, adiante do numero, do qual se quer subtrahir, com o signal mudado, para o opposto; o resultado reduzido á mais simples expressão é o resto procurado. Seja proposto subtrahir 5 de 7, o que queremos é achar um numero, que addicionado á 5, forme um numero igual á 7. Este numero é $7-5=2$; porque $7-5+5=7$; o que se fez para achar este numero foi pôr 5 affectado do signal — adiante de 7, e reduzir a expressão a sua mais simples forma 2. Seja agora proposto subtrahir -5 de -7; tracta-se de achar um numero, que addicionado à -5, forme um numero igual a -7; para isto escreve-ve $+5$ adiante de -7, e reduz-se a expressão a sua mais simples forma, $-7+5=-2$, porque $-7+5-5=-7$. Ou por outra $-7=-7+5-5$; tirando deste todo -5, ficam $-7+5=-2$.

Seja proposto subtrahir—5 de $+7$: aqui o que queremos é achar um numero, que addicionado á -5 dê um resultado igual á $+7$; este numero é $7+5=12$, porque $7+5-5=7$; tirando-se -5, ficam $7+5=12$. Seja ainda proposto tirar 5 de—7; temos que achar um numero, que addicionado a 5, dê um numero igual a -7; este numero é $-7,-5$, porque$-7-5+5=-7$, tirando $+5$ ficam$-7-5=-12$. Assim pois nos casos em que subtrahimos numeros de signaes contrarios um do outro, a differença é a somma dos dous numeros, affectada com o signal do numero subtrahido. De facto tirar dos bens de um homem uma divida, é o mesmo, que augmentar estes bens de um valor, igual a divida; tirar dos bens de um homem uma porção de seus bens, é o mesmo que augmentar suas dividas de uma quantidade igual á que se tirou de seus bens.

(106) MULTIPLICAÇÃO. A multiplicação tem por fim formar um numero, que seja composto com um numero dado, do mesmo modo, que um outro numero dado é composto com a unidade.

1.º Multiplicador positivo. Quando o multiplicador é positivo, o producto tem o mesmo signal, que o multiplicando, isto é, positivo ou negativo, conforme o multiplicando é positivo ou negativo. Neste caso o multiplicador sendo composto da addição de um certo numero de unidades, o producto deverá ser composto da addição do mesmo numero de vezes o multiplicando, ora a addição de muitos numeros affectados do mesmo signal, dà uma somma affectada do mesmo signal; logo o producto é positivo ou negativo, conforme o multiplicando é positivo ou negativo. Seja proposto achar o producto de $+2$ multiplicado por $+5$, temos $+2\times+5=+10$; e de facto o multiplicador 5, é um numero composto da addição de 5 unidades; o producto deverà ser um numero composto da addição de cinco numeros iguaes á $+2$, isto é, $+10$. Seja proposto multiplicar—2, por $+5$; tambem raciocinando do mesmo modo temos$-2\times+5=-10$; pois o producto deve ser um numero composto pela addição de 5 numeros iguaes a -2, o que é igual a -10.

2.º Multiplicador negativo. Quando o multiplicador é um numero negativo o producto tem o signal contrario ao do multiplicando; é positivo se o multiplicando é negativo; negativo se o multiplicando é positivo. O multiplicador negativo sendo composto da subtracção de muitas unidades, o producto deve ser composto da subtracção de um igual numero de vezes o multiplicando, o que vem a ser o mesmo que a somma destas mesmas vezes o multiplicando com o signal mudado; pois para subtrahir um numero basta mudar-lhe o signal; assim o producto deverá sempre ter um signal contrario ao do multiplicando. Seja proposto multiplicar $+2$ por -6; temos pois de formar um numero pela subtracção de 5 vezes $+2$; isto é, este numero deverá ser composto da addição de 5 vezes $-2=-10$. Seja proposto multiplicar -2 por -5, temos de formar um numero por meio da subtracção de -2, 5 vezes, isto é, pela addição de 5 vezes $+2=10$.

Assim pois o producto de dous numeros é positivo, quando ambos são positivos, ou ambos negativos; e o producto é negativo quando os numeros são um positivo e outro negativo; $+3\times+3=9$, $-3\times-3=9$, $+3\times-3=-9$, $-3\times+3=-9$.

Quanto aos numeros formados pela multiplicação de muitos factores negativos, estes são positivos ou negativos, conforme o numero de factores é par ou impar; $-3\times-2\times-5\times4=+120$; $-3\times-2\times-5\times-4\times-6=-720$.

(107) Divisão.—A divisão tem por fim, conhecendo o producto de dous numeros, e um dos factores achar o outro. Por esta definição é evidente, que o quociente de dous numeros positivos é positivo, que o quociente de dous numeros negativos é positivo, e que o quociente de dous numeros de signaes contrarios, é negativo. Por exemplo $\frac{+9}{+3}=+3$ pois $+9=\times3\times+3$; que $\frac{-9}{-3}=+3$; porque $-9=+3\times-3$, ... que $\frac{-9}{+3}=-3$, porque $-9=+3\times-3$; que finalmente $\frac{+9}{-3}=-3$, porque $+9=-3\times-3$. O divisor multiplicado pelo quociente deve ser sempre igual ao dividendo.

(108) As quantidades negativas representam quantidades que produzem effeitos oppostos aos que produzem as positivas, mas por isso não deixam de ser quantidades reaes. Supponhamos, que uma pessoa é credora de uma outra da quantia de 100 mil reis; é esta uma quantia real, que tem de receber; mas se ao mesmo tempo deve a uma outra pessoa 100 mil reis, esta é outra quantia real, que tem de pagar. As duas dividas reunidas porém formam para este homem um capital nullo, pois desta reunião resulta, que nada tem a receber, nem à pagar. Este zero porém é um nada proporcional, pois resulta da opposição das duas quantidades. E' para in-

dicar esta opposição real entre duas quantidades, que os mathematicos fazem uso dos signaes $+$ e $-$. Como uma opposição desta especie é reciproca, vê-se, que uma destroe a outra inteiramente ou parcialmente, sem que por isso as quantidades precedidas de $+$ sejam mais reaes do que as precedidas de $-$. Supponhamos um navio navegando de Liverpool para Philadelphia, e sejam representados com o signal $+$ todos os espaços, que anda para o Occidente, e pelo signal $-$ os que anda para o Oriente em sentido contrario á sua destinação, e que em 7 dias faz o caminho seguinte: (os numeros indicando milhas,) $+12+7-3-5+8=19$ milhas. As quantidades marcadas $-$ não são negativas, senão como oppostas em direcção ás que são marcadas $+$ quando tem de serem reunidas em um só aggregado.

CAPITULO V.

DAS FRACÇÕES.

§ 1.º

Noções geraes.

(109) O numero é a relação de duas quantidades da mesma especie, e serve para dar a medida de uma d'estas quantidades em relação á outra, considerada como termo de comparação, e á qual se dá então o nome de unidade. Os numeros podem variar ao infinito, ao passo que as quantidades comparadas variam, e se consideramos como constante a unidade, e que a quantidade á medir cresça de um modo continuo, de zero até o infinito, sua relação com a unidade deverá semelhantemente crescer de um modo continuo, e todos os numeros poderão assim ser engendrados. Entre estas relações as mais notaveis são aquellas, que tem lugar, quando a quantidade variavel se compõe exactamente de varias partes iguaes á unidade; n'este caso os numeros chamam-se inteiros, o mais pequeno é o que representa a igualdade da quantidade com a unidade.

(110) Quando a quantidade, que se quer comparar com a unidade é menor, que esta unidade, os numeros, que representam esta comparação tomam o nome de fracções. A ideia de numeros inteiros refere-se pois immediatamente a de igualdade, que é a mais simples de todas as relações. Para referir as frac-

ções aos numeros inteiros concebe-se a unidade, e a quantidade á medir, como decompostas em partes do mesmo tamanho, e os dous numeros inteiros, que resultam d'esta comparação, são compostos um em relação ao outro, do mesmo modo, que as duas quantidades correspondentes, e a relação entre elles é por consequencia a mesma. Exprimem-se pois as fracções por meio de dous numeros, dos quaes um indica em quantas partes iguaes a unidade foi dividida, e o outro, quantas d'estas partes entram ou são contidas na quantidade, que se quer medir. Pode porém acontecer, que esta ultima não tenha uma medida commum com a unidade; isto é, que não exista quantidade, por menor que seja, que possa ser contida exectamente n'ella, e na unidade; e é o que acontece em muitos casos. N'estes casos, a relação entre os numeros inteiros não dá senão uma approximação, que pode porem ser tão grande, quanto se queira, pois dividindo a unidade em partes de mais à mais pequenas, e referindo as á quantidade, que se quer medir, o resto pode ser sempre menor, que uma d'estas partes, e poderá por tanto ser menor, que todo tamanho dado qualquer; a relação, que se obtem assim despresando este resto, poderá pois se aproximar tanto quanto se queira da verdadeira. Supponhamos, que queremos determinar uma distancia tomando por unidade o palmo: o modo de conseguirmos isto, é applicar o palmo sobre a distancia principiando por uma extremidade, uma, duas, tres &c. vezes, atè chegar à outra extremidade; ora aqui apresenta-se dous casos;talvez se ache, que o palmo é contido um certo numero de vezes n'esta distancia, 20, por exemplo, e então dizemos, que a distancia é de 20 palmos; talvez porem, o palmo não se applique um numero certo de vezes sobre esta distancia, que depois de o termos applicado um certo numero de vezes, fique ainda por resto uma distancia menor que o palmo, por exemplo, talvez se ache, que a distancia, que queremos medir contem 16 palmos, e que fica um resto, uma distancia, que não chega á um palmo; n'este caso para se determinar a distancia è preciso ajuntar aos 16 palmos uma fracção de palmos, para avaliar este resto, esta fracção, e poder compara-la com a unidade, devemos conceber a unidade, isto é, o palmo, dividido em duas partes iguaes, se o resto for igual a uma d'estas duas partes, dizemos, que a distancia é de 16 palmos e meio; se o resto é maior ou menor, que a metade do palmo, devemos dividir a unidade, em vez de em duas partes iguaes, em tres, quatro etc. partes iguaes, e ver se uma ou mais destas partes podem ser contidas um numero certo de vezes na distancia restante; dividindo a unidade cada vez em um maior numero de partes, chegamos forçosamente a determinar este resto em um numero certo de partes de palmo, ou em um numero tão aproximado quanto se queira.

(111) A nomenclatura das fracções é baseada sobre a maneira de as conceber que acabamos de mostrar. A fracção, que resulta da divisão da unidade em duas partes iguaes chama-se uma metade; em tres partes iguaes um terço; em 4 partes iguaes um quarto; em 5 um quinto; em 6 um sexto; em 7 um septimo; em 8 um oitavo; daqui por diante convencionou-se applicar-se aos mais numeros a terminação avos; assim a unidade dividida em 9 partes iguaes dá origem a fracção, que chamamos 9 avos, e que representa a nona parte da unidade; se a unidade é dividida em 11, 12, 13, etc. partes chamamos estas partes onze avos, doze avos, treze avos etc. Exceptuam-se os casos em que a unidade se divide em 10, 100, etc. partes iguaes, que se chamão decimos, centesimos etc. Para exprimir uma fracção são precisos dous numeros; 1.°, um que indique em quantas partes iguaes a unidade fundamental é dividida, 2.° um que indique quantas destas partes iguaes da unidade contem a fracção.

Estes dous numeros escrevem-se um por cima do outro separados por uma linha horizontal: assim 3 quartos escreve-se $\frac{3}{4}$, 4 quartos $\frac{4}{4}$ etc.

O numero, que indica em quantas partes se dividio a unidade chama-se denominador, e escreve-se por baixo.

O numero que serve para mostrar quantas destas partes contem a fracção, chama-se numerador, e escreve-se por cima.

O denominador serve para mostrar a especie da fracção e todas as que tem o mesmo denominador são da mesma especie, pois referem-se á mesma unidade, que é uma parte determinada da unidade fundamental.

O numerador serve para mostrar o valor da fracção, indicando quantas unidades contém, e para poder se comparar uma fracção com uma outra da mesma especie, ou de mesmo denominador. Na fracção $\frac{6}{8}$, 6 é o numerador, 8 o denominador, 8 indica em quantas partes se dividio a unidade, 6 que se tomarão 6 destas partes: a fracção $\frac{5}{8}$ indica, que se tomaram 5 partes iguaes á uma oitava parte da unidade, $\frac{6}{8}$ e $\frac{5}{8}$ são fracções da mesma especie, uma contendo 6, e a outra 5 unidades, cada uma destas unidades sendo igual á oitava parte da unidade fundamental. Quando os denominadores são differentes, as fracções são de especies differentes, como $\frac{5}{9}$ e $\frac{4}{7}$ pois a primeira contém 5 unidades iguaes á nona parte da unidade fundamental; e a segunda 4 unidades iguaes á septima parte da unidade fundamental.

O numerador e o denominador chamão-se tambem os dous termos da fracção.

(112) Tractando da divisão mostramos, que esta operação nem sempre pode ser effectuada exactamente, pois nem sempre o divisor é contido um certo numero de vezes no dividendo, muitas vezes feita a divisão fica um resto; isto è, nem todos os numeros são compostos de um multiplo de um numero qualquer exactamente. Na taboada da multiplicação encontramos exemplos do que dizemos aqui; esta taboada não contem senão os productos dos 9 primeiros numeros, multiplicados uns pelos outros dous á dous, e não contem todos os numeros comprehendidos entre 1 e 81, e assim vemos, que muitos numeros existem, que não podem ser divididos por um dos 9 primeiros numeros, mesmo dentro destes limites. O methodo para dividir dous numeros um pelo outro exposto n'este compendio, não serve, em um grande numero de casos, senão para achar o maior multiplo do divisor contido no dividendo. Por exemplo, se quisermos dividir 56 por 8, acharemos por quociente 7, pois $7\times8=56$, e a divisão se fará exactamente; mas se quisermos dividir 57 por 8, acharemos por quociente o mesmo numero e teremos um resto igual á 1; pois $7\times8+1=57$, e veremos, que 8 não è contido exactamente um certo numero de vezes em 57; pois não é contido 7 vezes porque $7\times8=56$, nem 8 vezes porque $8\times8=64$, e destes dous productos um é menor, e outro maior que 57; e assim certificaremo-nos que 57 divididos por 8 tem por quociente um numero que fica entre 7, e 8, pois contem $7\times8=56$, e fica uma unidade de resto; para dividir 57 exactamente em 8 partes seria preciso dividir este resto em 8 partes; ora 1 dividido em 8 partes è 1 oitavo que é uma fracção que se representa por $\frac{1}{8}$, logo é preciso ajuntar ao quociente 7 um oitavo, ou $\frac{1}{8}$, e o quociente exacto de 57 divididos por 8 è $7\frac{1}{8}$.

O mesmo raciocinio se pode fazer sobre qualquer divisão, que deixe um resto, e nestes casos o quociente se compõe de duas partes, uma formada de unidades inteiras, e outra, que não se pode obter senão decompondo as unidades do resto em tantas partes quantas unidades contem o divisor, e tomando tantas destas partes quantas unidades contem o resto. Assim pois a divisão engendra quantidades, que differem dos numeros inteiros formados primitivamente pela addição successiva da unidade a si mesma. Ja vimos, que a divisão de 57 por 8 dá por quociente um numero, que não é nem 7 nem 8, mas que fica entre estes dous numeros maior que 7, e menor que 8. O mesmo acontece em muitas outras divisões; por exemplo na divisão de 3 por 4, não podemos achar no quociente, senão um numero entre 0 e 1, ou menor que a unidade, e estes novos numeros nada são senão fracções. Para podermos formar uma idéia exacta do quociente que se acha dividindo 3 por 4 é preciso considerar como indicando a 4.ª parte de 3, mas não podemos decompor 3 em 4 partes, sem decompor a unidade fundamental, de modo que nos é necessario suppor esta unidade decomposta em unidades menores, ou em partes componentes. Por exemplo supponndo-se, que a unidade é composta de quatro partes iguaes, cada uma destas partes é um quarto da unidade, e como então 3 unidades são equivalentes á 3 vezes quatro quartos, ou á 12 quartos, a divisão de 3 unidades por 4, dá o numero fraccionario 3 quartos, porque em 12 quartos 4 é contido 3 vezes e por tanto a quarta parte de 12 quartos é 3 quartos. A divisão de 3 por 2 nos conduz ao numero fraccionario trez metades, porque dividindo a unidade em duas partes iguaes, 3 unidades contem 6 destas partes, e o quociente deste numero dividido por 2, é 3 metades, pois 2 vezes 3 metades fazem 6 metades, ou 3 unidades inteiras. Todo numero fraccionario maior que a unidade se compõe de duas partes, das quaes uma é um numero inteiro, e a outra um numero fraccionario menor que a unidade. Por exemplo $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$; Assim toda a theoria das fracções se reduz á theoria dos numeros fraccionarios menores que a unidade que são propriamente fracções. As fracções pela sua origem são sempre numeros menores que a unidade, mas muitas vezes os calculos nos conduzem a numeros maiores, que a unidade, expressados de uma mesma forma que as fracções, que são fracções improprias, ou expressões fraccionarias.

Assim uma fracção pode ser considerada, ou como indicando o quociente da divisão do numerador pelo denominador ou como exprimindo que a unidade foi dividida em tantas partes iguaes, quantas são as unidades do denominador, e que se tomaram tantas destas partes, quantas são as unidades do numerador.

Neste compendio de agora em diante as fracções serão consideradas, debaixo de um destes dous pontos de vista, conforme for mais conveniente para a investigação de suas propriedades, pois em ambos os casos os resultados são os mesmos. E' por esta rasão, que as fracções são representadas pelo mesmo signal que a divisão, de modo que $\frac{5}{6}$ quer dizer ao mesmo tempo, cinco sextos, ou o quocieute de 5 dividido por 6.

(113) Resumindo o que temos dito sobre as fracções:

1.° Uma fracção é uma quantidade que representa uma parte, ou partes de uma unidade, ou de um todo.

2.° Uma fracção consiste de dous numeros: o numerador e o denominador. O denominador mostra em quautas partes se divide a unidade; e o numerador quantas destas partes se tomam. Devemos considerar a unidade como divisivel em tantas partes quantas se queira.

3.° Uma fracção, cujo denominador é maior que o numerador, é uma fracção propriamente dita, e representa um numero menor que a unidade, como $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}$.

4.° Uma fracção, cujo numerador é igual ao denominador, é igual á unidade; isto è, $\frac{5}{5}=1, \frac{8}{8}=1, \frac{3}{3}=1$. O que é evidente, pois tendo se dividido a unidade em um certo numero de partes, toma-se o mesmo numero destas partes, o que vem a ser o mesmo que tomar a unidade inteira; dividir um em tres partes, e depois tomar tres destas partes é o mesmo que tomar um. Considerando estas fracções como uma divisão tambem é evidente, que um numero dividido por si mesmo dá por quociente a unidade; pois todos os numeros são contidos em si mesmo uma vez.

5.° Se o numerador é maior quo o denominador a fracção é maior que a unidade. Neste caso a unidade è dividida em um certo numero de partes, e toma-se um numero maior destas partes; por tanto toma-se a unidade, e mais algumas destas partes; por exemplo $\frac{7}{6}$ é uma quantidado maior que a unidade, pois esta sendo dividida em 6 partes tomam-se 7 destas partes, o que faz uma unidade, e mais um sexto da unidade;

pois 6 sextos é o mesmo que 1. Tambem é evidente, que 7 dividido por 6 dá por quociente 1 e um resto, logo o quociente é maior que a unidade. As fracções em que o numerador é igual ou maior que o denominador, chamam-se fracções improprias, ou numeros fraccionarios; considerando-se, como verdadeiras fracções as que representam quantidades menores, que a unidade.

6.º Um numero composto de um numero inteiro e de uma fracção chama-se numero mixto, como $3\frac{1}{2}$, que quer dizer 3 unidades e um terço da unidade.

7.º Todo numero inteiro pode tomar a forma fraccionaria dando-se-lhe por denominador a unidade; por exemplo 5 e 6, podem ser representados por $\frac{5}{1}$ e $\frac{6}{1}$; o que é evidente, pois todo numero dividido pela unidade dá por quociente o mesmo numero.

8.º Todo numero qualquer pode ser representado por uma fracção, ou antes por um numero fraccionario, e da especie, que se queira; pois a unidade, pode ser representada por um numero qualquer tendo por denominador o mesmo numero (113,4º) como $\frac{12}{12}=\frac{36}{36}=\frac{81}{81}=1$; e um numero inteiro qualquer pode ser representado por um numero fraccionario, tendo por numerador este numero, e por denominador a unidade (113,7º); é pois claro que podemos dividir a unidade em quantas partes quizermos, com tanto que se tome em lugar da unidade do numerador um numero de partes iguaes ás, em que se dividio o denominador, isto é, multiplicando o numero pelo mesmo numero, que se toma para denominador. Por exemplo, o numero 5 pode ser representado por um numero fraccionario da especie, que se queira, como por oitavos, porque $5=\frac{5}{1}$, ora dividindo a unidade em 8 partes iguaes, cada unidade fica valendo 8 oitavos; assim temos por denominador de $\frac{5}{1}$, 8 em vez de 1, logo sendo o numero 5 unidades, e cada unidade valendo 8 oitavos, segue-se que o numero deve conter 5 vezes 8 oitavos, logo $\frac{5}{1}=\frac{40}{8}=5$.

9.º Chama-se fracção composta, ou complexa, uma fracção, como $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$; esta expressão significa, que consideramos $\frac{5}{6}$ como um todo, do qual queremos achar os tres quartos; isto é, que dividimos $\frac{5}{6}$ em 4 partes iguaes, e tomamos tres destas partes.

(114) Uma fracção varia no mesmo sentido, que seu numerador; e em sentido contrario de seu denominador; isto é, augmenta quando o numerador augmenta, e quando o denominador diminue; e pelo contrario, diminúe quando o numerador diminùe, e quando o denominador augmenta. Por exemplo as fracções $\frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}$ etc. vão em augmento, cada uma é maior que aquella, que a precede; pois a unidade sendo dividida em 9 partes iguaes a primeira fracção é formada por 3 destas partes, a seguuda por 4, a terceira por 5 etc., e como em cada uma se toma um maior numero das mesmas partes da unidade, devem formar aggregados maiores. As fracções $\frac{3}{9}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{4}$, tambem são fracções, que vão em augmento, pois a 1.ª consta de 3 partes cada uma igual á uma nona parte da unidade, a 2.ª de 3 partes, cada uma igual a uma 5.ª parte da unidade etc.; ora a 5.ª parte da unidade é evidentemente uma quantidade maior que a 9.ª parte da unidade, e por tanto $\frac{3}{9}<\frac{3}{5}$ etc. Do mesmo modo se mostra, que diminuindo o numerador a fracção diminue, $\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$; e que augmentando o denominador a fracção diminue $\frac{4}{15}<\frac{4}{8}$.

(115) Segue-se do que fica dito no artigo antecedente.

1.º Que ajuntando um numero qualquer ao que representa o numerador, ou o denominador de uma fracção, esta se torna maior, ou menor. Por exemplo seja dada a fracção $\frac{5}{9}$ ajuntando-se 2 ao numerador temos $\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}$ e esta fracção é maior que $\frac{5}{9}$; ajuntando-se 2 ao denominador temos $\frac{5}{9+2}=\frac{5}{11}$ e $\frac{5}{11}<\frac{5}{9}$.

2.º Que diminuindo um numero qualquer do que representa o numerador, ou o denominador d'uma fracção, fazemos esta fracção menor ou maior. Por exemplo seja dada a fracção $\frac{5}{9}$; diminuindo 2 do numerador temos $\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}$, e $\frac{3}{9}<\frac{5}{9}$; diminuindo 2 do denominador temos $\frac{5}{9-2}=\frac{5}{7}$, e $\frac{5}{7}>\frac{5}{9}$ Assim pois augmenta-se o valor de uma fracção augmentando o seu numerador, ou diminuindo o seu denominador. Diminue-se o valor de uma fracção diminuindo o seu numerador, ou augmentando o seu denominador.

3.° Multiplicando por um numero qualquer o numerador, ou o denominador de uma fracção, esta torna-se maior ou menor. Isto é evidente; pois a multiplicação não é senão a mesma addição.

Por exemplo seja dado $\frac{3}{9}$; multiplicando 3 por 5 temos $\frac{3\times5}{9}=\frac{15}{9}$, e $\frac{15}{9}>\frac{3}{9}$. Multiplicando o denominador 9 por 5, temos $\frac{3}{9\times5}=\frac{3}{45}$, e $\frac{3}{45}<\frac{3}{9}$.

4.° Dividindo por um numero dado o numerador de uma fracção, a fracção torna-se menor, dividindo o denominador torna-se maior. Assim pois podemos augmentar o valor de uma fracção multiplicando o seu numerador, ou dividindo o seu denominador. Podemos diminuir o valor de uma fracção dividindo o seu numerador, ou multiplicando o seu denominador.

§ 2.°

Simplificação das fracções.

(116) Se sem alterar o denominador de uma fracção multiplicamos ou dividimos o seu numerador por um numero, a nova fracção será este numero de vezes maior ou menor, que a primeira. Quando multiplicamos o numerador de uma fracção por 2, 3, 4, indicamos com isso que tomamos 2, 3, 4, vezes mais partes; e como as partes são do mesmo tamanho a nova fracção é 2, 3, 4 vezes maior, que a primeira. Por exemplo: seja proposta a fracção $\frac{3}{25}$; se multiplicamos o numerador 3 por 2, 3, 4 teremos $\frac{6}{25}$ $\frac{9}{25}$ $\frac{12}{25}$; estas fracções são 2, 3, 4 vezes maiores que $\frac{3}{25}$. Pelo contrario dividindo o numerador por 2, 3, 4, indicamos que tomamos 2, 3, 4 vezes menos partes, e assim $\frac{6}{25}$ $\frac{4}{25}$ $\frac{3}{25}$ são fracções 2, 3, 4 vezes menores que $\frac{12}{25}$.

(117) Se sem alterar o numerador multiplicamos ou dividimos o denominador de uma fracção por um numero, dividimos ou multiplicamos a fracção por este numero. Quando multiplicamos o denominador por 2, 3, 4, indicamos, que a unidade foi dividida em 2, 3, 4 vezes mais partes iguaes, por

tanto estas partes são 2, 3, 4 vezes menores, e como tomámos sempre o mesmo numero de partes, segue-se, que a fracção, que resulta é 2, 3, 4, vezes menor. Pelo contrario, se dividimos o denominador por 2, 3, 4, a unidade se acha dividida em 2, 3, 4, vezes menos partes iguaes, as novas partes são pois 2, 3, 4, vezes maiores, e como tomamos o mesmo numero de partes a nova fracção é 2, 3, 4, vezes maior, que a primeira.

(118) Multiplicar o numerador de uma fracção por um numero, ou dividir o seu denominador pelo mesmo numero, é o mesmo; em ambos os casos multiplicamos a fracção por este numero. Seja por exemplo a fracção $\frac{3}{24}$; multiplicar o seu numerador por 4 é o mesmo que dividir o seu denominador por 4, pois por um modo, como por outro a fracção torna-se 4 vezes maior, logo $\frac{3\times4}{24}=\frac{3}{24\div4}$ isto é $\frac{12}{24}=\frac{3}{6}$. Dividir o numerador de uma fracção por um numero é o mesmo que multiplicar o seu denominador pelo mesmo numero. Seja por exemplo a fracção $\frac{6}{8}$; dividir 6 por 2; é o mesmo, que multiplicar 8 por 2; em ambos os casos obtemos uma fracção duas vezes menor, isto é, dividimos a fracção por 2; logo $\frac{6\div2}{8}=\frac{6}{8\times2}$, isto é, $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$.

(119) Multiplicando e dividindo ao mesmo tempo o numerador e o denominador de uma fracção pelo mesmo numero a fracção fica inalterada, e conserva o mesmo valor, que tinha antes. Seja por exemplo a fracção $\frac{3}{7}$; multiplicando o numerador por 4, a fracção torna-se 4 vezes maior e será $\frac{12}{7}$; multiplicando o denominador por 4 a fracção torna-se 4 vezes menor e será $\frac{3}{28}$. Logo multiplicando tanto o numerador como o denominador por 4, segue-se que fazemos a fracção ao mesmo tempo 4 vezes maior, e 4 vezes menor, e por tanto não alteramos o seu valor; isto é, $\frac{3}{4}=\frac{3\times4}{7\times4}=\frac{12}{28}$.

Do mesmo modo dividindo o numerador da fracção $\frac{12}{28}$ por 4, e o denominador tambem por 4 a fracção fica com o mesmo valor, pois dividindo o numerador por 4 fazemos a fracção 4 vezes menor; dividindo o denominador por 4 a fazemos

4 vezes maior; logo fazendo ambas as operações, a fracção conserva o seu valor primitivo, e $\frac{12}{28}=\frac{12 \div 4}{28 \div 4}=\frac{3}{7}$.

(120) Podemos fazer uzo destas propriedades das fracções para reduzil-as a mais simples expressão; pois vemos, que a mesma fracção pode ser expressada de uma infinidade de modos differentes. Ora as fracções, reduzidas á mais simples expressão fazem melhor conhecer o seu valor; temos uma ideia, mais clara de $\frac{5}{7}$ do que de $\frac{30}{42}$; assim pois é necessario para a mais facil comparação dos valores das fracções, reduzil-as á expressão mais simples; e isto se faz, quando a reduzimos a ter por numerador, e por denominador numeros primeiros, porque então não é mais possivel simplifical-as; pois o meio de reduzir uma fracção á sua mais simples expessão é decompor o numerador e o denominador em factores primeiros, e supprimir os que se acham em ambos os termos, o que não muda o seu valor, porque então dividimos o numarador, e o denominador pelo mesmo numero (119.) Por exemplo, para reduzir a fracção $\frac{30}{48}$ a sua mais simples expressão podemos decompor os numeros 30 e 48 em seus factores primeiros (94) e supprimir os que se acham nos dous termos da fracção; a fracção $\frac{30}{48}$, feita esta operação, pode ser representada por $\frac{2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 4 \times 2}$; e como os factores 2 e 3 acham-se nos dous termos podem ser supprimidos, e teremos então $\frac{5}{4 \times 2}=\frac{5}{8}$, e esta é a fracção, $\frac{30}{40}$ reduzida á sua mais simples expressão; pois nada se fez se não dividir ambos os termos por $2 \times 3=6$, o que não altera o seu valor. Assim quando percebemos entre o numerador e o denominador d'uma fracção algum factor commum, devemos logo dividir os dous termos da fracção por este factor para que seja reduzida á uma expressão mais simples: assim $\frac{30}{42}$ é uma fracção, na qual percebemos, que os termos são divisiveis por 2 e podemos reduzil-a á $\frac{15}{21}$; e como vemos, que os termos desta ultima fracção são divisiveis por 3, podemos reduzil-a $\frac{5}{7}$.

(121) O methodo mais abreviado de reduzir uma fracção á sua expressão a mais simples é dividir os dous termos da frac-

ção pelo maior commum divisor destes dous numeros. Seja por exemplo proposto reduzir $\frac{330}{462}$ á sua mais simples expressão. Procura-se primeiro o maior commum divisor de 330 e 462 (93) que é 66, e depois divide-se os dous termos da fracção por este numero; o que dá por resultado $\frac{5}{7}$, que é a mais simples expressão de $\frac{330}{462}$, pois 5 e 7 são numeros primeiros. Se pela operação para achar o maior commum divisor dos termos da fracção, achamos á final, que o numerador, e o denominador não tem outro divisor commum senão a unidade, concluimos, que a fracção se acha já reduzida á mais simples expressão, e que é irreduzivel, (assim se chamam as fracções, que não podem ser reduzidas á uma forma mais simples,) isto é, que não podem ser representadas exactamente por nenhuma fracção equivalente, tendo termos menores.

Os dous termos de uma fracção são irreduziveis, quando não tem factores communs. Duas fracções irreduziveis, cujos termos são differentes não podem ter o mesmo valor. A fracção $\frac{113}{355}$ é irreduzivel, e não pode ser expressada mais simplesmente porque os seus dous termos são numeros primeiros entre si.

Exemplos.

1.° Reduza-se $\frac{195}{780}$ á sua mais simples expressão.

Resposta $\frac{1}{4}$

2.° Reduza-se $\frac{136}{240}$ á sua mais simples expressão.

Resposta $\frac{2}{3}$

§ 5.°

Reducção das fracções ao mesmo denominador.

(122) Para se poder comparar os valores das fracções, e dos numeros fraccionarios em geral, é preciso reduzil-os á serem fracções da mesma especie, isto é, á serem formadas pela mesma unidade, para isto é preciso praticar sobre estes numeros certas transformações. Os numeros, são inteiros,

fraccionarios, mixtos, e fracções compostas, ou fracções de fracções. Todos estes numeros podem ser sommados, subtrahidos, multiplicados, e divididos, uns pelos outros, para se poder effectuar estas operações porém, devem ser comparaveis a mesma unidade.

1.° Reduzir um numero inteiro a um numero fraccionario com um denominador dado.

Multiplica-se o numero pelo denominador, e o producto será o numerador da fracção.

Por exemplo seja proposto reduzir o numero 5 á uma fracção, cujo denominador seja 6; teremos $\frac{5\times6}{6}=\frac{30}{6}$; a rasão é, que 5 pode ser considerado como $\frac{5}{1}$ (113, 7°) e multiplicando o numerador, e o denominador pelo mesmo numero 6 a fracção conserva o mesmo valor (119), logo......
$5=\frac{5}{1}=\frac{5\times6}{1\times6}=\frac{30}{6}$

2.° Reduzir um numero mixto a um numero fraccionario. Multiplica-se o numero inteiro pelo denominador da fracção, e á este producto ajunta-se o seu numerador; esta somma será o numerador da nova fracção, e o denominador será o da fracção proposta.

Seja por exemplo proposto reduzir $7\frac{4}{5}$ a um numero fraccionario, teremos $\frac{7X5+4}{5}=\frac{39}{5}$, o que é evidente, pois.....
$7=\frac{7X5}{5}=\frac{35}{5}$ (1.°); e se ajuntamos á esta fracção $\frac{4}{5}$ temos $\frac{35}{5}+\frac{4}{5}=\frac{35+4}{5}=\frac{39}{5}$.

3.° Reduzir uma fracção complexa á uma fracção simples. Multiplica-se os numeradores um pelo outro, e este producto será o novo numerador, multiplica-se os denominadores um pelo outro, e o producto será o novo denominador. Seja proposto reduzir á uma fracção simples $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, teremos $\frac{2X4}{3X5}=\frac{8}{15}$. A rasão desta regra é clara: tomar dous terços de um numero, é o mesmo que dividi-lo em 3 partes, e tomar 2 destas partes; assim pois para tomarmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ é preciso achar o terço de $\frac{4}{5}$ e toma-lo duas vezes; ora a terça parte de $\frac{4}{5}$;

é $\frac{4}{5}$ dividido por 3 ou $\frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$ (117); esta quantidade tomada duas vezes forma os 2 terços de $\frac{4}{5}$; uma fracção duplica-se multiplicando o seu numerador por 2 (118); logo $\frac{2 \times 4}{15} = \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Os $\frac{3}{4}$ de 5 é o mesmo que $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{1} = \frac{3 \times 5}{4 \times 1} = \frac{15}{4}$

Os numeros mixtos devem ser reduzidos á numeros fraccionarios para que possamos applicar-lhe esta regra. Seja proposto reduzir á uma fracção simples $\frac{5}{8}$ de $\frac{2}{9}$ de $3\frac{1}{12}$; este numero $= \frac{5 \times 2}{8 \times 9}$ de $3\frac{1}{12}$; isto é, $\frac{10}{72}$ de $\frac{12 \times 3 + 1}{12}$ (2°) ou $\frac{10}{72}$ de $\frac{36 \div 1}{12} = \frac{10}{72}$ de $\frac{37}{12} = \frac{10 \times 37}{72 \times 12} = \frac{370}{860}$.

4.° Reduzir um numero fraccionario á um numero inteiro ou mixto. Divide-se o numerador pelo denominador, este quociente é igual á fracção; se fica um resto toma-se este resto por numerador da parte fraccionaria, e o divisor por seu denominador. Seja proposto reduzir $\frac{39}{5}$ á um numero inteiro ou mixto, dividimos 39 por 5, e achamos por quociente 7, e o resto 4, logo $\frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$. A rasão é evidente pois uma fracção indica uma divisão á fazer, e nada mais se fez aqui do que effectuar a divisão indicada.

Exemplos:

1.° Reduza-se os numeros 5, 7, 8, 9, 6, 10, 12, à fracções tendo por denominador 5, 8 e 41.

2.° Reduza-se $12\frac{9}{9}$ à uma fracção.

Resposta $\frac{115}{9}$

3.° Reduza-se $14\frac{7}{10}$ á uma fracção.

Resposta $\frac{447}{10}$

4.° Reduza-se $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{8}{11}$ á uma fracção simples.

Resposta $\frac{4}{11}$

5.° Reduza-se $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ á uma fracção simples.

Resposta $\frac{1}{2}$

6.° Reduza-se $\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{9}$ à uma fracção simples.

Resposta $\frac{39}{63}$

7.° Reduza-se $\frac{56}{7}$ á numero inteiro.

Resposta 8

8.° » $\frac{1362}{25}$ á numero inteiro.

Resposta $54\frac{12}{25}$

9.° » » $\frac{56}{8}$ à numero inteiro.

Resposta 7

(123) Agora podemos reduzir as fracções á um commum denominador. Tendo reduzido primeiro, quando fôr preciso, as fracções compostas á simples, e os numeros mixtos á fracções, é facil reduzir as fracções ao mesmo denominador; para isto, multiplica-se cada numerador por todos os denominadores menos o seu, e toma-se este producto para novo numerador, e para novo denominador o producto de todos os denominadores. Seja por exemplo proposto reduzir as duas fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ ao mesmo denominador. Multiplicamos o numerador 2 pelo denominador 5, e o numerador 4 pelo denominador 3; estes productos 10 e 12 são os novos numeradores; e os denominadores são $3\times5=15$, e temos as duas fracções $\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$. A rasão é simples: multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{2}{3}$ por 5, logo $\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$; multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{4}{5}$ por 3; logo $\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15}=\frac{6}{5}$. Assim pois as novas fracções tem os mesmos valores que as fracções dadas.

Para reduzir ao mesmo denominador um numero qualquer de fracções, multiplicamos os dous termos de cada fracção pelo producto dos denominadores das outras. Assim os novos denominadores são iguaes, pois que cada um é formado pelo producto de todos os denominadores; e as novas fracções são do mesmo valor que as primeiras, pois não se fez, senão multiplicar os dous termos de cada uma pela mesma quantidade, o que não altera os seus valores. Assim podemos reduzir as fracções $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ ao mesmo denominador do modo seguinte:

$$\frac{1\times3\times4}{2\times3\times4}\quad\frac{2\times2\times4}{2\times3\times4}\quad\frac{3\times2\times3}{2\times3\times4}\text{ ou }\frac{12}{24},\frac{16}{24},\frac{18}{24},$$

15

(124) Quando os denominadores das fracções propostas tem factores communs, é facil reduzi-los á um denominador commum, menor que o producto de todos os denominadores; pois n'este caso pode-se determinar um numero menor que este producto divisivel por cada um dos denominadores, e que sirva de denominador commum ás novas fracções. Por exemplo, seja proposto reduzir á um denominador commum as fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, podemos reduzi-las á tres fraccões equivalentes tendo 30 por denominador, numero divisivel por 3, 6 e 15; acha-se o numerador das novas fracções multiplicando os numeradores das primeiras pelo quociente respectivo da divisão de 30 por cada um dos denominadores; isto é, por 10, 5 e 2; deste modo as novas fracções são—

$$\frac{2\times10}{30},\ \frac{5\times5}{30}\ \frac{7\times2}{30},\ \text{ou}\ \frac{20}{30},\ \frac{25}{30}\ \frac{14}{30}$$

O menor commum denominador de muitas fracções, é o menor numero divisivel por cada um dos denominadores destas fracções. Por exemplo sejam dadas as fracções $\frac{11}{72}$, $\frac{7}{60}$, $\frac{3}{175}$. O menor denominador commum é 12600 (97); para obter os numeradores procuramos os quocientes das divisões de 12600 por 72, 60 e 175; e multiplicamos estes quocientes respectivamente pelos numeradores, 11, 7 e 3, e temos os productos :

$$\frac{175\times11}{12600},\ \frac{210\times7}{12600}\ \text{e}\ \frac{72\times3}{12600}\ \text{ou}$$

$$\frac{1925}{21600},\ \frac{1470}{12600},\ \frac{216}{12600}$$

Exemplos.

1.º Reduza-se $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{7}$ á fracções equivalentes, tendo um denominador commum.

$1\times5\times7=35$ novo numerador para $\frac{1}{2}$

$3\times2\times7=42$ » » » $\frac{3}{5}$

$4\times5\times2=40$ » » » $\frac{4}{7}$

$2\times5\times7=70$ denominador commum.

Portanto $\frac{35}{70}$ $\frac{42}{70}$ e $\frac{40}{70}$ são as novas fracções equivalentes.

2.° Reduzam-se $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ á fracções equivalentes, tendo o menor commum denominador; o menor numero divisivel por 2, 4, 6, acha-se decompondo-os em 2, 2×2, 2×3, e multiplicando $2\times2\times3=12$, é este o menor commum divisor.

Os numeradores das novas fracções são os seguintes $\frac{12}{2}\times1=6$, $\frac{12}{4}\times3=9$, $\frac{12}{6}\times5=10$, por tanto $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$ são as novas fracções equivalentes.

§ 4.°

Das quatro operações arithmeticas sobre fracções.

(125) Da addicção de numeros fraccionarios. Dous casos se apresentam, ou as fracções são da mesma especie, ou de especies differentes.

1.° Quando as fracções, que queremos sommar, são da mesma especie, ou tem o mesmo denominador, acha-se a somma addicionando os numeradores, e conservando o mesmo denominador.

Por exemplo seja proposto sommar as fracções $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, ajuntamos os numeradores $1+2+3=6$, e tomamos por denominador 5, e temos $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$. Estas fracções representam certos numeros da mesma unidade $\frac{1}{5}$, e assim são addicionadas, como os numeros inteiros.

2.° Quando as fracções, que queremos sommar não são da mesma especie, devemos antes de effectuar a addição reduzil-as ao mesmo denominador (123), e então sommar os novos numeradores. Por exemplo, para achar a somma de $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$, devemos reduzir estas fracções ao mesmo denominador, e temos as seguintes novas fracções:

$$\frac{2\times4\times5}{2\times4\times5}+\frac{3\times3\times5}{3\times4\times5}+\frac{4\times4\times3}{3\times4\times5}, \text{ ou}$$

$\frac{40}{60}+\frac{45}{60}+\frac{48}{60}$, e sommar os numeradores, e temos por resultado $40+45+48=133$, logo $\frac{133}{60}$ é a somma das fracções propostas.

Muitas vezes, como no exemplo presente, a somma é uma fracção impropria, isto é, maior que a unidade; devemos então dividir o numerador pelo denominador para reduzil-a á um numero inteiro, ou mixto. No exemplo acima, $\frac{133}{60}=2\frac{13}{60}$.

Quando temos de sommar numeros inteiros, numeros mixtos, e fracções simples ou compostas, devemos sommar os inteiros á parte, e depois reduzir as fracções ao mesmo denominador, e addicional-as, e reduzir a somma á numero inteiro ou mixto, sendo preciso. Por exemplo, seja proposto achar a somma $3+5\frac{3}{4}+6\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{7}$.

1.º Sommando os inteiros $3+5+6=14$, e 2.º as partes fraccionarias $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{2}{35}$, para isto reduzimos estas fracções ao mesmo denominador $\frac{315}{420}+\frac{140}{420}+\frac{24}{420}=\frac{479}{420}=1\frac{59}{420}$ logo a somma total é $14+1\frac{59}{420}=15\frac{59}{420}$.

(126) Subtracção dos numeros fraccionarios. São tambem dous, os casos.

1.º Se as fracções são da mesma especie ou tem o mesmo denominador, effectua-se a subtracção, tomando a differença entre os numeradores, e conservando o mesmo denominador. Por exemplo $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$; $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4-3}{5}=\frac{1}{5}$.

Esta regra é evidente pois as fracções representam numeros da mesma unidade.

2.º Quando as fracções são de differentes especies; 1.º deve-se reduzi-las ao mesmo denominador (123), e tomar então a differença entre os novos numeradores. Por exemplo; $\frac{9}{11}-\frac{4}{5}$, reduzimos estas fracções ao mesmo denominador, e temos $\frac{45}{55}-\frac{44}{55}=\frac{45-44}{55}=\frac{1}{55}$; $\frac{11}{12}$ de $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ de $\frac{7}{8}$; reduzindo ao mesmo denominador, temos $\frac{22}{60}-\frac{7}{24}=\frac{792}{1440}-\frac{420}{1440}=\frac{372}{1440}=\frac{31}{120}$.

(127) Multiplicação dos numeros fraccionarios. Multiplicar uma quantidade por uma outra é tomar o multiplicando tantas vezes, quantas unidades contem o multiplicador. Na multiplicação das fracções, temos dous casos, 1.º multiplicar uma fracção por um numero inteiro; e 2.º multiplicar uma fracção por outra fracção.

1.º Multiplicar uma fracção por um numero inteiro é o mesmo que tomar a fracção tantas vezes quantas unidades tem o numero inteiro, porque se quer multiplicar. Por exemplo $\frac{3}{4}\times 4$ quer dizer $\frac{3}{4}$, tomados 4 vezes, ou $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}$. Assim para multiplicar uma fracção por um numero inteiro basta multiplicar o seu numerador por este numero, e pôr no producto o mesmo denominador.

2.° Multiplicar uma fracção por outra fracção; a regra n'este caso é multiplicar um pelo outro os numeradores e os denominadores. A rasão d'esta regra é simples; multiplicar por exemplo $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$; é tomar $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ de vezes. Se tivessemos de tomar somente $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ multiplicariamos o denominador 4 por 3, e a fracção se tornaria $\frac{3}{12}$ (117) fracção 3 vezes menor que $\frac{3}{4}$; logo para tomar os $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ basta dobrar o seu terço $\frac{3}{12}$, o que se faz multiplicando o numerador por 2 (116); os $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ pois são $\frac{6}{12}$ o que já sabemos por (122, 3.°)

O mesmo raciocinio se applica a quaesquer outras fracções, e á multiplicacão de tres ou mais fracções. Por exemplo $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{4\times 3}{5\times 4}\times\frac{4}{7}=\frac{4\times 3\times 4}{5\times 4\times 7}=\frac{48}{140}$

Observação 1.ª O producto de um numero inteiro multiplicado por uma fracção, acha-se do mesmo modo; por exemplo $3\times\frac{2}{5}$ é o mesmo que $\frac{2}{5}\times 3$, logo podemos applicar a regra do 1° caso, ou tambem $3\times\frac{2}{5}$ é o mesmo que os $\frac{2}{5}$ de 3; ora o quinto de 3 é $\frac{3}{5}$ e os $\frac{2}{5}$ são $2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$.

Observação 2.ª Podemos considerar os numeros inteiros como fracções tendo por numerador os numeros mesmos, e por denominador a unidade (113, 7°); e então a multiplicação segue uma só regra; multiplicar os denominadores uns pelos outros e os numeradores uns pelos outros; e tomar estes dous productos para denominador, e numerador do producto total das fracções.

Observação 3.ª O producto de muitos factores conserva o mesmo valor seja qual for a ordem, em que se effectuam as multiplicações. Pois os numeradores, e os denominadores, sendo numeros inteiros, o producto dos numeradores, assim como o dos denominadores tem os mesmos valores seja qua for a ordem das multiplicações parciaes de seus factores (58), ora estes productos são os numeradores e denominadores da fracção, que exprime o producto das frações factoras.

Observação 4.º Conforme o multiplicador é maior ou menor, que a unidade o producto é maior ou menor que o multiplicando; pois o producto é composto com o multiplicando, como o multiplicador o é com a unidade. O producto de duas fracções menores que a unidade é menor que cada uma destas fracções; por exemplo $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; e $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$, e que $\frac{1}{2}$.

Observação 5.ª O producto de muitas fracções irreduziveis iguaes, é uma fracção irreduzivel. Por exemplo $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ é uma fracção irreduzivel, porque á não ser, seria preciso que $2\times2\times2$, e $3\times3\times3$ fossem divisiveis por um mesmo numero primeiro; este numero dividiria pois ao mesmo tempo um factor de cada um destes productos, e por tanto deveria dividir 2 e 3; logo estes dous numeros teriam um factor commum, e as fracções dadas não seriam irreduziveis, o que é contra a hypothese.

(128) Divisão das fracções. A divisão consiste em achar quantas vezes um numero é contido em um outro, ou em dividir um certo numero em um outro certo numero de partes iguaes. A divisão das fracções apresenta dous casos.

1.º Quando o dividendo é uma fracção e o divisor um numero inteiro. Por exemplo seja proposto dividir $\frac{3}{5}$ por 4: o objecto é achar a quarta parte de $\frac{3}{5}$; isto é; dividir $\frac{3}{5}$ em quatro partes iguaes. Ora sabemos (117), que multiplicando o denominador de uma fracção por um numero a tornamos menor; e tanto menor, quanto maior é o numero por que o multiplicamos; assim multiplicando o denominador de $\frac{3}{5}$ por 4, tornamos esta fracção 4 vezes menor, e a fracção, que resulta é igual a quarta parte da fracção proposta. Logo para dividir uma fracção por um numero inteiro basta multiplicar o seu denominador por esse numero. Tambem podemos dividir uma fracção por um numero inteiro, dividindo o seu numerador por este numero; dividindo $\frac{8}{9}$ por 4, temos $\frac{2}{9}$ (117).

2.º Quando o dividendo é um numero inteiro ou uma fracção, é o divisor uma fracção. Neste caso o que queremos é saber quantas vezes a fracção divisora, é contida no dividendo inteiro ou fraccionario. Para isto basta mudar no divisor o numerador em denominador, e o denominador em numerador; e multiplicar esta nova fracção pelo numero inteiro, ou pela fracção dividendo. Para mostrarmos a rasão porque assim se procede, seja proposto dividir $\frac{5}{6}$ por $\frac{3}{7}$; pela regra devemos ter $\frac{5}{6}\times\frac{7}{3}=\frac{35}{18}$: ora dividir $\frac{5}{6}$ por $\frac{3}{7}$ é o mesmo que procurar quantas vezes $\frac{3}{7}$ è contido em $\frac{5}{6}$. Se estas fracções tivessem o mesmo denominador, poderiamos effectuar a operação sobre os numeradores sem nos importar com o denominador commum; pois $\frac{5}{6}$ contém evidentemente $\frac{1}{6}$ tantas vezes quantas 5 contém 1; do mesmo modo $\frac{8}{15}$ contém $\frac{4}{15}$ tantas vezes quantas 8 contém 4. Em geral dividir uma fracção por uma outra fracção de mesmo denominador è procurar, quantas vezes o numerador da primeira contém o da segunda; e é evidente, que em quanto os numeradores das duas fracções exprimem quantidades da mesma especie, terços, quartos, quintos etc. um destes numeradores dividido pelo outro produz o mesmo numero sempre. Por exemplo $\frac{17}{21}$ dividido por $\frac{9}{21}$ è igual á $\frac{17}{9}$; $\frac{17}{30}$ dividido por $\frac{9}{30}$ é igual á $\frac{17}{9}$: $\frac{17}{41}\div\frac{9}{41}=\frac{17}{9}$. Para dividir duas fracções de especies differentes $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{7}$ podemos reduzil-as ao mesmo denominador e então teremos $\frac{35}{42}$ e $\frac{18}{42}$, e por conseguinte:

$$\frac{5}{6}\div\frac{3}{7}=\frac{35}{42}\div\frac{18}{42}=\frac{35}{18}.$$

O que se pode escrever do modo seguinte:

$$\frac{5}{6}\div\frac{3}{7}=\frac{5\times7}{6\times7}\div\frac{6\times3}{6\times7}=\frac{5\times7}{6\times3}\text{ ora}$$

$\frac{5\times7}{6\times3}$ é o mesmo que o producto de $\frac{5}{6}\times\frac{7}{3}$ temos pois

$$\frac{5}{6}\div\frac{3}{7}=\frac{5}{6}\times\frac{7}{3}.$$

Quando o dividendo é um numero inteiro podemos fazer uzo da mesma regra, pois podemos representál-o por um numero fraccionario da mesma especie, que o divisor, e então a divisão dos numeradores deve dar o quociente, e assim o obtemos pelo mesmo processo. Por exemplo seja proposto dividir 2 por $\frac{2}{3}$; temos $\frac{2}{1}\div\frac{2}{3}=\frac{2\times3}{3\times1}\div\frac{2\times1}{3\times1}=\frac{2\times3}{1\times2}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}$.

Observação 1.ª Conforme o divisor é maior ou menor que a unidade, o quociente é menor ou maior que o dividendo. Pois quando o divisor é igual à unidade o quociente é igual ao dividendo, e á medida que o divisor augmenta ou diminue, o quociente diminue, ou augmenta.

(129) Antes de passarmos adiante será conveniente fazermos ainda algumas reflexões sobre a multiplicação e a divisão das fracções. Quando se tracta de numeros inteiros, a multiplicação de um numero por outro, consiste em repetir o multiplicando tantas vezes quantas unidades contem o multiplicador; ou por outra, a operação consiste em compor um numero que se chama producto com o multiplicando, do mesmo modo, que o multiplicador é composto com a unidade. Por exemplo $12=3\times4$; isto é, 12 é composto com 4, do mesmo modo, que 3 é composto com 1, ou $12=4+4+4$, assim como $3=1+1+1$. No caso de numeros inteiros o producto é sempre maior, que o multiplicando.

A multiplicação de uma fracção por um numero inteiro apresenta exactamente a mesma idéia, nada mais sendo do que a somma de tantas vezes a fracção, quantas unidades contem o multiplicador; e o producto é um numero composto com a fracção como o multiplicador o é com a unidade: $\frac{2}{3}\times5=\frac{10}{3}$; ora $\frac{10}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$, assim como $5=1+1+1+1+1$.

Quando queremos porêm multiplicar um numero inteiro por uma fracção, á primeira vista parece-nos uma operação impossivel; pois como se poderà tomar um numero inteiro, um numero fraccionario de vezes? Seja por exemplo proposto multiplicar 6 por $\frac{2}{3}$; isto significa que temos de achar um numero composto com 6, como $\frac{2}{3}$ o é com a unidade: um numero, que contenha tantas vezes 6 quantas unidades contém $\frac{2}{3}$; ora $\frac{2}{3}$ é um numero menor que a unidade, e não a contèm; logo neste caso é preciso modificar a ideia de composição, e dar-lhe um sentido mais lato; e então devemos procurar um numero, que seja formado das mesmas partes de 6, que $\frac{2}{3}$ são formados de partes da unidade, isto é, (já que $\frac{2}{3}$ são formados das duas terças partes da unidade) o numero, que procuramos deve ser composto de duas terças partes de 6; um terço de 6 é $\frac{6}{3}$, e dous terços de 6 são $\frac{6}{3} \times 2 = \frac{12}{3}$, que reduzidos á inteiros são 4; assim 4 é a mesma parte de 6 que $\frac{2}{3}$ é da unidade; neste caso o producto é menor, que o multiplicando; pois é formado dividindo-o em tantas partes em quantas se acha dividida a unidade no multiplicador; e tomando tantas destas partes, quantas partes da unidade se tomaram no multiplicador. Assim a multiplicação de um numero inteiro por uma fracção é uma operação complexa, constando de uma divisão e de uma multiplicação. Damos á esta operação o nome de multiplicação simples por extenção da significação desta palavra, e por analogia, porque $6 \times \frac{2}{3}$ deve ser o mesmo, que $\frac{2}{3} \times 6$, que é verdadeiramente uma multiplicação no sentido restricto da palavra.

A multiplicação de uma fracção por outra fracção, de $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$ apresenta a mesma idéia, o objecto n'este caso é achar um numero composto com o multiplicando $\frac{3}{4}$ como $\frac{2}{3}$ são compostos com a unidade; isto é, achar um numero, que seja os dous terços de $\frac{3}{4}$; ora o terço de $\frac{3}{4}$ é $\frac{3}{4 \times 3}$ (117) e os dous terços de $\frac{3}{4}$ são $\frac{3}{4 \times 3} \times 2 = \frac{6}{12} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$. Assim pois o producto de um numero inteiro ou fraccionario multiplicado por uma fracção nada mais é do que uma fracção do multiplicando, cujo valor é indicado pelo multiplicador d'estes numeros; assim 6 multiplicados por $\frac{2}{3}$ é o mesmo que os $\frac{2}{3}$ de 6, e $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ é o mesmo que $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

Esta operação, que na realidade é differente da multiplicação tem sido considerada na Arithmetica e na Algebra como uma multiplicação, quando de facto é o complexo de uma divisão e uma multiplicação. Para isto foi preciso dar á palavra producto um sentido mais lato; porque quando representamos numeros inteiros por fracções improprias, o producto da multiplicação das duas fracções dá o mesmo resultado, que a multiplicação dos inteiros; por exemplo $2\times3=6$; ora 2 e 3 podem ser representados por $\frac{8}{4}$ e $\frac{9}{3}$ (113, 8) ora $\frac{8}{4}\times\frac{9}{3}=\frac{8\times9}{4\times3}=\frac{72}{12}$; pela regra da multiplicação de duas fracções, e $\frac{72}{12}=6$, por tanto $\frac{8}{4}\times\frac{9}{3}=2\times3$.

Assim pois vemos, que a palavra multiplicar tem duas accepções, conforme o multiplicador e $>$ ou $<$ que 1; no 1.° caso repitimos o multiplicando muitas vezes; no 2.° tomamos uma parte do multiplicando marcada pela fracção multiplicadora. O producto contem o multiplicando tantas vezes quantas o multiplicador contem 1, quando este factor é inteiro; e o multiplicando contem o producto tantas vezes, quantas 1 contem o multiplicador, quando este é menor que 1. Por exemplo $12=3\times4$, e é evidente que 12 contem 3 quatro vezes, e que 4 contem 1 tambem quatro vezes, e em $\frac{6}{5}=3\times\frac{2}{5}$ o multiplicando 3 contem $\frac{6}{5}$ tantas vezes quantas 1 contem $\frac{2}{5}$. Dando pois á palavra compor a accepção activa e passiva de conter e ser contido, pode-se dizer, que o producto é em todos os casos composto com o multiplicando, como o multiplicador o é com a unidade.

As mesmas reflexões se applicam á divisão das fracções, pois o dividendo de uma divisão é o producto da multiplicação do divisor pelo quociente, ou do quociente pelo divisor. Assim pois o dividendo deve ser composto com o divisor como o quociente o é com a unidade; ou o dividendo deve ser composto com o quociente como o divisor o é com a unidade, pois é indifferente tomar o divisor ou o quociente por multiplicador.

Dividir uma fracção por um numero inteiro é achar um numero que seja composto com a unidade, como o dividendo o é com o divisor, ou que seja composto com o dividendo, como a unidade o é com o divisor. Por exemplo dividir $\frac{6}{3}$ por 3 é achar um numero que seja composto com $\frac{6}{3}$ como a unidade o é com 3; ora, o divisor contendo 3 unidades, segue-se, que o dividendo deve conter 3 vezes o quociente, logo o quociente é $\frac{1}{3}$ do dividendo; $\frac{1}{3}$ de $\frac{6}{3}=\frac{6}{9}$.

Quando o dividendo è inteiro e o divisor uma fracção, o que queremos é achar um numero, que seja composto com a unidade como o dividendo o é com o divisor: seja proposto dividir 6 por $\frac{2}{3}$; o quociente deve ser composto com a unidade como 6 é composto com $\frac{2}{3}$; ora $6=\frac{18}{3}$, e $\frac{18}{3}$ é composto com $\frac{2}{3}$, como 18 com 2, e $18=2\times 9$; logo $\frac{18}{3}$ é composto com 9 vezes $\frac{2}{3}$, e por consequencia o quociente é igual á 9, que contém 9 unidades, e por tanto jà que

$$9=\frac{6\times 3}{2}=6\times\frac{3}{2},\quad 6\div\frac{2}{3}=9$$

e podemos neste caso seguir a regra para a divisão por fracções.

Quando o dividendo assim como o divisor são fraccionarios. Por exemplo seja proposto dividir $\frac{5}{6}$ por $\frac{4}{5}$; o objecto é achar um numero, que seja composto com a unidade, como $\frac{5}{6}$ é composto com $\frac{4}{5}$; para compararmos estas duas fracções é preciso reduzi-las ao mesmo denominador; assim temos $\frac{25}{30}$, $\frac{24}{30}$, e então procurar um numero, que seja composto com a unidade, como $\frac{25}{30}$ o é com $\frac{24}{30}$; isto é, que contenha ou seja contido em um, o mesmo numero de vezes que $\frac{25}{30}$ è contido ou contem $\frac{24}{30}$; ora $\frac{25}{24}$ é o numero procurado; e $\frac{25}{24}=\frac{5\times 5}{6\times 4}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{4}$.

Exemplo. Multiplique-se 5348 por $\frac{13}{16}$

Podemos segundo a regra ordinaria multiplicar o numero 5348 por 13, e depois dividir o producto por 16; mas é mais commodo, quando o multiplicando é um numero grande decompor $\frac{13}{16}$ em partes aliquotas, isto é, em fracções que reduzidas tenham por numerador 1. Assim $\frac{13}{16}=\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$; e tomar primeiro a metade de 5348 depois o quarto e á final o $\frac{1}{16}$, e sommar estas partes.

Multiplicando	5348
$\frac{1}{2}$ . . .	2674
$\frac{1}{4}$ . . .	1337
$\frac{1}{16}$ . . .	$334\ \frac{1}{4}$
	$4345\ \frac{1}{4}$

CAPITULO VI.

DAS FRACÇÕES DECIMAES.

§ 1.º

Noções geraes.

(130) Os numeros fraccionarios tiram a sua origem da decomposição da unidade, e da quantidade, que se quer medir em partes iguaes. Esta decomposição pode ser feita de uma infinidade de modos differentes; entre todos estes modos, o seguinte tem sido escolhido, como o mais commodo nos calculos complicados. Concebe-se a unidade decomposta em 10 partes iguaes, e procura-se quantas d'estas partes entram na quantidade, que se quer medir, se fica um resto, este é menor que a decima parte da unidade; concebe-se esta decima parte da unidade como decomposta em 10 partes iguaes, cada uma destas partes será a centesima parte da unidade; e procura-se quantas d'estas partes contem o resto, se as centesimas partes da unidade não bastam para medir completamente a quantidade, decompoem-se successivamente cada parte em 10 partes iguaes, o que se pode fazer ao infinito. Assim pois as fracções decimaes são aquellas, que tem por denominadores os numeros 10, 100, 1000 etc., ou em geral, a unidade seguida de um numero qualquer de cifras; taes são $\frac{1}{10}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{32}{1000}$.

Escriptas d'este modo em nada differem das fracções ordinarias, e são sujeitas ás mesmas regras. Tem-se porém imaginado subentender os denominadores, e escrevel-as como numeros inteiros, o que simplifica muito as operações em que entram.

(131) Para comprehender bem esta nova maneira de representar este genero de fracções, é preciso lembrar, que o nosso systema de numeração é fundado sobre a convenção de dar á um algarismo um valor 10 vezes maior quando se acha collocado à esquerda de um outro, do que o que exprime quando isolado, e adoptando-se esta regra em toda sua extensão é evidente, que o valor relativo de muitos algarismos escriptos uns ao lado dos outros deve diminuir de dez vezes em dez vezes, indo da esquerda para a direita. Assim por exemplo na quantidade representada por 6666, o segundo algarismo partindo da esquerda vale dez vezes menos que o primeiro, o 3° dez vezes menos que o 2°, e cem vezes menos que o 1°, o 4° 10 vezes menos que o 3°, cem vezes menos que o 2°, e mil vezes menos que o 1°. Se pois o primeiro algarismo representa 6 unidades, o 2° deverà representar $\frac{6}{10}$ o 3° $\frac{6}{100}$ e o 4° $\frac{6}{1000}$. Assim pois podemos escrever as fracções decimaes á direita das unidades, o primeiro algarismo representando decimas, o 2° centesimas, o 3° millesimas etc.; para podermos porém differençar os numeros decimaes dos inteiros é preciso empregar um signal qualquer, que sirva para mostrar qual o algarismo que indica as unidades, e então á partir d'este algarismo para a esquerda cada algarismo indica unidades 10 vezes maiores umas que as outras, e para a direita unidades 10 vezes menores umas, que as outras. O signal, que se emprega para este fim é um ponto ou uma virgula à direita do algarismo das unidades: por exemplo 6,6666, quer dizer 6 unidades, e os mais algarismos são decimos, centesimos, e millesimos. Os algarismos á esquerda da virgula são inteiros, e os á direita decimaes. Quando não existem inteiros poem-se uma cifra no lugar das unidades, assim 0,1 significa $\frac{1}{10}$, 0,57 significa $\frac{57}{100}$ 0,003 significa $\frac{3}{1000}$. Por esta nomenclatura das fracções decimaes, e pela simples notação, que acabamos de expor, podemos fazer todas as operações arithmeticas em que entram, do mesmo modo, que as fazemos com numeros inteiros.

(132) Ajuntando-se cifras á direita de uma decimal não augmentamos o seu valor; por exemplo 0,2, 0,20, 0,200, ou $\frac{2}{10}$, $\frac{20}{200}$, $\frac{200}{1000}$ são quantidades iguaes, pois nestas fracções os numeradores e denominadores são multiplicados pela mesma quantidade (119).

As decimaes podem ser reduzidas ao mesmo denominador escrevendo cifras à direita quando é necessario, até que o numero de lugares decimaes seja o mesmo em todas: por exemplo 0,5, 6,01, 0,311, reduzem-se á um commum denominador, ajuntando-se cifras à direita de modo, que todas tenham tres algarismos decimaes, 0,500, 0,010, 0,311, o que é evidente pois $\frac{5}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{311}{1000}$ são quantidades iguaes á $\frac{500}{1000}$, $\frac{10}{1000}$, $\frac{311}{1000}$ (123).

(133) Uma fracção decimal representada pelo modo ordinario pode tomar a forma adoptada para a notação decimal, escrevendo-se o numerador, e separando-se pela virgula tantos algarismos para a direita, quantas cifras tem o denominador. Quando o numerador não tem o numero de algarismos necessarios ajuntam-se as cifras precisas para isto á esquerda do numerador; e assim os algarismos, que ficam á direita da virgula são decimaes e representam partes decimaes da unidade, e os que ficam á esquerda representam numeros inteiros. Por exemplo para escrever a fracção $\frac{8}{10}$ conforme a notação decimal basta escrever 0,8; isto é, o numerador da fracção $\frac{8}{10}$ com uma cifra á esquerda para indicar o lugar das unidades separada pela virgula; $\frac{8}{100}$ escreve-se 0,08; $\frac{60}{10}$ escreve 6,0 etc. Para transformar um numero decimal em fracção ordinaria, forma-se uma fracção tendo por numerador o numero decimal, abstracção feita da virgula, e por denominador a unidade seguida de tantas cifras quantos algarismos ha a direita da virgula no numero decimal, assim o numero decimal 5,47 é igual $\frac{547}{100}$, pois $5{,}47=5+\frac{4}{10}+\frac{7}{100}=\frac{500}{100}+\frac{40}{100}+\frac{7}{100}=\frac{547}{100}$.

Um numero decimal pode ser enunciado de differentes modos. Seja dado o numero 5,47 ; podemos enuncia-lo, cinco unidades, quatro decimas, e sete centesimos, mas como cada decimo vale 10 centesimos podemos tambem dizer, cinco unidades, e quarenta e sete centesimos; as 5 unidades valendo 500 centesimos podemos tambem enunciar o numero, como composto de quinhentos e quarenta e sete centesimos, ou ainda cincoenta e quatro decimos e sete centesimos. Os dous primeiros modos são os mais usuaes.

(134) Conforme as convenções, que temos estabelecido o valor das unidades de cada algarismo só depende da distancia em que fica da virgula.

1.° Todo numero inteiro pode ser considerado, como um numero decimal, ajuntando-se-lhe á sua direita uma virgula seguida de cifras.

2.° Adiantando a virgula de um numero decimal para a direita de um, dous, tres lugares, multiplicamos este numero por 10, 100, 1000 etc. Por exemplo no numero 3,455, adiantando a virgula para a direita dous lugares temos 345,5 numero 100 veses maior, que o primeiro.

3.° Recuando a virgula de um, dous, tres lugares para a esquerda, dividimos o numero por 10, 100, 1000. Por exemplo no numero 557,896, se recuamos a virgula de dous lugares para a esquerda temos 5,57896, numero 100 vezes menor que o primeiro.

4.° Para distinguir o maior de dous numeros decimaes, não é pelo numero de algarismos, que contem a parte decimal, que nos devemos regular; mas pelo valor dos algarismos da virgula para a direita, e assim $0,4<0,57$, $0,7>0,54632$, $0,0004>0,000078$, porque $4<5,7>5,4>0$ etc.

§ 2.°

Das operações arithmeticas sobre numeros decimaes.

(135) Addição de decimaes. Para achar a somma de qualquer numero de decimaes, escrevem-se os algarismos de modo, que os da mesma denominação fiquem por baixo uns dos outros; e sommam-se todos, como se representassem numeros inteiros, colloca-se a virgula na somma por baixo das outras virgulas. Seja proposto achar a somma de $7,9+51,45+0,0118$. Escrevemos estes tres numeros uns por baixo dos outros de modo que as unidades fiquem em uma columna, as decimas em outra, as centesimas em outra etc., e sommamos os numeros como se fossem inteiros, pondo a virgula á direita da somma da columna das unidades.

$$\begin{array}{rr} & 7,9 \\ & 51,45 \\ & 0,0118 \\ \hline \text{Somma} & 59,3418 \end{array}$$

Com esta operação nada se faz senão reduzir todas as fracções ao mesmo denominador e somma-las, pois os numeros propostos são os mesmos que 7,9000+81,4300+0,0118=59,3418.

(136) SUBTRACÇÃO DE DECIMAES. Para achar a differença de duas fracções decimaes, escrevem-se os algarismos da mesma denominação um por baixo do outro, e então se faz a subtracção como em numeros inteiros, e colloca-se a virgula á direita do resultado da subtracção das unidades. Seja proposto tirar 42,012 de 61,3. Escrevemos estes dous numeros um por baixo do outro de modo que as unidades fiquem por baixo das unidades, as decimas por baixo das decimas etc., e fazemos a subtracção, do modo usual para inteiros, pondo na differença a virgula á direita das unidades:

$$\begin{array}{lr} & 61,3 \\ & 42,012 \\ \hline \text{Differença} & 19,288 \end{array}$$

Nada mais se faz senão reduzir os dous numeros ao mesmo denominador, e tirar o menor do maior, pois 61,3, e 43,012, são os mesmos numeros que 61,300, e 42,012, e 61,300—42,012=19,288.

(137) MULTIPLICAÇÃO DE DECIMAES. Para multiplicar um numero decimal por outro basta multiplicar os dous numeros um pelo outro, como se fossem inteiros, e depois no producto separar com a virgula para a direita tantos algarismos, quantos decimaes tem o multiplicando e o multiplicador. Por exemplo 51,3×4,6=235,98; multiplicamos 513 por 46, e depois do producto separamos dous algarismos, porque os factores juntos tem dous algarismos decimaes. A rasão d'esta regra é simples, reduzindo ás decimaes ás fracções ordinarias temos $\frac{513}{10}\times\frac{46}{10}=\frac{23598}{100}$, que é o mesmo que 235,98.

Quando no producto o numero de algarismos for menor, que o da somma dos algarismos decimaes dos factores, ajuntam-se cifras á esquerda do producto, afim de se poder separar o numero de algarismos precisos. Por exemplo, 0,25×0,3=0,075; ora pela regra temos 25×3=75; e devemos separar tres algarismos decimaes, porque nos factores existem tres, o producto tendo só dous algarismos não podemos fazer esta separação senão ajuntando ao producto uma cifra a esquerda: a rasão é evidente $\frac{25}{100}+\frac{3}{10}=\frac{75}{1000}=0.075$.

Quando multiplicamos uma fracção por outra o denominador do producto é um numero igual ao producto dos denominadores dos factores. Assim pois o producto de duas fracções é uma fracção, que tem por denominador partes da unidade muito menores que as que formam os denominadores dos factores; por exemplo $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}$; nos factores a unidade é dividida em 3, e em 4 partes iguaes, e no producto em 12 partes iguaes. As fracções decimaes multiplicadas umas pelas outras dão por producto fracções decimaes, cujas partes decimaes são tambem muito menores, que as das fracções factoras; por exemplo $\frac{3}{10}\times\frac{4}{100}=\frac{12}{1000}$, e assim sempre o producto de duas quantidades decimaes tem algarismos decimaes de valores muito menores, que os dos factores.

(138) Divisão de decimaes.—A divisão das decimaes se faz como a dos numeros inteiros, tendo o cuidado de pôr uma virgula no quociente, que separe para a direita tantos algarismos quantos o numero de algarismos decimaes do dividendo excede o dos algarismos decimaes do divisor. Por ex: $\frac{77,922}{3,7}=21,06$; divide-se 77922 por 37, e no quociente 2106, separam-se dous algarismos, porque o divisor tem um algarismo decimal e o dividendo 3, e a differença destes numeros é 2. A rasão de assim proceder é obvia; pois o producto do divisor pelo quociente deve ser o dividendo; por tanto o dividendo deve ter tantos algarismos decimaes, quantos tem o divisor e o quociente juntos; logo o quociente tem tantos algarismos decimaes, quantos os do dividendo excedem os do divisor. No caso de faltar no quociente algarismos para se separar os que são necessarios ajuntam-se cifras á esquerda.

Por exemplo: 0,336 divididos por 42, isto é $\frac{336}{42}=8$; mas o quociente deve ter 3 decimaes pois o dividendo tem 3, e o divisor nenhuma; por tanto devemos ajuntar á esquerda de 8, duas cifras, e então teremos $\frac{0.336}{42}=0.008$. A rasão é evidente: $\frac{336}{100}$ divididos por $42=\frac{336}{1000\times42}=\frac{42\times8}{42\times1000}=\frac{8}{1000}=0,008$.

Se o dividendo não tem tantas decimaes quantas tem o divisor, ajuntam-se cifras á direita do dividendo, até que possa ser dividido pelo divisor; por este meio nada fazemos senão reduzir as duas fracções ao mesmo denominador; por exemplo seja proposto dividir 36 por 0,012; neste caso é preciso reduzir o dividendo á millesimos; o que se faz ajuntando cifras á sua direita: $36=36{,}000$, e então temos $\frac{36000}{12}=3000$, e o quociente de $\frac{36}{0{,}012}$ é 3000; o que é evidente, pois $\frac{36000}{1000}\div\frac{12}{1000}=\frac{36000}{12}=3000$.

Exemplos:

1.º Exemplos de addições.

1.º—0,857	2.º—7,607	3.º— 0,00076
0,678	2,346	13,795
1,535	9,953	13 79576

2.º Exemplos de subtracção.

1.º—0,947	2.º—9,567	3.º—213,5734	4.º—0,5
0,195	3,077	87,6572	0,0003
0,752	6,490	125,9162	0,4997

3.º Exemplos de multiplicação.

1º—$3{,}57\times6=21{,}42$
2º—$5{,}798\times18=104{,}354$
3º—$0{,}00563\times17=0{,}09571$
4º—$3{,}7\times2{,}6=9{,}62$
5º—$0{,}43\times0{,}65=0{,}2795$
6º—$0{,}137\times0{,}00056=0{,}00007672$

4.º Exemplos de divisão.

1º—$5{,}64\div2=2{,}82$
2º—$7{,}5832\div8=0{,}9479$
3º—$0{,}35742\div6=0{,}059607$
4º—$3{,}54\div7=0{,}50571428$
5º—$0{,}0001,\div0{,}2=0{,}005$
6º—$1\div0{,}24=4{,}16666$

§ 3.º

Transformação de fracções ordinarias em decimaes, e de decimaes em ordinarias.

(139) Todos os calculos em que entram fracções tornam-se tão simples, e tão faceis, como os que são feitos sobre nume-

ros inteiros, quando estas fracções são numeros decimaes; por esta razão os mathematicos empregam sempre de preferencia as fracções decimaes em todos os calculos scientificos, e até no uso da vida, se tem procurado reduzir os pesos e medidas ao methodo decimal.

(140) Para podermos fazer sempre uso das fracções decimaes, é preciso saber reduzir uma fracção qualquer á uma fracção decimal.

1.º Quando a fracção tem por denominador a unidade seguida de cifras, isto é, 10 ou potencias de 10, é já uma fracção decimal, e basta então representa-la por numeros decimaes, o que se reduz a dar-lhes uma outra forma; (135) quando porem o denominador é differente de 10 ou suas potencias é preciso empregar um outro processo.

2.º Para se reduzir uma fracção qualquer tendo por denominador numeros differentes de 10 e de suas potencias, devemos primeiro reduzi-las á fracções decimaes, e depois representa-las como numeros decimaes, que tenham o mesmo valor. Esta operação não é senão um caso particular de uma outra mais geral; à saber, converter uma fracção qualquer em uma outra fracção de uma especie dada, porêm que sejam menores as partes em que se divide a unidade, do que na primeira; por exemplo transformar $\frac{3}{4}$ em 16 avos; isto se faz multiplicando o numerador por 16 e dividindo por 4 o producto, o que dá por resultado $\frac{48}{4}$ de $\frac{1}{16}=\frac{12}{16}$. Multiplicando o numerador por 16 reduzimos as tres unidades á 16 avos, e então temos de tomar a quarta parte, o que se faz dividindo por 4; ora $3\times16=48$, isto é, 48, 16 avos; divididos por 4 o quociente é 12 deseseis avos, ou $\frac{12}{16}$. Applicando esta regra ás decimaes é evidente que devemos multiplicar o numerador por 10, e dividir o producto pelo denominador, e se ficar um resto, tornar à multiplicar este resto por 10, e dividir pelo denominador, e assim por diante. Logo podemos fazer uso da regra seguinte. Divide-se o numerador da fracção pelo denominador, e põe-se uma virgula á direita do algarismo das unidades no quociente. Para achar os outros algarismos do quociente, converte-se os restos successivos em decimas, centesimas, millesimas, o que se faz pondo cifras á direita de cada resto; os algarismos, que assim se acham em seguida no quociente exprimem as decimas, as centesimas, as millesimas etc. do numero decimal equivalente á fracção proposta.

Para se poder dividir o numerador pelo denominador é preciso ajuntar ao numerador cifras bastantes para que se torne divisivel pelo denominador; ora cada cifra, que se ajunta ao numerador, o torna dez vezes maior, por tanto o quociente se torna tambem 10 vezes maior, e é preciso dividi-lo por 10 etc. para que represente a fracção. Por exemplo seja proposto reduzir $\frac{3}{4}$ á decimaes; para que o numerador 3 seja divisivel por 4, é preciso ajuntar-lhe duas cifras; isto é, multiplica-lo por 100; e temos então $\frac{300}{4}=75$; ora assim tornamos o numerador 100 vezes maior do que era, e o quociente 75 tambem é cem vezes maior do que deve ser. Para que exprima realmente o quociente da divisão de 3 por 4 é preciso que seja dividido por 100; logo o quociente é $\frac{75}{100}$ ou 0,75; temos pois $\frac{3}{4}=0,75$. Por outra o numerador 3 foi multiplicado por 100 ou reduzido à centesimas; o quarto de 300 centesimas é 75 centesimas, ou 0,075. Não se ajunta as cifras ao numerador senão uma depois de outra á medida, que se faz a operação, deste modo as decimaes acham-se immediatamente no quociente. Por exemplo seja proposto reduzir $\frac{45}{50}$ á fracções decimaes; escrevemos como para uma divisão ordinaria, e como 45 não é divisivel por 50 ajuntamos uma cifra, e fazemos a divisão de 450 por 50, e achamos no quociente 9; mas 9 representa decimas, porque o numero dividendo é 450 decimas, e o quociente deve ser dividido por 10, porque o dividendo foi multiplicado por 10.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 50 \\ \hline 450 & 0,9 \\ 450 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Como não fazemos uso das decimaes senão para evitar as fracções ordinarias, é melhor emprega-las para aproximarmos dos quocientes, que não podemos obter exactamente; o que se faz convertendo em decimas, centesimas, millesimas etc. os restos da divisão, de modo que possam ser divididos pelo divisor, como no exemplo seguinte:

```
245678 | 120
240      2047,25
---
  567
  480
  ---
   808
   848
   ---
    300
    240
    ---
     600
     600
     ---
     000
```

Tambem esta operação é um caso particular desta outra mais geral; avaliar o quociente de uma divisão em fracções de uma especie dada. Para isto converte-se o dividendo em fracção da especie dada multiplicando-o pelo denominador da fracção. Assim para avaliar em 15 avos o quociente de 7 dividido por 3, multiplicamos 7 por 15 e dividimos o producto 105 por 3, e temos por resultado $\frac{35}{15}$, que é o quociente procurado.

Exemplos da transformação de fracções ordinarias.

1.º	$\frac{1}{2} = 0,5$	7.º	$\frac{7}{800} = 0,00875$
2.º	$\frac{3}{4} = 0,75$	8.º	$\frac{237}{1250} = 0,2976$
3.º	$\frac{13}{16} = 0,8125$	9.º	$\frac{11}{16000} = 0,0006875$
4.º	$\frac{17}{20} = 0,85$	10.º	$\frac{15}{1280} = 0,01171875$
5.º	$\frac{3}{40} = 0,075$	11.º	$\frac{1}{1000} = 0,0001$
6.º	$\frac{12}{125} = 0,136$	12.º	$\frac{1}{2048000} = 0,00000048828125$.

(141) Nem sempre podemos transformar uma fracção ordinaria em uma fracção decimal exactamente; mas podemos sempre saber de antemão se a divisão do numerador pelo denominador de uma fracção nos dará um quociente exacto ou não.

Quando esta divisão nos dá um quociente exacto, podemos representar a fracção exactamente em decimaes; quando não dá um quociente exacto, não a podemos representar em decimaes exactamente.

1.º Quando o denominador da fracção, é a unidade seguida de cifras, a divisão fornece sempre um quociente exacto, e sabemos já como devemos representar estas fracções em decimaes, mas então nada fazemos senão escrever a mesma fracção de um modo differente; $\frac{1}{10}=0,1$; $\frac{3}{100}=0,03$.

2.º Quando o denominador da fracção é um numero, que contém somente os factores 2 e 5, que são os factores de 10, a fracção pode sempre ser expressada exactamente em decimaes. Quando reduzimos uma fracção a decimaes escrevemos à direita do numerador 1, 2, 3, etc. cifras, o que vem a ser o mesmo, que multiplical-o por 10, 100, 1000 etc., e dividimos então este producto pelo denominador. Para que se possa effectuar esta divisão sem resto é preciso, que o denominador, que é primeiro (nas verdadeiras fracções reduzidas à mais simples expressão), em relação ao numerador primitivo, seja um divisor ou factor de 10, de 100 etc. (93, 2.º obs. 2.ª) ora para que o denominador seja um divisor de 10, 100, 1000 etc. é preciso que seja 2 ou 5, ou bem uma potencia de 2 ou de 5, ou emfim o producto de 5 por 2, ou de uma potencia de 5 por uma potencia de 2.

Assim pois as fracções $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{25}$ etc. podem ser representadas exactamente por decimaes. O numero de algarismos decimaes precisos para representar estas fracções, é igual ao numero de vezes, que entra no denominador, aquelle destes dous factores que entra mais vezes; por outra é igual á mais alta potencia de 2 ou de 5, que entra no denominador. Por exemplo $\frac{3}{200}$ representa-se por 3 algarismos decimaes, porque $200=2\times 2\times 2\times 5\times 5=2^3\times 5^2$, e de facto $\frac{3}{200}=0,015$. E' preciso observar que multiplicando $\frac{3}{200}$ por 1000 ou por $2^3\times 5^3$ temos $\frac{3\times 2^3\times 5^3}{2^3\times 5^2}=3\times 5$, supprimindo os factores communs; e $3\times 5=15$, numerador da fracção decimal $\frac{15}{1000}$. Em todos os mais casos uma fracção não pode ser representada exactamente em decimaes, mas pode o ser aproximativamente. Como os restos da divisão do numerador pelo denominador são sempre necessariamente menores que o divisor, e que o numero destes restos é indefinito, não podemos deixar de breve encontrar um delles outra vez, e então teremos uma segunda vez o mesmo dividendo, que conduz ao quociente, e resto subsequente que se obteve na primeira vez, e assim por diante: achamos assim pois no quociente periodicamente os mesmos algarismos na mesma ordem; e como este periodo estabelece-se quando encontramos um mesmo resto já achado, e que estes restos são menores que o denominador, o numero destes restos differentes, que podemos encontrar, e ao mais igual ao divisor menos um, portanto o periodo é composto de menos algarismos do que o denominador tem unidades, e ao mais igual ao numero das unidades do denominador menos uma.

(142) Quando o periodo principia nas decimas chama-se uma fracção periodica simples; quando o periodo não principia senão depois de um certo numero de decimaes, chama-se fracção periodica mixta. Por exemplo, 0,2727272727 é uma fracção periodica simples cujo periodo é 27; e 0,013676767 é uma fracção periodica mixta cujo periodo é 67, a parte não periodica é 0,013. As fracções periodicas chamam-se tambem circulantes. Seja por exemplo proposto transformar a fracção $\frac{6}{7}$ em decimaes.

```
60 | 7
56 |---------
-- | 0,8571428
 40
 35
 --
  50
  49
  --
   10
    7
   --
    30
    28
    --
     20
     14
     --
      60
```

O periodo principia neste exemplo no 6º algarismo, isto é, depois de tantas operações quantas unidades tem o divisor 7 menos uma.

Seja proposto este outro exemplo $\frac{13}{37}$.

```
130 ( 37
111 { 0,351351
 190
 185
  150
   37
  130
  111
   190
   185
    50
    37
   130
```

Neste exemplo o periodo manifesta-se depois da 3.ª operação muito antes do que marca o divisor 37.

3.º Exemplo: $\frac{147}{875}$.

```
1470 ( 875
 875 { 0,168
 5950
 5280
  7000
  7000
  0000
```

Aqui a fracção é limitada a pesar do denominador $875 = 7 \times 125$ conter o factor 7; mas é preciso notar, que este mesmo factor acha-se no numerador $147 = 7 \times 21$, e que a fracção reduzida á mais simples expressão é $\frac{21}{125} = \frac{21}{5 \times 5 \times 5}$.

4.º Exemplo.—Seja proposto reduzir á decimaes $\frac{29}{84}$.

$$\begin{array}{l|l} 290 & 84 \\ \underline{252} & \overline{0,345238095} \\ \quad 380 & \\ \quad 440 & \\ \quad\ 200 & \\ \quad\ 320 & \\ \quad\quad 680 & \\ \quad\quad 800 & \\ \quad\quad\ 440 & \end{array}$$

O periodo aqui se manifesta depois da oitava operação, mas o que ha de notavel é que as duas primeiras decimaes não fazem parte do periodo, em quanto que nos exemplos acima o periodo principia logo no primeiro algarismo.

(143) Aproxima-se tanto mais do valor de uma fracção quantas mais decimaes se calculam no quociente. Os restos diminuem muito rapidamente de valor, pois representam successivamente decimas, centesimas, millesimas etc. e como são divididas pelo divisor para achar o que falta do quociente obtido para ser exacto, pode-se sempre tomar bastantes algarismos no quociente para que o numero decimal, que resulta difira tão pouco da fracção dada quanto se queira. Para reduzir uma fracção ordinaria á decimaes, multiplicamos o seu numerador por 10, 100, 1000 etc. e dividimos pelo denominador; e por este meio reduzimos a fracção dada á uma outra, que tem por denominador 10, 100, 1000 etc.. Por exemplo seja proposto reduzir $\frac{7}{16}$ á decimaes; o que é o mesmo que representar esta fracção por uma outra, que tem por denominador 10, 100, 1000 etc.; ora multiplicando o numerador e o denominador desta fracção por 10, 100, 1000 etc. temos umas poucas de fracções todas de igual valor, todas equivalentes á $\frac{7}{16}$ (119); estas fracções são $\frac{70}{160}$, $\frac{700}{1600}$ $\frac{7000}{16000}$ etc. Os denominadores de todas estas fracções são divisiveis por 16 exactamente pois estas fracções são as mesmas que as seguintes: $\frac{70}{16 \times 10}$ $\frac{700}{16 \times 100}$ $\frac{7000}{16 \times 1000}$. Se por tanto um dos numeradores é tambem divisivel por 16, podemos dividir tanto o numerador como o denominador por 16, e obtemos uma fracção de igual valor (119) tendo por denominador 10, 100,

1000 etc. Assim pois toda a questão se reduz a achar um numero 70, 700, 7000, 70000 etc., que seja divisivel exactamente por 16, e é este o meio, que empregamos (140) para transformar uma fracção ordinaria em decimaes. Procedendo assim achamos, que 70000 é divisivel por 16 sem resto, isto é, que $70000 = 16 \times 4375$, e que a fracção $\frac{70000}{16 \times 10000} = \frac{16 \times 4375}{16 \times 10000} = \frac{4375}{10000} = \frac{7}{16}$. Quando uma fracção não pode ser reduzida á decimaes, é porque multiplicando o seu numerador por 10, 100, 1000 etc. nunca chegamos á um numero, que seja divisivel pelo denominador; nestes casos porem podemos sempre achar uma fracção decimal muito aproximada em valor da fracção dada. Seja por exemplo proposto reduzir a fracção $\frac{1}{7}$ á decimaes

$$7 \mid \underline{10000000000000} \atop 14285712357 \text{ etc.}$$

O quociente neste caso nunca se termina, é uma repetição continua d'um periodo; mas se tomarmos por numerador um numero dos algarismos deste quociente, e como denominador .1 seguido de tantas cifras quantas foram empregadas para achar o quociente, que tomamos para numerador, teremos uma fracção, que differe muito pouco de $\frac{1}{7}$; que differe tanto menos, quantos mais algarismos do quociente empregamos no numerador, e mais cifras no denominador. Assim

$\frac{1}{10} < \frac{1}{7}$ e a differença é de $\frac{3}{70}$, pois $\frac{7}{70}$ é $< \frac{10}{70}$ de $\frac{3}{70}$.

$\frac{14}{100} < \frac{1}{7}$ e a differença é de $\frac{2}{700}$; pois $\frac{98}{700}$ e $< \frac{100}{700}$ de $\frac{2}{700}$.

$\frac{142}{1000} < \frac{1}{7}$ e a diffença é de $\frac{6}{7000}$, pois $\frac{994}{7000}$ é $< \frac{1000}{1000}$ de $\frac{6}{70000}$.

E temos na 1.ª columna uma serie de fracções, que se aproximam cada vez mais de $\frac{1}{7}$, e que differem d'esta fracção por quantias cada vez menores, como se vê na 3.ª columna. Por tanto ainda que não possamos achar uma fracção decimal, que seja exactamente igual a fracção $\frac{1}{7}$, podemos achar uma, que se aproxime della, tanto quanto se queira, isto é, que della diffira de uma quantia tão pequena quanto se queira.

EXEMPLOS DE DECIMAES PERIODICAS.

1.º $\frac{2}{3}=0,6666$ . .

2.º $\frac{3}{7}=0,4285714$ periodo 428671.

3.º $\frac{15}{17}=0,88235294117647\,05$, periodo

4.º $\frac{17}{19}=0,8947368421052631\,57$, periodo.

5.º $\frac{17}{30000}=0,00056666$

(144) As decimaes definitas, isto é, que tem um numero determinado de algarismos podem ser sempre reduzidas á fracção ordinarias, escrevendo-as como fracções, o que não é senão uma traducção, e reduzindo a fracção á sua mais simples expressão; por exemplo a decimal 0,75 converte-se em fracção ordinaria, escrevendo-se $\frac{75}{100}$, que não é senão um outro modo de representar a mesma quantidade, e depois reduzindo a fracção $\frac{75}{100}$ á sua mais simples expressão (121) que é $\frac{3}{4}$. Muitas fracções reduzidas á decimaes dão origem á fracções periodicas umas simples, outras mixtas; ora uma decimal desta especie não póde ser reduzida pelo methodo acima á fracção ordinaria, porque o numero de algarismos das decimaes sendo infinito, não podemos ter para representar a fracção senão numeradores e denominadores approximados; mas temos um outro modo de converter toda fracção decimal periodica simples ou mixta à uma fracção ordinaria. Esta questão apresenta dous casos distinctos, 1º quando é periodica simples, 2º quando é periodica mixta.

1º Caso:

FRACÇÕES DECIMAES PERIODICAS SIMPLES. As fracções, que tem por denominador um numero qualquer de noves, não tem no periodo, quando reduzidas á decimaes, senão um algarismo significativo, que é a unidade. Por exemplo:
$\frac{1}{9}=0,11111$ etc. ao infinito.

$\frac{}{99}=0,010,10,10,101$ etc. ao infinito.

$\frac{1}{999}=0,001001001001$ etc. ao infinito.

E assim de todas as outras fracções de 3, 4, 5, 6, etc. noves no denominador; pois cada divisão parcial effectuando-se sobre os numeros 10, 100, 1000, etc. deixa sempre por resto 1. Aproveitando esta observação podemos facilmente passar de uma fracção decimal periodica, á fracção ordinria de que deriva. Por exemplo é evidente, que a fracção decimal periodica 0,333333 etc. é a mesma que 0,11111 etc. $\times 3$; e como sabemos que 01111 etc. é o desenvolvimento de $\frac{1}{9}$ podemos concluir que 0,33333 e igual á $\frac{1}{9}\times 3=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Quando o periodo é de dous algarismos compara-se com o desenvolvimento de $\frac{1}{99}$, quando de 3, 4 etc. algarismos, com os desenvolvimentos de $\frac{1}{999}, \frac{1}{9999}$. Por exemplo 0,324324324 etc. é uma fracção periodica de 3 algarismos, é evidente que esta fracção é igual á 0,001001001 etc. $\times 324=\frac{1}{999}\times 324=\frac{324}{999}=\frac{12}{37}$.

Portanto em geral para achar a fracção ordinaria, de que resulta uma decimal periodica simples devemos escrever como numerador o periodo, como denominador um numero composto de tantos 9 quantos algarismos tem o periodo.

1.º Exemplo. Qual a fracção ordinaria igual á $0,\dot{6}66$ etc $0,\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

2.º Reduza-se $0,\dot{3}\dot{6}$ a fracção ordinaria $0,\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$.

2º Caso:

Fracções decimaes periodicas mixtas. Se o periodo não principia com o primeiro algarismo decimal podemos transferir a virgula para logo antes do periodo, e avaliar a fracção principiando deste algarismo somente, considerando como inteiros os que ficam á esquerda; não teremos assim mais que fazer senão depois dividir o resultado por 10, 100, 1000 etc. conforme o numero de lugares, de que se tem feito adiantar a virgula para a direita, pois por esta operação multiplicamos a fracção por 10, 100, 1000 etc.

Por exemplo na fracção $0,32\dot{4}\dot{1}41$ etc. o periodo principia no 3º algarismo decimal, e os dous primeiros não fazem parte d'elle, pondo a virgula depois do 2º algarismo temos que avaliar a fracção $32,\dot{4}\dot{1}4\dot{1}$ etc., a parte periodica corresponde á $\frac{41}{99}$; temos pois por resultado $32\frac{41}{99}$, mas esta fracção é igual à $32,\dot{4}\dot{1}$, que é cem vezes maior que a fracção $0,32\dot{4}\dot{1}$: (144) para achar o valor de $0,32\dot{4}\dot{1}$ é preciso dividir $32\frac{41}{99}$ por cem, e assim temos à final $\frac{32}{100}+\frac{41}{9900}$ ou reduzindo ao mesmos denominador $\frac{32X99}{9900}+\frac{41}{9900}=\frac{3209}{9900}$.

Este calculo pode ser simplificado do modo seguinte: em lugar de calcularmos $\frac{32X99}{9900}+\frac{41}{9900}$, podemos primeiramente transformar $\frac{32X99}{9900}$ em $\frac{32X(100-1)}{9900}=\frac{3200-32}{9900}$, e então temos $\frac{3200-32}{9900}+\frac{41}{9900}=\frac{3241-32}{9900}$

Para converter uma fracção periodica mixta em fracção ordinaria, devemos tomar para numerador a parte não periodica, e mais o periodo, diminuido da parte não periodica, e por denominador tantos noves quantos algarismos tem a parte periodica, seguidos de tantas cifras quantos são os algarismos da parte não periodica.

Exemplos:

1.º A' que fracção ordinaria corresponde $0,13\dot{8}8=\frac{8+13X9}{900}=\frac{8+13X(10-1)}{900}=\frac{8+130-13}{900}=\frac{138-13}{900}$

2.º Qual é a fracção ordinaria equivalente á $2,4\dot{1}\dot{8}$ etc. $2+0,418\frac{418-4}{990}=\frac{414}{990}=\frac{207}{495}=\frac{23}{55}$ por tanto $2,4\dot{1}\dot{8}=2\frac{23}{55}$.

(145) Observação. Para formarmos uma ideia exacta da natureza das fracções periodicas quando expressadas em fracções ordinarias é preciso considerar, que a fracção periodica é uma expressão, que se aproxima tanto mais da fracção ordinaria equivalente, quantas mais decimaes se tomam em consideração, e que a fracção decimal não tem limite. Seja por exemplo proposta a fracção decimal 0,9999 etc. até o infinito, o valor d'esta fracção é pela regra acima $\frac{9}{9}=1$, assim representa a unidade. Entretanto seja qual for o numero de 9 que tomamos, nunca teremos exactamente a unidade por resultado, se tomamos o primeiro algarismo temos $\frac{9}{10}$; e a unidade é

igual á $\frac{10}{10}$ logo $\frac{9}{10}=1-\frac{1}{10}$, e falta um decimo para que seja a fracção igual á 1. Se tomamos dous algarismos temos $\frac{99}{100}$, a unidade é igual $\frac{100}{100}$; logo $\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}$, assim pois já o valor se aproxima mais da unidade porem ainda ha uma differença de $\frac{1}{100}$, e assim por diante $\frac{999}{1000}=1-\frac{1}{1000}$, $\frac{9999}{10000}=1-\frac{1}{10000}$, de modo que podemos aproximar de 1, tanto quanto quizermos, sem porém nunca obter exactamente este valor. A unidade aqui pois não é senão o que se chama em mathematicas um limite, cuja expressão é 0,99999... do qual se aproxima tanto mais, quantas mais decimaes se tomam. Do mesmo modo as fracções, que achamos como equivalentes das decimaes periodicas, ou que dão origem a estas decimaes, são limites, por exemplo 0,33333 etc. aproxima-se tanto mais de $\frac{1}{3}$ quantas mais decimaes tomamos, pois $\frac{3}{10}$, por exemplo differe de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{30}$, pois $\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{10}{30}-\frac{9}{30}=\frac{1}{30}$, $\frac{33}{100}$ differe de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{300}$, pois $\frac{100}{300}-\frac{99}{300}=\frac{1}{300}$; e assim por diante.

(146) Podemos sempre saber á priori se uma fracção dá origem á uma decimal periodica simples ou mixta.

Já sabemos (141), que quando uma fracção tem por unicos factores 2 e 5 no denominador, a fracção decimal é exacta, e que quando tem outros factores é periodica.

1.° Quando o denominador de uma fracção não contem nenhum dos factores 2 ou 5, a reducção desta fracção em decimaes dá origem á uma fracção decimal periodica simples.

Reduzindo esta fracção á sua mais simples expressão temos uma fracção irreduzivel, cujo denominador não contém os factores 2 e 5; a conversão desta fracção em decimaes dá origem a uma fracção decimal periodica.

Demais o periodo deve principiar logo pelas decimas, porque se essa fracção fosse periodica mixta seria equivalente á uma fracção ordinaria tendo um denominador terminado por uma ou mais cifras (144) esta fracção sendo igual á uma fracção irreduzivel cujos denominadores não contém os factores 2 e 5 de 10, todos os factores 2 e 5 de seu denominador devem entrar no seu numerador, que deverá por tanto ser terminado á direita por uma cifra afim de que possa ser divisivel por 10; mas isto é impossivel, pois para isto seria preciso, que o ultimo algarismo da parte não periodica fosse igual ao ultimo da parte periodica, o que não pode ser. O periodo pois principia logo nas decimas. Por exemplo seja proposto reduzir $\frac{6}{63}$ cujo denominador não contém os factores 2 e 5 á uma decimal; esta fracção simplificada fica sendo $\frac{2}{21}$, ou $\frac{2}{3\times7}$; a divisão de 2 por 21 não pode fornecer senão um periodo, que principia desde o algarismo de decimas; pois supponhamos, que dá pelo contrario um periodo mixto como $0{,}234\dot{5}\dot{6}$, sendo o periodo 56, a regra dada para reduzi-la á uma fracção ordinaria é $\frac{23456-234}{99000}$ esta fracção deve ser igual á $\frac{2}{3\times7}$; portanto todos os factores 2 e 5 do denominador 9900 devem desaparecer, o que exige que 23456—234 contenha estes factores, portanto este numerador deve ser divisivel por 10, e seu primeiro algarismo a direita deve ser uma cifra; é preciso pois, que tirando 234 de 23456 o primeiro algarismo á direita do resto seja uma cifra; o ultimo algarismo 4 da parte não periodica, deverá ser igual ao ultimo algarismo 6 da parte periodica; o que é contrario a hypothese, pois que então o periodo seria 23656, etc. e principiaria no segundo algarismo; do mesmo modo se prova, que não pode principiar senão no primeiro algarismo decimal.

2.º Quando o denominador de uma fracção irreduzivel contém os factores 2 e 5 combinados com outros factores, a reducção desta fracção á decimaes dá origem á uma fracção decimal periodica mixta: e o numero de algarismos decimaes não periodicos, que se acha entre a virgula e o periodo, é igual ao numero de vezes, que aquelle dos factores 2 ou 5 que entra mais vezes como factor no denominador da fracção é contido neste denominador. Por exemplo seja proposto reduzir á decimaes a fracção $\frac{3397}{24750}$, o denominador $24750=2\times5\times5\times5\times99$; o numero 99 não sendo divisivel nem por 2 nem por 5; o denominador contém 3 vezes o factor 5 e uma vez o factor 2. Esta fracção deve dar origem á uma decimal periodica mixta tendo uma parte não periodica contendo 3 algarismos. A divisão de 5397 por 24750, dá um quociente periodico mixto, pois se tivessemos um quociente periodico simples 0,3737 por exemplo, este deveria representar a fracção $\frac{37}{99}$ que seria igual á fracção $\frac{3397}{24750}$; ora estas fracções reduzidas ao mesmo denominador, tem por numeradores 3397×99

e 24750×37, que por hypothese devem ser iguaes. O denominador da fracção proposta é divisivel por 2 e por 5, o producto 24750×37 tambem é divisivel por 2 e por 5; mas $3397\times99=37\times24750$, logo o producto 3397×99 é divisivel por 2 e por 5; mas a fracção $\frac{3397}{24750}$ sendo irreduzivel, seu numerador 3397 não pode conter nenhum dos factores primeiros 2 e 5 do denominador 24750; seria pois preciso que 99 fosse divisivel por 2 e por 5, o que não é possivel, pois que numeros terminados por 9 não são divisiveis nem por 2 nem por 5. Por tanto podemos concluir, que a divisão de 8397 por 24750 não pode fornecer um periodo simples, e como o quociente é periodico, segue-se, que é mixto.

Agora resta provar, que o denominador contendo 3 veses 5 e uma vez 2 por factores, a parte não periodica do quociente da divisão de 3397 por 24750 deve conter 3 algarismos. O denominador 24750 sendo$=2\times5\times5\times5\times99$ para fazer desapparecer os factores 2 e 5 contidos neste denominador devemos multiplicar o numerador por $10\times10\times10=2\times5\times2\times5\times2\times5$, o que vem a ser o mesmo que multiplicar a fracção por 1000, e supprimir depois todos os factores 2 e 5 contidos nos dous termos da fracção. Effectuando a operação temos

$$\frac{3397\times2\times5\times2\times5\times2\times5}{2\times5\times5\times5\times99}=\frac{3397\times2\times2}{99}=\frac{13588}{99}$$

O denominador 99 desta ultima fracção não contém mais os factores 2 e 5, a divisão de 13588 por 99 dà pois um quociente periodico simples.

Mas para desta fracção tirar o valor verdadeiro da fracção primitiva $\frac{3397}{24750}$, é preciso dividir o periodo simples por 10 trez vezes, ou por 1000 o que é o mesmo que adiantar a virgula de tres lugares para a esquerda. Por tanto o quociente de 3397 divididos por 24750 contém 3 algarismos decimaes entre a virgula e o periodo; de facto fazendo a divisão achamos $0{,}137\dot{2}\dot{5}\dot{2}\dot{5}$ etc. O mesmo raciocinio applica-se à qualquer outro exemplo, e assim esta propriedade é geral.

(147) Quando uma fracção decimal não é senão aproximada, ou quando não conhecemos o periodo, o problema de a reduzir á uma fracção ordinaria apresenta uma infinidade

de soluções pois 0,75,0,756,0755 são iguaes á $\frac{3}{4},\frac{189}{250}\,\frac{151}{200}$, que reduzidas á decimaes tem 0,75 por primeiros algarismos.

§ 4.°

Das aproximações em decimaes.

(148) Os numeros decimaes não são, quase sempre, senão numeros, que representam as fracções aproximadamente; pois só quando o numerador é um multiplo de 2 ou 5, é que a fracção pode ser representada exactamente em decimaes. Para os uzos practicos podemos nos contentar com uma aproximação determinada, que não exceda uma certa fracção da unidade dada.

Para se obter o valor de um numero à menos de uma unidade decimal de uma ordem dada, basta supprimir todos os algarismos, que exprimem unidades de ordem inferior. Por exemplo 0,1428 é uma fracção muito aproximada do valor de $\frac{1}{7}$ mas 0,142857 é ainda mais aproximada, e 0,142857142856 ainda mais. Por tanto se para o fim, que temos em vista nos basta achar o valor de $\frac{1}{7}$ á menos de um centesimo, tomamos a decimal 0,14 para representa-la; se queremos ter o valor desta fracção á menos de um millesimo tomamos 0,142 para representa-la, e assim por diante.

Quando um numero não é terminado por uma serie infinita de 9, a totalidade dos algarismos, que se supprimem para a direita tem sempre um valor menor que uma unidade da ordem do ultimo algarismo conservado. Por exemplo, 37,46785 etc. supprimindo o que fica á direita de 6 centesimos, a parte supprimida é 0,00785, numero menor, que a fracção periodica 0,00999, ou que um centesimo.

Para nos aproximar o mais possivel do valor de um numero decimal, quando se supprimem muitos algarismos á sua direita devemos distinguir 3 casos: 1° se o primeiro algarismo que segue o que conservamos é menor que 5, supprimimos este algarismo e os que lhe ficam á direita; 2° se o algarismo que supprimimos é maior que 5 ou igual á 5, mas seguido de um algarismo significativo, devemos, supprimindo-os, augmentar o ultimo algarismo conservado de uma unidade; 3° se o algarismo supprimido é 5, mas não é seguido de algarismos significativos, podemos deixar o ultimo algarismo conservado sem alteração, ou augmenta-lo de uma unidade. Em todos estes casos o erro não pode exceder uma metade da unidade da ultima ordem conservada. Supponhamos, que medimos uma distancia, e achamos, que tem 17,846217 de legoas. Podemos então dizer, que a distancia é de 17 legoas, se não precisamos de grande exactidão, dispresando as fracções; mas este numero apesar de ser o numero inteiro de legoas da distancia, não é o mais aproximado, pois já que a distancia é de 17 legoas, e de mais 8 decimas da legoa, é por consequencia maior que 17 $\frac{1}{2}$ legoas, é mais aproximado da verdade dizer, que é de 18 legoas, pois neste ultimo caso o erro é de menos de meia legoa, quando dizendo 17 o erro é de mais de meia legoa. Se precisamos de mais exactidão, e quisermos tomar em consideração as decimas partes da legoa, devemos dizer que a distancia é de 17,8 legoas, porque então apesar deste numero ser muito pequeno de 0,046217 não é tanto menor quanto 17,9 seria maior, e o erro é de menos de $\frac{1}{20}$ ou de $\frac{1}{2}$ de um decimo. Se quisermos ter a mesma distancia exacta até centesimos é mais correcto dizer, que é de 17,85 do que de 17,84, pois o ultimo é muito pequeno de 0,006217 que é mais que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{100}$ ou 0,005, e 17,85 é muito grande de menos que 0,005.

Como nos calculos em que empregamos decimais o que queremos quase sempre é uma aproximação, é bom mostrar como podemos simplificar as quatro operações sobre decimaes, de modo á conservar no resultado o gráo de exactidão, ou de aproximação, que achamos necessario para o fim que temos em vista.

(149) A' respeito da addição e da subtracção pouco temos, que dizer. Para sommar por exemplo uns poucos de numeros decimaes, querendo ter na somma decimaes de uma ordem dada somente, podemos despresar nos numeros todos os algarismos decimaes inferiores aos que queremos conservar na somma, tendo as cautelas indicadas em (148). Seja proposto sommar 0,00875, e 0,2976 com exactidão até millesimas: temos pela regra.

0,009	0,00875
0,298	0,2976
0,307	0,30635

Mais exacto seria neste caso tomar as decimaes dos numeros até os algarismos de um gráo menor, que os que queremos conservar—por exemplo:

$$\begin{array}{r} 0{,}0088 \\ 0{,}2976 \\ \hline 0{,}3064 \end{array}$$

E esta somma é exacta até millesimas.

Para a subtracção devemos proceder do mesmo modo: seja proposto achar a differença entre 0,0135546875 e 0,01171875, com exactidão até millesimas: tomamos os numeros até decimas millesimas, e temos

$$\begin{array}{r} 0{,}0136 \\ 0{,}0117 \\ \hline 0{,}0029 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0135546875 \\ 0{,}01171875 \\ \hline 0{,}0028369375 \end{array}$$

resultado exacto até millesimas.

(150) Seja proposto multiplicar 0,02534 por 0,03256 conservando no producto só tres lugares decimaes, isto é, achar este producto exacto até as millesimas. Pelo modo ordinario devemos fazer a operação assim

$$\begin{array}{r} 0{,}03256 \\ 0{,}02534 \\ \hline 13024 \\ 9768 \\ 16280 \\ 6512 \\ \hline 0{,}0008250704 \end{array}$$

E temos muito trabalho inutil, pois devemos desprezar todos os algarismos conservando só os 3 primeiros, augmentando o ultimo conservado de uma unidade de modo que temos 0,001. Podemos abreviar esta operação do modo seguinte. Sejam os numeros à multiplicar os seguintes 8,74623, e 2,34567; e queremos o producto exacto até decimas. Basta que nas multiplicações, do multiplicando por cada algarismo do multiplicador o ultimo algarismo á direita dos productos parciaes representem millesimas, isto é, unidades cem vezes menores que as do primeiro algarismo á direita do producto, que se quer achar, pois as de ordens inferiores não podem alterar este algarismo; portanto podemos proceder do modo seguinte.

Tomam-se os multiplicando e multiplicador só até millesimas e então temos.

$2\times8{,}746$	$=17{,}492$	isto é	$2\times\frac{8746}{1000}=\frac{17492}{1000}$
$0{,}3\times8{,}74$	$=2{,}622$	»	$\frac{3}{10}\times\frac{874}{100}=\frac{2622}{1000}$
$0{,}04\times8{,}7$	$=0{,}348$	»	$\frac{4}{100}\times\frac{87}{10}=\frac{348}{1000}$
$0{,}005\times8$	$=0{,}040$	»	$\frac{5}{1000}\times8=\frac{40}{1000}$
	$20{,}502$		

O producto procurado é pois $20{,}5$.

De facto pelo modo porque procedemos, quando multiplicamos o multiplicando por 2 unidades do multiplicador, desprezamos no multiplicando as unidades inferiores á millesimas, o erro no producto parcial e $<0{,}00099\times2$ ou que $0{,}001\times2=0{,}002$. Do mesmo modo nos 3 outros productos parciaes os erros são respectivamente menores que

$$0{,}3\times001=0{,}003$$
$$0{,}04\times01=0{,}004$$
$$0{,}005\times1=0{,}005$$

De mais despresando-se o resto $0{,}00067$ do multiplicador o erro, que resulta no producto total é menor que $8{,}74623\times0{,}00099$, ou que $8{,}74623\times0{,}001=0{,}00874623$.

O erro no producto total é menor que a somma $0{,}002+0{,}003+0{,}004+0{,}005+0{,}00874623$; este erro pois é effectivamente menor que $0{,}02074623<0{,}1$, isto é, menor que um decimo.

Para facilitar o calculo que acabamos de fazer, observaremos que o que queremos é multiplicar duas fracções decimaes uma pela outra, de modo que se conserve no producto um numero dado de decimaes, e poupar o trabalho de achar os outros algarismos decimaes: ora é evidente, que podemos escrever os algarismos do multiplicador em uma ordem inversa (4321 em vez de 1234) com tanto, que na operação se remova cada linha um lugar para a direita, em vez de para a esquerda. Por exemplo

```
   2221                 2221
   1234                 4321
   ----                 ----
   8884                 2221
  6663                  4442
 4442                    6663
2221                      8884
-------              -------
2740714              2740714
```

Seja agora proposto multiplicar 348,8414 por 51,30742 conservando só 4 decimaes no producto, invertendo o multiplicador, e procedendo como explicamos temos:

```
      348.8414
      2470315
    ----------
    17442070 |
     3488414 |
     1046524 |2
       24418 |898
        1395 |3656
          69 |66828
   ------------------
   17898,1522|23188
```

Cortando por uma linha vertical as 4 primeiras decimaes, e as columnas, que as produziram, é evidente, que formando a nossa abreviação temos de conservar; 1.° tudo o que fica á esquerda da linha vertical; 2.° tudo quanto é levado da primeira columna á direita da linha para a sua esquerda, considerando a primeira columna á esquerda da linha vertical vemos que 4, 4, 8, 5, 9, provém, o primeiro da multiplicação de 4 por 1; o 2.°, 4, de 1×3; o 3.°, 8, de 8×7; o 4.°, 5, de 8×4; o 5.° 9, de 4×2. Se pois arranjassemos o multiplicando e o multiplicador invertido do modo seguinte:

```
3488414
 2470315
```

cada algarismo multiplicador se acharia collocado debaixo do primeiro algarismo do multiplicando empregado com elle para formar os primeiros algarismos decimaes; e devemos notar, que o algarismo, que representa unidades no multiplicador 51,30742, isto é, 1 fica por baixo de 4, quarto algarismo decimal do multiplicando. Se nada proviesse da direita da linha vertical, a regra seria: Escreva-se o multiplicando e por baixo o multiplicador invertido, de modo que o algarismo das unidades d'este ultimo fique por baixo do algarismo do multiplicando das unidades da ordem menor, que se quer conservar no producto. Depois faça-se a multiplicação, como de costume, despresando porem os algarismos do multiplicando, que ficam á direita d'aquelle do multiplicador porque se multiplica; e escrevam-se os productos parciaes, de modo que os seus ultimos algarismos á direita fiquem uns por baixo dos outros n'uma só columna.

Para seguir esta regra de modo que se tome em consideração o que provem da primeira columna á direita da linha vertical, é preciso notar, que estes numeros contem duas partes, 1.ª, a que resulta directamente da multiplicação dos algarismos do multiplicador pelos do multiplicando, que lhe ficam á direita; e 2.º a que provem da somma da columna, que lhe fica á direita.

A primeira pode ser apreciada principiando a multiplicação de cada algarismo do multiplicador pelo algarismo do multiplicando, que lhe fica à direita, e levando as dezenas para o algarismo immediato, como se costuma fazer, sem escrever as unidades; mas ambas as partes podem ser tomadas em consideração ao mesmo tempo com bastante exactidão, levando 1 desde 5 até 15, 2, desde 15 até 25, isto e, levando o mais proximo numero de dezenas; em vez de em 37, por exemplo, levar 3, leva-se 4; porque 37 aproxima-se mais de 40, que de 30. Assim mesmo o ultimo algarismo não serà exacto, mas o erro pode ser evitado fazendo a multiplicação de modo que se conserve no producto um algarismo decimal mais do que se precisa, e a regra geral então é a seguinte. Escreva-se o multiplicando, e por baixo o multiplicador invertido de modo que o algarismo, que no multiplicador primitivo representava as unidades, fique por baixo do algarismo do multiplicando, que representa unidades da menor ordem, que se quer conservar no producto. Depois na multiplicação despresam-se todos os algarismos, que ficam á direita do que serve de multiplicador parcial, e escrevem-se os productos parciaes de modo que os ultimos algarismos à direita fiquem todos em uma columna vertical uns por baixo dos outros, tendo porém o cuidado de ajuntar a estes ultimos algarismos de cada producto parcial, as dezenas provenientes da multiplicação do multiplicador parcial pelo primeiro algarismo á sua direita no multiplicando, augmentado de 1, quando estes productos dão 5 atè 14, de 2, quando dão 15 atè 24; de 3, quando dão 25 atè 34 etc., e a somma de todos estes productos parciaes será o producto procurado exacto até o ultimo algarismo á direita.

Exemplos.

27,14986×92,41035—até 4 logares decimaes.

27,14986	27,14986	
5301429	29,41035	
24434874	13	574930
542997	81	44958
108599	2714	986
2715	108599	44
81	542997	2
14	24434874	
2508,9280	2508,9280	650510

Exemplo 2.°—128,67845×38,2463, conservando só tres decimaes no producto.

Resposta 4921,464

Exemplo 3.°—0,248264×725234, conservando 6, 5, e 4 decimaes.

Resposta 0,180,049, 0.18006, 0,1800

Exemplo 4.°—4745,679×751,751,4549 conservando no producto só inteiros.

Resposta 3569163

(151) Tambem podemos fazer uso de uma divisão abreviada fundada nos mesmos principios. Por exemplo seja proposto dividir 16,80437921 por 3,142, levando a divisão até um numero dado de algarismos decimaes, 5 por exemplo; pelo modo ordinario temos:

```
16,80437921  |5,142
15 710       |--------
-----        |5,34830
 10943
  9426
  -----
  15177
  12568
  ------
   2609|9
   2513|6
   ----|--
     96|32
     94|26
     --|---
      2|061
```

Corte-se por uma linha vertical como na multiplicação todos os algarismos que ficam á direita do primeiro algarismo 2 do ultimo resto 2061. Como na multiplicação podemos achar o que fica á esquerda desta linha por um methodo abreviado.

Depois do que temos dicto, tractando da multiplicação é inutil entrar em mais particularidades, e podemos dar logo a regra geral para dividir um numero decimal por outro conservando no quociente so um numero dado de algarismos decimaes.

Tomam-se tantos algarismos para a esquerda no divisor quantos são os algarismos inteiros e decimaes, que se quer conservar no quociente, e divide-se o dividendo por este numero. Depois considera-se cada resto como um novo dividendo; e divide-se cada um pelo divisor diminuido successivamente de um algarismo á direita, tendo o cuidado de augmentar o valor dos que ficão sendo preciso conforme a regra, dada na multiplicação.

Quando o divisor não tem tantos algarismos, quantos devem ser conservados no quociente principia-se a divisão do modo ordinario com todos os algarismos e continua-se assim até que o numero de algarismos no divisor, e os que ainda temos de achar no quociente são iguaes, então emprega-se ã abreviação acima indicada.

Exemplos. Divida-se 2508, 9230 6051 por 92, 41035, conservando só 4 decimaes no quociente.

```
2508,92806051 |92,4103(5
              |---------
 660721       |27,1498
  13849
   4608
    912
     79
      6
```

Para melhor intelligencia desta abreviação faremos a comparação deste modo de dividir com o modo geral e usual

```
 2508,92806051 |92,4103(5
 1848207       |---------
-------        |2
  660721|92410
  646872|-----
  ------|  7
   13849|9241
    9241|----
   -----|  1
    4608|924
    3696|---
    ----|  4
     912|92
     828|--
     ---| 9
      79|9
      73|-
      --|8=27.1498.
```

```
2508,92806051 | 92,41035
              |---------
 66072106       271498
  13848610
   46075730
    91116605
     79472901
      5544621
```

Exemplo 2.° Divida-se 721,17562 por 2,25782 conservando 5 decimaes no quociente.

Resposta 319,467

Exemplo 3.° Divida-se 37,10438 por 5715,96 conservando 5 decimaes no quociente.

Resposta 0,00649

(152) Na multiplicação e divisão de fracções decimaes, é inu-

til conservar no producto ou no quociente mais algarismos decimaes do que os que são exactos nos multiplicadores etc., que produzem o resultado. Supponhamos, que 9,98, e 8,96 são dous numeros aproximados até as centenas, isto é, que não possam ter de erro senão uma metade de centesimas. O valor verdadeiro de 9,98 acha-se entre 9,975, e 9,985; e o de 8,96 entre 8,955, e 8,965. Por tanto o producto dos numeros exactos, que representam estes dous numeros aproximados deve-se achar entre $9,975 \times 8,955$, e $9,985 \times 8,965$, isto é, tomando nos productos tres lugares decimaes entre 89,326, e 89,516. O producto dos numeros aproximados é $9,98 \times 8,96 = 89,4208$. Por consequencia no presente caso não podemos considerar, como exactos senão os algarismos, que exprimem inteiros neste producto, á saber, 89, ou talvez o que representa decimas.

A razão é que o erro commettido em tomar o numero 8,96, apezar de não passar de centesimas fica por meio da multiplicação elevado á 9,975 vezes estas centesimas, ou quase 10 vezes, o que altera o valor das decimas. Quando pois multiplicamos dous numeros aproximados um pelo outro o producto tambem não é senão aproximado; e é preciso conhecer até que ponto esta aproximação é levada, para podermos julgar do numero de decimaes exactas no producto, e não fazer calculos inuteis, procurando algarismos decimaes, que devemos depois necessariamente desprezar, para sermos consequentes com os principios admittidos nos dados do calculo. Sejam pois 54 e 23 dous factores inteiros aproximados á menos de meia unidade ou de $\pm\frac{1}{2}$; o producto exacto é pois comprehendido entre $(54+\frac{1}{2}) \times (23+\frac{1}{2}) = 54 \times 23 + (23+54) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, e $(54-\frac{1}{2}) \times (23-\frac{1}{2}) = 54 \times 23 - (23+54) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

O producto aproximado é 54×23. Assim pois o erro pode ser de $\frac{54+23}{2}$ para mais ou para menos, quando o erro é no mesmo sentido em ambos os factores; mas se são em sentido contrario, n'um sendo para mais, n'outro para menos o erro é menor; pois $(54-\frac{1}{2} \times (23+\frac{1}{2} = 54 \times 23 + 54 \times \frac{1}{2} - 23 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

Assim pois devemos aproveitar na pratica esta observação, e tractar sempre na multiplicação de dous factores aproximados de tomar um em excesso, e outro em falta, e não ambos em excesso ou em falta.

Se os factores são exactos somente até decimaes então o erro será menor, e determina-se do mesmo modo. Por exemplo sejam os factores 9,9, 8,9, exactos á menos de uma decima $(9,9 \pm \frac{5}{100}) \times (8,9 \pm \frac{5}{100}) = 8,9 \times 9,9 + (9,9 \pm 8,9) \times \frac{5}{100} + \frac{25}{10000}$; o erro pois é de $(8,9 \pm 9,9) \times \frac{5}{100} = \frac{9,9 \pm 8,9}{20}$.

Se são exactos até centesimos como 9,98, e 8,96 o erro é de $\frac{9,98 \pm 8,96}{200}$ etc. e assim por diante.

A somma destes dous numeros divididos por 200 é igual á 0,0947 e o producto destes dous numeros é igual á 89,4208 que pode ter um erro, de 0,0927 para mais ou para menos; assim $89,4208 + 0,0947 = 89,5155$ e $89,4208 - 0,0947 = 89,3261$; são os limites entre os quaes acha-se o producto; assim vemos, que no caso presente não podemos depender da exactidão até decimas; para que o algarismo decimal fosse exacto seria preciso, que o erro não excedesse de 0,05, e aqui pode ser de mais 0,09. Quando os erros se compensam ou são em sentido contrario nos factores, no producto o erro é muito menor pois é então igual $\frac{9,98 - 8,96}{200} = 0,0051$. A regra para achar o valor do erro é tomar a somma do multiplicador e do multiplicando, dividil-a por 2, e mudar a virgula tantos lugares para a esquerda quantos são os algarismos decimais exactos no multiplicando e multiplicandor.

Na divisão procede-se, como na multiplicação tomando o divisor e o dividendo, em vez de multiplicador e multiplicando, e procurando o quociente deste numero dividido pelo quadrado do divisor. Por exemplo seja proposto dividir 17,324 por 53,809, ambos numeros exactos até os millesimos; temos $\frac{17,324 + 53,809}{2} = 35,566$ que pela regra acima é reduzido á 0,36566, e dividindo este numero por $53,809 \times 53,809$ temos $\frac{0,36566}{53,809 \times 53,809} = 0,0002$. Assim o quociente destes dous numeros pode ser exacto até 4 lugares de decimaes.

(155) Podemos fazer as quatro operações arithmeticas com decimaes circulantes ou periodicas, achando no resultado periodos. As fracções periodicas, como sabemos, são simples ou

mixtas; chamam-se tambem semelhantes, quando o periodo principia no mesmo lugar decimal, como por exemplo $0,\dot{3}55\dot{5}$ e $42,7\dot{5}34\dot{5}34$; dissemelhantes, quando não principia no mesmo lugar, como $0,\dot{2}53253$, e $0,47\dot{5}252$. As fracções periodicas são conterminaes, quando o periodo acaba no mesmo lugar decimal; como $0,12\dot{5}55$ etc. e $0,\dot{3}5\dot{4}354$ etc. São semelhantes e conterminaes, quando os periodos acabam e principiam no mesmo lugar decimal; como $53,\dot{2}7\dot{5}3753$ etc. e $4,6\dot{3}2\dot{5}325$ $0,4\dot{6}3\dot{2}632$ etc.

(154) ADDIÇÃO DE FRACÇÕES PERIODICAS. — Para achar a somma de muitas fracções periodicas devemos tornal-as semelhantes e conterminaes, e então sommal-as como se fossem numeros inteiros assentando no ultimo algarismo á direita as dezenas provenientes da addição dos primeiros algarismos dos periodos.

Para tornar duas fracções periodicas semelhantes basta considerar o periodo como principiando em ambas no mesmo lugar decimal, considerando um ou mais algarismos do principio do periodo, como não fazendo parte delle: por exemplo 0,12(5) e 4,(163) podem ficar semelhantes considerando o periodo 163 como principiando no 3º algarismo, e então temos $4,16(\dot{3}1\dot{6})31\dot{6}$ etc. e ficando 16 no principio como numeros não fazendo parte do periodo, que em vez de ser 163 á principiar das decimas é então 316, á principiar das millesimas.

Tornam-se os periodos conterminaes fazendo com que os periodos acabem no mesmo lugar decimal; por exemplo, depois de termos feito as fracções $0,12\dot{5}$, e $4,\dot{1}6\dot{3}$ semelhantes, representando-as pelas fracções, $0,12\dot{5}$, e $4,16\dot{3}1\dot{6}$, podemos fazel-as conterminaes representando-as por $0,125\dot{5}5$ e $4,16\dot{3}1\dot{6}$

Assim para sommar as fracções $0,12\dot{5}$, $4,\dot{1}6\dot{3}$ $1,\dot{7}14\dot{3}$ e $2,\dot{5}\dot{4}$ devemos tornal-as semelhantes e conterminaes o que se faz do modo seguinte:

	Semelhantes	conterminal.
$0,12\dot{5}$	$=0,12(5)$	$=0,12555555555555$
$4,\dot{1}6\dot{5}$	$=4,16(316)$	$=4,16\dot{3}16316316316$
$1,\dot{7}14\dot{3}$	$=1,71(4371)$	$=1,71\dot{4}37143714371$
$2,\dot{5}\dot{4}$	$=2,54(54)$	$=2,5\dot{4}545452545454$
		$8,54854488111697$

Tambem podemos empregar outro meio, que é quasi tão conveniente como este e menos complicado. Por exemplo seja proposto achar a somma de $0,\dot{3}$ e $0,\dot{1}3\dot{5}$, reduzindo á fracções ordinarias temos $0,\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, e $0,\dot{1}3\dot{5}=\frac{135}{999}=\frac{45}{333}=\frac{15}{111}=\frac{5}{37}$, então $\frac{1}{3}+\frac{5}{37}=\frac{37+15}{111}=\frac{52}{111}=0.\dot{4}6\dot{8}$. Pelo modo acima teriamos

$$
\begin{array}{lr}
0,3 & =0,(\dot{3}3\dot{3}) \\
0,135 & =\underline{0,(\dot{1}3\dot{5})} \\
 & 0,(\dot{4}6\dot{8})
\end{array}
$$

(165) SUBTRACÇÃO DE FRACÇÕES PERIODICAS.—Seja proposto tirar $3,45\dot{7}3\dot{5}$ de $11,4\dot{7}\dot{5}$; devemos tornar os numeros semelhantes e conterminaes e fazer a subtracção como para numeros inteiros.

$$
\begin{array}{rr}
11,4(\dot{7}\dot{5})= & 11,47(\dot{5}75757) \\
3,45(\dot{7}3\dot{5})= & \underline{3,45(73573\dot{5})} \\
 & 8,01\,\dot{8}4002\dot{2}
\end{array}
$$

Pelas fracções ordinarias seja proposto tirar de 4,75, $0,37\dot{5}$.

Temos $4\frac{3}{4}$, e $0,375=\frac{375-37}{900}=\frac{338}{900}=\frac{169}{450}$; logo $4\frac{3}{4}-\frac{169}{450}=4,\frac{337}{900}=4,37\dot{4}$,

Pelo modo acima—

$$
\begin{array}{r}
4,75\dot{0} \\
\underline{0,37\dot{5}} \\
4,37\dot{4}
\end{array}
$$

Exemplo 2.° De $49.5\dot{3}$ tirar $1.\dot{7}5\dot{7}$

$$
\begin{array}{rr}
47,5\dot{3} & =47,5\dot{3}3\dot{3}5 \\
1,\dot{7}5\dot{7} & \underline{1,7\dot{5}77} \\
 & 45,77\dot{5}\dot{5}
\end{array}
$$

(156) MULTIPLICAÇÃO DE FRACÇÕES PERIODICAS. O melhor modo de achar o producto da multiplicação de duas fracções

periodicas é reduzil-as á fracções ordinarias equivalentes, e multiplical-as uma pela outra, e depois reduzir o producto á fracção decimal. Seja proposto multiplicar $0,\dot{3}\dot{6}$ por $0,2\dot{5}$.

$$\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$$
$$25=\frac{25}{90}=\frac{23}{90}$$

Por tanto o producto é $\frac{4}{11}\times\frac{23}{90}=\frac{92}{910}=0,092$.

Alguns autores de Arithmetica dão outras regras para se effectuar estas multiplicações sem reccorrer ás fracções ordinarias, mas são tão complicadas que é sempre mais conveniente empregar o processo acima exposto.

(157) Divisão das fracções periodicas. O melhor modo é tambem de recorrer as fracções ordinarias, transformando as fracções periodicas em fracções ordinarias equivalentes; então effectuar a divisão e transformar o quociente em fracção decimal.

Seja proposto dividir $0,\dot{6}$ por $2,\dot{3}$.

Temos $\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, e $2,\dot{3}=2\frac{3}{9}=2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ e por tanto $\frac{2}{3}\div\frac{7}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{2}{7}=0,285714$.

§ 5.º

Fracções continuas.

(158) Quando temos de considerar fracções, que tem numeradores e denominadores consideraveis, e que entretanto não tem factores communs, procuramos valores aproximados d'estas fracções, que sejam expressados por numeros mais simples, afim de podermos formar uma idéia mais clara da fracção.

Assim pois o objecto para que se empregam as fracções continuas, é para avaliar aproximadamente fracções, cujos termos são consideraveis e primeiros entre si.

Por exemplo seja proposta a fracção $\frac{159}{493}$; os dous termos desta fracção são primeiros entre si, e portanto a fracção é irreduzivel. Nesta forma não podemos fazer uma ideia muito clara do valor desta fracção; mas dividindo os dous termos della por 159, o que não altera o seu valor, temos $\frac{1}{\frac{493}{159}}$, ou effectuando a divisão indicada no denominador $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$ despresando a fracção $\frac{16}{159}$, a fracção $\frac{1}{3}$ que resulta é maior que a proposta pois que diminuimos o denominador; logo a fracção proposta acha-se entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$; pois que pondo 1 em lugar de $\frac{16}{159}$ temos $\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$, fracção mais pequena que a proposta pois augmentamos o denominador. Já podemos pois ter uma ideia mais clara da fracção $\frac{159}{493}$, e assaz exacta. Podemos porém formar uma ideia ainda mais exacta, isto é, achar uma fracção ainda mais aproximada de $\frac{159}{493}$ do que $\frac{1}{3}$. Para isto basta proceder com $\frac{16}{159}$ como fizemos com $\frac{159}{493}$; isto é, dividir os dous termos por 16; teremos então;

$$\frac{16}{159}=\frac{1}{\frac{159}{16}}=\frac{1}{9+\frac{15}{16}}$$

e a fracção proposta $é=\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{9+\dfrac{15}{16}}}$

despresando $\frac{15}{16}$, temos $\frac{1}{9}$, que é maior que $\frac{16}{159}$, segue-se pois que $\dfrac{1}{3+\frac{1}{9}}$ é menor que $\dfrac{159}{493}$ porque o seu denominador é maior do que deveria ser $\dfrac{1}{3+\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{\frac{28}{9}}=\dfrac{9}{28}$; assim a fracção $\frac{159}{493}$ acha-se entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{28}$. A differença destas duas fracções é $\frac{28-27}{3X28}=\frac{1}{84}$; por tanto, o erro que se commette tomando $\frac{9}{28}$

por valor da fracção $\frac{154}{493}$ é menor que $\frac{1}{84}$. Applicando o mesmo processo á $\frac{15}{16}$, temos $\frac{15}{16}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}$; a fracção proposta toma a seguinte forma

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

despresando $\frac{1}{15}$ o numero $\frac{1}{1}=1$ é maior que $\frac{15}{16}$; logo $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{10}$ é menor que $\frac{16}{159}$; e finalmente $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}=\cfrac{1}{\frac{31}{10}}=\frac{10}{31}$, e maior que $\frac{159}{493}$, por tanto $\frac{159}{493}$ acha-se entre $\frac{9}{28}$ e $\frac{10}{31}$; a primeira fracção sendo muito pequena, e a segunda muito grande a differença destas duas fracções é $\frac{10}{31}-\frac{9}{28}=\frac{1}{868}$ assim o erro não pode exceder de $\frac{1}{868}$, tomando $\frac{9}{28}$ ou $\frac{10}{31}$ para representar a fracção proposta.

(159) Por uma serie de operações chegamos a achar em termos mais simples fracções, que dão valores aproximados de uma outra fracção, cujos termos são mui grandes; a expressão

$$\cfrac{1}{3\times\cfrac{1}{9\times\cfrac{1}{1\times\cfrac{15}{16}}}}$$

é o que se chama uma fracção continua. Em geral entende-se por fracção continua uma fracção que tem por numerador a unidade, e por denominador um numero inteiro mais uma fracção, que tem por numerador a unidade e por denominador um numero mais uma fracção etc., e assim por diante.

Reflectindo sobre a marcha, que seguimos para reduzir $\frac{159}{493}$ em fracção continua, vemos que dividimos 493 por 159, o que deu um quociente 3 e um resto, que dividimos depois 159 por 16 o que deu por quociente 9, e por resto 15, depois dividimos 16 por 15 o que deu por quociente 1 por resto 1.

Podemos pois deduzir a seguinte regra para reduzir uma fracção qualquer em fracção continua.

Applica-se aos dous termos da fracção proposta o processo para achar o maior commum divisor (93); e continua-se a operação até que se obtenha um resto igual a zero. Os quocientes successivos, que se obtem assim, serão os denominadores das fracções propriamente dictas, que constituem a fracção continua; sendo todos os numeradores a unidade. Quando o numero é maior que a unidade o primeiro quociente representa a parte inteira, que entra na expressão da fracção continua. Exemplo. Seja proposto reduzir $\frac{351}{965}$ á fracção continua; temos pela regra acima.

	2	1	2	1	87
965	351	263	88	87	1
702	263	176	87	87	
263	88	87	1	00	

Por tanto $\frac{351}{965}=\frac{1}{2+\frac{263}{351}}$) $\frac{263}{351}=\frac{1}{1+\frac{88}{263}}$, $\frac{88}{263}=\frac{1}{2+\frac{87}{88}}$ $\frac{87}{88}=\frac{1}{1+\frac{1}{87}}$ ou

$$\frac{351}{965}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{87}}}}}$$

As fracções aproximadas são $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$.

Exemplo 2.º

Reduza-se $\frac{251}{764}$ a fracção continùa.

Resposta $\frac{1}{3}$, $\frac{22}{67}$, $\frac{53}{70}$, $\frac{114}{347}$.

Exemplo 3.º

Reduza-se $\frac{5056}{13891}$ á fracção continùa.

Resposta $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}\,\frac{81}{85}\,\frac{35}{96}$.

As fracções continuas são de muita importancia nas mathematicas, e tem muitas propriedades, mas não podemos expor toda a sua theoria sem empregar conhecimentos, que não temos ainda. No compendio de Algebra, que deve seguir á este, trataremos de novo da theoria das fracções continuas, dandolhe então toda a extensão precisa.

(160) OBSERVAÇÃO GERAL. — Temos considerado todas as quantidades, como podendo ser representadas por numeros inteiros, ou por fracções. Não é verdade entretanto que escolhendo uma quantidade para servir de unidade, qualquer outra quantidade da mesma especie possa ser exactamente representada, ou por um certo numero de unidades, ou de partes quaesquer da unidade. Para provar isto seria preciso fazermos uso de mais conhecimentos do que os que temos até agora adquirido neste compendio; mas podemos desde já mostrar, que podem existir quantidades, que não sejam nem unidades, nem partes da unidade. Tome-se uma linha de uma braça, por exemplo; divida-se esta linha em 10 partes, cada uma destas partes em 10 partes menores, e assim por diante. Se qualquer ponto na linha for tomado ao acaso não nos parece evidente, que ainda que as divisões decimaes sejam continuadas tão longe, quanto se queira, que um dos pontos da divisão deva cahir justamente no ponto tomado ao acaso; nem isto nos poderá parecer mais certo, se a divisão fosse feita em 7, 8, etc. partes em lugar de 10, ou emfim de qualquer modo, que se queira. Portanto pode haver uma parte de uma braça, que não seja uma fracção exacta da braça; e veremos, que é este um caso muito frequente nas altas mathematicas: estas quantidades são chamadas incommensuraveis; não podemos dellas tratar senão na Algebra.

(161) Aqui acaba-se propriamente a arithmetica; o que precede contém realmente as regras essenciaes para a avaliação dos valores, considerados os numeros como factos; e poderiamos desde já passar a consideral-os em geral. O que temos de tractar daqui por diante poderia ser tractado na Algebra mais abreviadamente; com tudo ha alguma vantagem em empregar o raciocinio na investigação dos problemas

Arithmetica sempre que se pode, quando não seja senão para exercer as nossas faculdades intellectuaes.

CAPITULO VII.

DA INVOLUÇÃO E EVOLUÇÃO

(162) Já tractamos das quatro operações fundamentaes da Arithmetica, e mostramos, como as podiamos fazer com numeros inteiros, e com fracções. Agora temos de tractar de mais duas operações (24, 5.°, 6.°) chamadas involuções e evoluções, ou elevação á potencias, e extracção de raizes.

Das quatro operações fundamentaes, duas desfazem o que as duas outras fazem: por meio da addição e da multiplicação compomos numeros; por meio da subtracção e da divisão decompomos numeros. A subtracção é o opposto da addição, a divisão da multiplicação: as duas operações, de que temos de tratar são tambem o opposto uma da outra, a evolução desfaz o que faz a involução, pela involução compomos numeros, pela evolução decompomos numeros.

(163) Todas as operações arithmeticas tem sempre por fim compor ou decompor numeros; ou em geral todas tem por objecto engendrar um numero por meio de outros.

A addição engendra uma quantidade por meio da reunião em um só aggregado de muitas outras quantidades. A subtração engendra um numero, ou uma quantidade tirando de um aggregado um outro aggregado: A multiplicação engendra uma quantidade repetindo uma quantidade um certo numero de vezes. A divisão engendra uma quantidade tirando de um aggregado um outro dado, um certo numero de vezes.

A involução engendra uma quantidade multiplicando um numero por si mesmo um certo numero de vezes. A evolução engendra uma quantidade procurando uma outra, que multiplicada por si mesma um certo numero de vezes produza uma quantidade dada.

A multiplicação é uma modificação da addição; ou é a addição de umas poucas de quantidades iguaes. $2\times3=6$, é o mesmo que $2+2+2=6$.

A multiplicação repetida dá origem a involução. Um numero pode ser engendrado pela multiplicação de muitos factores, $3\times2\times3\times5=90$; podemos engendrar assim um numero com uns poucos de factores todos iguaes, como $4\times4\times4\times4\times4=1024$. Esta especie de multiplicação é differente de todas as mais, e reconhecemos, que para construir 1024, basta tomar o numero 4, cinco vezes por factor, isto é, que pode ser determinado só pelos numeros 4 e 5; e é esta multiplicação, que chamamos involução, ou elevação á potencias, como já vimos em (24,5°); e em vez de escrevermos $4\times4\times4\times4\times4=1024$, escrevemos $4^5=1024$.

A evolução é uma operação opposta, e tem por objecto achar um numero, que multiplicado por si mesmo um certo numero de vezes produza um numero dado.

Na involução chamamos o numero factor, base da potencia, em 4^5, 4 é a base; na evolução a base toma o nome de raiz: de modo que no exemplo acima 4 é a base, quando partindo d'este numero construimos o numero 1024; e é a raiz quando partindo de 1024, tractamos de achar o numero 4.

As potencias mais empregadas na Arithmetica, e em todos os ramos das mathematicas, são a 2.ª e 3.ª, que são chamadas o quadrado, e o cubo de um numero. $4^2=16$ é o quadrado de 4; $4^3=64$, é o cubo de 4.

As mesmas denominações extendem-se as raizes: a raiz quadrada de 16 é 4; e a raiz cubica de 64, é 4. Estes termos tiram a sua origem da geometria.

§ 1.°

Da involucção ou das potencias.

(164) Multiplicando-se um numero por si mesmo 1, 2, 3, 4, 5, etc. vezes successivas obtemos as 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, etc. potencias deste numero. Para os calculos mathematicos é util saber as 9 primeiras potencias dos 9 primeiros numeros. Na seguinte taboada acham-se estas potencias.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531440	4782969	43046721	387420489

Nada ha pois de mais facil do que achar uma potencia qualquer de um numero inteiro dado; basta multiplical-o por si mesmo tantas vezes menos uma quantas são as unidades, que entram no seu expoente: por exemplo.

2X2, é a 1.ª potencia de 2.
2X2=4, é a 2.ª potencia de 2.
2X2X2=8 é a 3.ª potencia de 2.

Quando queremos formar uma potencia, podemos deixar de passar successivamente, por todas as potencias inferiores, por exemplo: a undecima potencia de 3, isto é, 3^{11}, pode-se achar sem ter o trabalho de passar successivamente de 3^2 para 3^3, para 3^4 etc.; como o objecto é achar um producto em que 3 entra como factor 11 vezes, podemos decompor 11 em $3+4+4$, e então $3^{11}=3^3 \times 3^4 \times 3^4$, e basta calcular, ou procurar na taboada acima a 3.ª e a 4.ª potencias de 3, e multiplicar 3^3 por 3^4, e depois este producto por 3^4, e assim temos $3^{11}=27\times81\times81$. A regra geral é pois, decompor a potencia proposta em outras, de que seja a somma, e multiplicar estes resultados uns pelos outros.

(165) Quando multiplicamos duas potencias uma pela outra, o producto é uma potencia do mesmo numero tendo por expoente a somma dos dous expoentes das potencias multiplicadas. O mesmo se applica á multiplicação de mais de duas potencias.

Por exemplo $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$; e de facto $8\times16=128$ e $128=2^7$; o que é evidente, pois $2^3=2\times2\times2$, e $2^4=2\times2\times2\times2$; logo $2^3\times2^4=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$, isto é, 2 factor 7 vezes ou 2^7. As potencias de uma potencia acham-se multiplicando o expoente da base pelo expoente da potencia à que se quer eleval-a, por exemplo a 2ª potencia de 2^3 é $2^{3\times2}=2^6$ e de facto $(2^3)^2=2^3\times2^3=2^{3+3}=2^6=8\times8=64$.

(166) Apresentaremos aqui algumas propriedades das potencias, que serão de utilidade nos calculos.

1.º O quadrado da somma de dous numeros é igual ao quadrado do 1º mais o quadrado do 2º, e mais duas vezes o producto do primeiro multiplicado pelo segundo. Por exemplo $(2+3)^2=2^2+3^2+2\times(3\times2)$, de facto $5^2=25=5+9+12=25$, o que é evidente fazendo a multiplicação pois; $(2+3)\times(2+3)=(2+3)\times2+(2+3)\times3$; isto é, o quadrado de $2+3$ é igual a $2+3$ tomado duas vezes e mais 3 vezes; ora $(2+3)\times2+(2+3)\times3=2\times2+3\times2+2\times3+3\times3=2\times2+2\times(2\times3)+3\times3=2^2+2\times(2\times3)+3^2$.

2.º O quadrado da differença de dous numeros é igual, ao quadrado do primeiro, mais o quadrado do segundo menos duas vezes o producto do primeiro multiplicado pelo segundo. Por exemp.: $(4-2)^2=4^2+2^2-2\times(4\times2)$, e de facto $2^2=4$, $16+4-16=4$, o que é evidente pois o quadrado de $4-2$ é o mesmo que $(4-2)\times(4-2)=(4-2)\times4-(4-2)\times2=4\times4-2\times4-2\times4+2\times2=4^2-2\times(2\times4+2^2.)$

3.º O cubo da somma de dous numeros é igual ao cubo do primeiro mais o cubo do segundo, mais tres vezes o quadrado do 1° multiplicado pelo 2°, mais tres vezes o quadrado do 2° multiplicado pelo 1°. Por exemplo $(3+5)^3=3^3+5^3+3\times(3^2\times5)+3\times(5^2\times3)$ de facto $8^3=512=27+125+135+225=512$ o que é evidente, pois $(3+5)^3$ é o mesmo que $(3+5)\times(3+5)\times(3+5)=(3\times5)^2\times(3+5)=(3^2+2\times(3\times5)+5^2)\times(3+5)=(3^2+2\times(3\times5)+5^2)\times3+(3^2+2\times(3\times5)+5^2)\times5$. $(3^3+2\times(3^2\times5)+5^2\times3+(3^2\times5)+2\times(3\times5^2)+5^3=3^3+3\times(3^2\times5)+3\times(3\times5^2)+5^3$.

4.° Tambem o cubo da differença de dous numeros é igual ao cubo do 1° numero, menos o cubo do 2°, mais 3 vezes o producto do 1° pelo quadrado do 2°, menos 3 vezes o producto do 2° pelo quadrado do 1° $(5-2)^3=5^3-2^3-3(5^2\times3)+3(2^2\times5)$ de facto $3^3=27=125-8-150+60-185-158=27$. Prova-se facilmente multiplicando $(5-3)^2$ por $(5-2)$ ou $(5^2-2(5\times2)+2^2)\times(5-2)$.

(167) As potencias das fracções formam-se multiplicando a fracção por si mesma tantas vezes menos uma quantas unidades tem o expoente da potencia a que se quer elevar a fracção. Por exemplo para elevar a fracção $\frac{1}{3}$ á 2ª potencia basta multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$ e temos $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. A 2ª potencia de $\frac{2}{5}$, é $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=\frac{2^2}{5^2}$. Logo para elevar uma fracção á uma potencia qualquer basta elevar o seu numerador, e o seu denominador á mesma potencia.

As fracções decimaes são elevadas ás potencias, como os numeros inteiros; por exemplo: a 2ª potencia de 0,25 é $0,25\times0,25=0,0625=(0,25)^2$, e de facto $\left(\frac{25}{100}\right)^2=\frac{25^2}{100^2}=\frac{625}{10000}$.

Assim para achar uma potencia qualquer de um numero decimal, eleva-se este numero como se fosse inteiro á essa potencia, e depois separam-se tantos lugares decimaes para a direita quantos tinha a decimal primitiva, multiplicado pelo expoente da potencia. Por exemplo a 2ª potencia de 0,5, é $5^2=25$; e como 0,5 tem um algarismo decimal a potencia deve ter $1\times2=2$, e assim o resultado é 0,25; $(0,5)^2=0,125$.

§ 2.º

Da Evolução ou extracção de raizes.

(168) A Evolução ou extracção de raizes é uma operação muito mais complicada que a involução; e esta operação é tanto mais laboriosa, quanto mais elevada é a potencia, cuja raiz se procura. Mostraremos primeiro como se acham as raizes quadradas, depois as cubicas, e finalmente as raizes de ordens superiores.

1.º EXTRACÇÃO DE RAIZES QUADRADAS.

(169) Os quadrados dos numeros de um só algarismo são todos menores que 100. Podemos destes quadrados voltar as suas raizes por meio da tabella seguinte:

Raizes	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Quadrados	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100

De todos os numeros de um e dous algarismos só nove são quadrados; os mais não tem uma raiz exacta; isto é, não podemos construil-os pela multiplicação de um numero inteiro por si mesmo. Quando uma quantidade se acha comprehendida entre dous numeros inteiros consecutivos, estes dous numeros inteiros são os valores inteiros aproximados desta quantidade. Assim a raiz quadrada de 38, por exemplo, acha-se entre 6 e 7; porque $6^2=36$, e $7^2=49$; e que 38 é maior 36 é menor que 49, o menor valor aproximado da raiz quadrada de 38, è pois 6. As raizes quadradas dos numeros inferiores á 100 acham-se por meio desta tabella, e pela maior parte não tem raiz quadrada exacta.

(170) Para achar as raizes quadradas de numeros superiores á 100, é preciso ver como podemos decompor a raiz em partes, e como estas entram no quadrado. Já sabemos, que o quadrado da somma de dous numeros, é igual aos quadrados dos dous numeros, mais o dobro do producto dos dous numeros (166, 1.º)

Podemos considerar um numero qualquer como composto de duas partes, de dezenas e de unidades; o numero 64 é a somma dos numeros $60+4$; e então o quadrado de 64 é composto do modo seguinte:

$$
\begin{array}{l}
64 \\
64 \\
\hline
16 = 4 \times 4 = 4^2 \text{ quadrado das uuidades.} \\
\left.\begin{array}{l} 240 = 60 \times 4 = \\ 240 = 60 \times 4 = \end{array}\right\} 2 \text{ vezes } 60 \times 4. \\
3600 = 60 \times 60 = 60^2 \text{ quadrado das dezenas.} \\
\hline
4096 = 64^2
\end{array}
$$

O numero $4096 = 64^2$ é composto de 36 centenas, quadrado de 6 dezenas; mais o dobro do producto de 6 dezenas multiplicadas por 4 unidades, ou 48 dezenas, e mais o quadrado de 4 unidades, ou 16.

Assim pois o quadrado de um numero composto de dezenas e unidades contem 3 partes; á saber: 1.º o quadrado das dezenas; 2.º o dobro do producto das dezenas multiplicadas pelas unidades; e 3.º o quadrado das unidades.

Agora podemos passar á mostrar como extrahimos as raizes quadradas de numeros superiores à 100: antes, porem, estabeleceremos os dous seguintes principios.

1.º O quadrado de um numero não pode ter senão o dobro dos algarismos da raiz, ou o dobro menos um.

Sejam os numeros 10000 e 99999, compostos de 5 algarismos cada um. O quadrado de 10000 que é o menor dos numeros representados por 5 algarismos tem 9 algarismos, isto é, o dobro dos algarismos da raiz menos um, o que é evidente, pois $10000 \times 10000 = 100000000$, isto é, a unidade seguida de 8 cifras.

O quadrado de 99999, que é o maior numero representado por 5 algarismos tem 10 algarismos; o quadrado de 99999 não pode ter menos de 10 algarismos, porque o quadrado de 90000, que é menor tem 10 algarismos; pois $90000 \times 90000 = 1800000000$. e não pode tambem o quadrado de 99999 ter mais de 10 algarismos; supponhamos, que tem 11 por exemplo; ja que o quadrado de 100000, que é maior que 99999 tem 11 algarismos, e que este quadrado é o menor representado por 11 algarismos pois é 10000000000, é evidente, que o quadrado de um numero menor (99999) seria neste caso maior, que o quadrado de um numero maior (100000), ou pelo menos igual ao quadrado de um maior, o que é absurdo; logo o qnadrado de 99999 não pode ter 11 algarismos, e tem 10; por consequencia os quadrados dos numeros entre 10000 e 99999, não podem ter senão o dobro dos algarismos de suas raizes, ou o dobro menos um. Este raciocinio applica-se á quaesquer outros numeros; logo o principio é geral.

2.º O numero dos algarismos da raiz quadrada de um numero é igual á metade do numero dos algarismos de seu quadrado, quando o numero dos algarismos de seu quadrado é par; é igual á metade mais um, quando o numero de algarismos do quadrado è impar.

Um numero de 10 algarismos tem 5 algarismos na sua raiz quadrada; de facto a raiz não pode ter mais, pois se tivesse 6, o seu quadrado teria ao menos 11 (1.º); e não pode ter menos, pois o quadrado do menor numero de 5 algarismos tem 9 algarismos (1.º;) logo um numero de 10 algarismos não pode ter por raiz quadrada senão um numero de 5 algarismos.

Um numero de 9 algarismos tem uma raiz quadrada de 5 algarismos; pois o quadrado do menor numero de 5 algarismos é o menor numero de 9 algarismos. Estes raciocinios applicam-se á outros quaesquer numeros, por tanto o principio é geral.

Sendo verdade o que acabamos de provar, é evidente, que dividindo um numero da direita para á esquerda, em secções de dous algarismos cada uma, o numero dos algarismos da raiz deste numero será igual ao numero de secções; a primeira secção á esquerda podendo constar de um só algarismo.

Na extracção das raizes quadradas dos numeros superiores á 100 temos differentes casos.

1.º caso. Quando o numero dado tem 3 ou 4 algarismos, a raiz neste caso tem dous algarismos (2º).

Seja proposto extrahir a raiz quadrada de 784. Este numero tendo 3 algarismos a sua raiz quadrada deve ter dous; e é composta de dezenas e unidades; ora o quadrado 784 é composto, 1º do quadrado das dezenas de sua raiz, mais 2º, do quadrado das unidades, mais 3º, do dobro do producto das dezenas multiplicadas pelas unidades.

O quadrado das dezenas acha-se tomando o quadrado do algarismo que representa as dezenas na raiz quadrada de 784, com duas cifras; portanto não consta senão de centenas, e não entra na somma das tres partes senão no algarismo de centenas; logo podemos separar os dous algarismos à direita do numero 784; e o quadrado das dezenas da raiz acha-se no numero 7 centenas, que pode alem disso conter outras centenas, provenientes das outras duas partes do quadrado. Tomando pois a raiz do quadrado contido em 7, isto é, de 4; esta raiz, que é 2, é o algarismo das dezenas da raiz quadrada de 784; por que 7 achando-se entre 2^2 e 3^2, o numero proposto 784 acha-se entre $20^2=400$, e $30^2=900$, e a raiz acha-se entre 20 e 30. Tirando-se de 700 o quadrado 400 de 20, ficam 300, proveniente das outras partes do quadrado. O numero 384 é pois composto do dobro do producto das dezenas da raiz multiplicadas pelas unidades, e mais do quadrado das unidades.

Acha-se o dobro do producto das dezenas multiplicadas pelas unidades, tomando o dobro do algarismo das dezenas da raiz multiplicado pelas unidades, e ajuntando uma cifra. Assim na somma das tres partes do quadrado, este producto constando só de dezenas e centenas, acha-se nos algarismos das dezenas e centenas, e não entra no das unidades, isto é. no exemplo presente, nos algarismos 38; e podemos separar de 384 o ultimo algarismo á direita; além deste producto, 380 pode conter as dezenas provenientes do quadrado das unidades da raiz, e o que provém de não ser, talvez, 784 um quadrado exacto, se conhecessemos estas dezenas tirando-as de 380, o resto seria igual ao dobro do producto das dezenas da raiz, multiplicadas pelas unidades; e dividindo este resto pelo dobro do algarismo das dezenas da raiz, que já achamos, e que é $2\times2=4$, o quociente seria as unidades da raiz; não podendo fazer esta separação, devemos proceder do modo seguinte; dividindo 38 por 4, o dividendo sendo maior do que deveria ser, o quociente pode ser muito grande, mas facil é verifica-lo; por exemplo; tomando o quociente 9 desta divisão pelo algarismo das unidades da raiz, e collocando 9 á direita de 4 temos o numero 49 que é o dobro das dezenas mais as unidades da raiz, e multiplicando este numero por 9 temos 49×9, isto é, o dobro do producto das dezenas multiplicadas pelas unidades, mais o quadrado das unidades. Ora $49\times9=441$ é um numero maior que 384, por tanto 9 é muito grande e devemos tomar para algarismo das unidades um numero menor; experimentemos o numero 8, e temos então $48\times8=384$ que é exactamente o numero procurado; assim achamos que 28 é a raiz quadrada de 784, e de facto $28^2=784$.

Eis como se escreve este calculo—

784	28	
4	49	48
384	9	8
384	441	384
000		

A raiz quadrada do maior numero quadrado contido nas centenas de um numero qualquer, determina sempre as dezenas da raiz quadrada deste numero.

Quando o numero dado tem 4 algarismos a operação é a mesma. por exemplo, seja proposto achar a raiz quadrada de 1024, temos

```
1024 | 32
 9   |--------
---- | 62
 124 |  2
 124 | ---
---- | 124
 000
```

2.º caso. Quando o numero proposto tem 5,6, ou mais algarismos. Seja proposto achar a raiz quadrada de 29506624,

```
29506624 |5432
25       |-----------------------
---      |104     1083     10862
 450     |  4        3         2
 416     |---     ----     -----
 ----    |416     3249     21724
  3466
  3249
  -----
  21724
  21724
  -----
  00000
```

O numero proposto sendo maior que 10000 sua raiz quadrada é maior que 100, isto é, deve ter mais de 2 algarismos. Entretanto podemos sempre considerar esta raiz. como composta de uma collecção de unidades simples, e de uma collecção de dezenas; pois um numero qualquer como 6345 pode ser considerado como composto de 6340+5, isto é, de 634 dezenas, mais 5 unidades. O numero proposto pois pode ser decomposto em 2950662 dezenas e 4 unidades. Este numero consta de 3 partes, que são o quadrado das dezenas, mais o dobro do producto das dezenas multiplicadas pelas unidades, mais o quadrado das unidades, de sua raiz quadrada. O quadrado das dezenas produz pelo menos centenas; logo os dous ultimos algarismos á direita não podem fazer parte delle, e por tanto o quadrado das dezenas da raiz acha-se na parte, que fica á esquerda destes dous algarismos.

Procurando a raiz quadrada do maior quadrado contido em 295066 considerado como representando unidades simples, acharemos o numero total das dezenas da raiz quadrada do numero proposto. Com effeito; a raiz do maior quadrado contido em 295066 tem um certo numero de centenas; e o quadrado desta raiz multiplicado por 100 dá um numero menor que 29506600, e por tanto menor que 29506624. E não pode ser a raiz quadrada do numero proposto composto de mais uma dezena, do que a raiz do maior quadrado contido em 295066; porque o quadrado deste numero seria então maior que 295066, e multiplicado por 100 maior que 29506600, de pelo menos uma centena, e logo assim maior que 29506624. Por tanto a raiz procurada consta da raiz do maior quadrado contido em 295066 considerado como representando centenas, e de um certo numero de unidades menor que 10. A questão pois fica reduzida á achar a raiz quadrada do numero 295066, considerado como representando unidades simples. Raciocinando sobre este numero, como sobre o numero proposto reconhecemos, que para achar as dezenas de sua raiz quadrada basta extrahir a raiz quadrada do maior numero quadrado contido na parte á esquerda de 66, isto é, em 2950; e para obter as dezenas desta nova raiz, é preciso ainda fazer abstracção dos dous ultimos algarismos 50, e extrahir a raiz quadrada do maior quadrado contido em 29.

Extrahindo a raiz quadrada de 25; escrevemos 5 á direita do numero proposto, e tiramos 25 de 29, o que dá por resto 4; á seu lado escrevemos os dous numeros seguintes 50, pois queremos agora achar o 2.º algarismo da raiz quadrada de 2950: separando o ultimo algarismo á direita de 450, dividimos 45 por 10, dobro de 5, e temos por quociente 4, que escrevemos à direita de 10, e multiplicando 104 por 4, achamos o producto 416, que tirado de 450 dá por resto 34.

Então 34 representa a collecção das dezenas da raiz quadradá de 295066. Para obtermos as unidades, abaixamos ao lado do resto 34 os numeros 66, o que dá o numero 3466, do qual separamos o ultimo algarismo á direita, e dividindo 346 por 108 dobro de 54, raiz já achada, temos por quociente 3, que escrevemos á direita de 108, e depois multiplicamos 1083 por 3, e tiramos o producto 3249 de 3466. Então 543 exprime o numero total das dezenas da raiz quadrada do numero dado 29506624. Para achar o algarismo das unidades, abaixamos ao lado do resto 217 os ultimos algarismos do numero, 24; depois fazemos abstração do ultimo algarismo á direita dividimos 2172 por 1086, dobro da raiz já achada 543, e temos por quociente 2, que escrevemos á direita de 1086, e depois multiplicamos 10862 por 2, e tirando o producto 21724 do resto 21724 temos por resultado zero. Por tanto 5432 é a raiz quadrada de 29506624, o que podemos verificar multiplicando 5432 por si mesmo.

[171] Agora podemos dar uma regra geral para a extracção das raizes quadradas.

1.° Principiando pela direita divide-se o numero em secções de dous algarismos cada uma; a ultima á esquerda pode ser de um só algarismo.

2.° Toma-se a raiz do maior quadrado contido na primeira secção á esquerda; e será o primeiro algarismo da raiz pedida; subtrahe-se o seu quadrado da 1ª secção, o que dá o primeiro resto.

3.° A' direita deste resto escreve-se a secção seguinte, o que dà o primeiro dividendo.

4.° Dō primeiro dividendo separa-se o ultimo algarismo á direita, e divide-se o numero restante pelo dobro da raiz já achada. O algarismo achado no quociente escreve-se na raiz e poderà ser considerado como o 2° algarismo da raiz, e tambem escreve-se á direita do numero, que servio de divisor, e chamaremos este o primeiro divisor.

5.° Multiplica-se o 1° divisor pelo 2° algarismo da raiz; se o producto for maior que o primeiro dividendo, emprega-se em lugar do 2° algarismo da raiz primeiro achado, um numero menor de uma unidade, e o mesmo para o ultimo algarismo do divisor, e assim procede-se atè que por esta multiplicação acha-se um numero menor que o dividendo: subtrahe-se este producto do 1° dividendo, o que dá o 2° resto.

6.° A' direita deste resto escreve-se a 3ª secção, o que dá o 2° dividendo.

7.° Do 2° dividendo separa-se o ultimo algarismo á direita, e divide-se o numero restante pelo dobro dos dous algarismos já achados na raiz. O algarismo do quociente escreve-se na raiz, e poderá ser considerado como o 3° algarismo da raiz, e tambem á direita do numero que servio de divisor, e chamase este numero 2° divisor.

8.° Procura-se um novo resto por meio de 5ª e repete-se o processo até que todas as secções sejam empregadas; se então não houver resto, a raiz quadrada pedida será achada; se houver um resto o numero proposto não tem raiz quadrada, e o numero achado como sua raiz quadrada, é a raiz quadrada do numero proposto diminuido do resto.

9.º Quando o dobro do algarismo, ou algarismos da raiz quadrada achada não é contido no dividendo sem o ultimo algarismo á direita, ou quando é contido uma vez, e que este numero dá um producto maior que o dividendo, escreve-se uma cifra na raiz, e abaixa-se a secção seguinte; se o mesmo tem ainda lugar, escreve-se outra cifra na raiz, e abaixa-se outra secção, e assim por diante.

Exemplos.

1.º Qual é a raiz quadrada de 5499025 ?

	numero	raiz
	5499025	2345
Divisores	4	
43	149	
3	129	
464	2090	
4	1856	
4685	23425	
5	23425	
	00000	

2.º Qual é a raiz quadrada de 12088868379025

Resposta= 3476905

Observação 1.ª—Em toda a operação da extracção da raiz quadrada cada resto é igual ao numero, de que se pede a raiz, diminuido do quadrado da parte da raiz já achada. Chegamos á estes restos tirando successivamente do numero proposto os quadrados das diversas partes da raiz já achadas; quando esta condição não é satisfeita, devemos tirar a conclusão de que houve erro na operação.

Observação 2.ª—Podemos muitas vezes pela simples inspecção do numero dado conhecer se é, ou não um quadro perfeito.

1.º Todo o numero par não divisivel por 4, não é quadrado perfeito. Os numeros pares podem sempre ser representados por um outro numero multiplicado por 2; o seu quadrado é o quadrado deste numero multiplicado por 4, logo todo numero par, que não é divisivel por 4, não é um quadrado perfeito. O numero par 14 por exemplo pode ser representado por 7×2, e 14^2 é igual a $(7\times2)^2=7^2\times2^2=49\times4$, numero divisivel por 4.

2.º Todo numero impar que tirando-lhe um, não for divisivel por 4, não é quadrado perfeito. Todo numero impar pode ser representado por um outro numero multiplicado por 2 mais 1; e o seu quadrado será igual a quatro vezes este numero quadrado, mais quatro vezes este numero, mais 1, quantidade, que diminuida de 1, é divisivel por 4, logo etc. Por exemplo o numero impar 15 pode ser representado por $(7\times2)+1$; o quadrado de 15, ou $15^2=(7\times2+1)^2=(7\times2)^2+2\times(7\times2)\times1+1^2=49\times4+7\times4+1=(49+7)\times4+1$, logo este numero diminuido de 1 è divisivel por 4.

3.º Todo o numero, que contem um factor primo e não é divisivel pelo quadrado deste factor, não pode ser um quadrado perfeito. Pois a raiz quadrada deste numero, se é inteira, não pode ser senão este numero primo multiplicado pelos outros, e seu quadrado deve ser o quadrado deste multiplicado pelos dos outros, e é divisivel pelo quadrado do numero primeiro. Um numero divisivel por 3 e por 5, deve ser tambem divisivel por 9 e por 25 para ser um quadrado perfeito.

4.º Todo numero terminado por 2, 3, 7, ou 8 não é quadrado perfeito. Com effeito, conforme a composição do quadrado de um numero composto de mais de um algarismo, as unidades simples do quadrado, não são senão os quadrados das unidades simples da raiz. Ora formando-se os quadrados dos nove primeiros numeros vê-se, que nenhum delles é terminado pelos algarismos 2, 3, 7, e 8.

5.º Todo numero terminado por 5 não pode ser quadrado perfeito, se o algarismo de suas dezenas não é 2. Esta propriedade se deduz tambem da composição do quadrado de um numero de dous ou mais algarismos. Os dous ultimos algarismos do numero proposto não podem, neste caso, provir senão do quadrado das unidades da raiz, pois que o algarismo das unidades é 5; o dobro do producto das dezenas pelos algarismos das unidades 5, é necessariamente um certo numero de centenas. Ora o quadrado de 5 é 25; logo o numero deve ser terminado por 25.

6.º Todo o numero terminado por cifras em numero impar não é quadrado perfeito. Esta propriedade é evidente; se a raiz for exacta não pode ser senão um numero terminado por uma ou mais cifras; ora o quadrado desta raiz deverá ser terminado por duas vezes o numero de cifras, que tem a raiz; logo é sempre terminado por um numero par de cifras.

Observação 3.ª Quando um numero não é divisivel por nenhum dos numeros primos, que não excedem sua raiz quadrada, este numero é primo. Pois de outra sorte o numero teria um divisor maior que sua raiz quadrada; o quociente correspondente seria neste caso menor, que esta raiz, e dividiria o numero proposto, o que é contra a hypothese. Esta propriedade pode servir para simplificar o calculo para achar os numeros primos (91). 1.º Seja proposto formar uma taboada de numeros primos; já mostramos (91), que estes numeros não se acham senão entre os numeros:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, 101, etc.

Depois de ter reconhecido, que os dous menores numeros primos são 2 e 3, observamos, que para obter os numeros primos comprehendidos entre 3 e 9, que é o quadrado de 3, basta tomar os numeros 5 e 7, que não são divisiveis por 2 ou 3.

Conhecendo os numeros primos, 2, 3, 5, 7, comprehendidos entre 1 e 9, para obter os numeros primos entre 7 e 81, quadrado de 9, basta tomar aquelles dos numeros 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 46, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, que não são divisiveis por nenhum dos numeros 2, 3, 5, 7: e assim achamos, que os numeros primos entre 7 e 81 são 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 71, 73, 79. Do mesmo modo determinamos todos os numeros primos entre 79 e 6561, quadrado de 81; e assim por diante.

2.º Para decompor um numero em seus factores primos faz-se uso do methodo (94) com esta differença, que não se toma por divisores, senão os numeros primos, que não excedem a raiz quadrada do numero proposto.

(172) Relativamente á raiz quadrada, os numeros dividem-se em duas cathegorias; os que são quadrados perfeitos, e os que não o são. Os primeiros tem sempre uma raiz inteira, os segundos não tem raiz inteira. Quando porém um numero não é um quadrado perfeito, a sua raiz, não só não é um numero inteiro, como tambem não pode ser representada exactamente por um numero, seja elle, de que natureza for, isto é, não pode ser representada nem por um nu-

mero inteiro, nem por um fraccionario. Não é pois possivel designar exactamente um numero, que seja a raiz quadrada dos nnmeros, que não são os quadrados dos numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6 7, etc. etc.

Por exemplo o numero 7 não tem uma raiz quadrada exacta, e não existe um numero, que represente exactamente a raiz quadrada de 7; com effeito a raiz quadrada de 7 é maior que 2, pois $2^2=4$; e menor que 3, pois $3^2=9$; se fosse possivel determinar esta raiz, ella deveria ser igual á 2 mais uma fracção. Reduzindo o inteiro 2 á fracção, e ajuntando-lhe a parte fraccionaria, formamos um numero fraccionario, e um numero fraccionario reduzido á sua mais simples expressão tem por numerador e por denominador numeros primos entre si; elevando esta fracção ao quadrado, temos por resultado uma fracção, tendo por numerador o quadrado do numerador da fracção primeira, e por denominador o quadrado do denominador da primeira fracção; e estes dous numeros são tambem primos entre si; por tanto a nova fracção é irreduzivel, e um numero fraccionario, que não pode ser igual á um numero inteiro. Logo a raiz quadrada de um numero inteiro, que não é o quadrado perfeito de um outro numero inteiro, não pode ser expressada por nenhum numero exactamente. Assim pois, quando a raiz quadrada de um numero inteiro acha-se comprehendida entre dous numeros inteiros successivos, esta raiz, ainda que exista, não pode ser expressada exactamente por nenhum numero. Temos aqui um exemplo, do que chamamos numeros incommensuraveis, isto é, de uma quantidade, que não pode ser representada exactamente por numeros. Estes numeros incommensuraveis, isto é, que não podem ser medidos, nem pela unidade, nem por partes da unidade, chamam-se tambem irracionaes, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$; porque estes numeros não podem ser representados exactamente por nenhum numero, inteiro fraccionario ou decimal; e daqui resulta, que se concebermos a unidade, dividida em tantas partes iguaes, quantas se queira, uma destas partes não será jamais assás pequean para ser contida um numero exacto de vezes, na raiz quadrada de 5, de 11 etc., e na unidade.

Se porém não podemos obter exactamente a raiz quadrada dos numeros, que não são quadrados perfeitos, podemos sempre represental-a aproximadamente.

Para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro qualquer, procede-se como se o numero fosse um quadrado perfeito.

Quando o ultimo resto, que corresponde ao algarismo das unidades da raiz não é zero, a raiz procurada é incommensuravel; e o numero obtido, como raiz quadrada exprime a raiz do maior numero quadrado contido no numero dado.

Se procurarmos extrahir a raiz quadrada do numero 422110, acharemos o numero 649 na raiz, e o resto 909, a raiz quadrada d'este numero é incommensuravel; o resto 909 é igual á $422110-(649)^2$; e 649 exprime a raiz quadrada do maior quadrado perfeito contido em 422110, de modo que 422110 acha-se entre $(649)^2$ e $(650)^2$. Por este modo achamos a raiz quadrada do numero dado aproximadamente á menos de uma unidade; podemos achal-a ainda mais aproximadamente, á menos de um decimo, de um centesimo etc., como mostraremos logo.

Se o resto do numero, do qual se extrahio a raiz quadrada, é igual ao dobro da raiz, mais um, a raiz achada é muito pequena.

Seja por exemplo o numero 5476; extrahindo a sua raiz quadrada, supponhamos, que achamos 73, e que o resto é $2\times73+1$; a raiz 73 é muito pequena; de facto $74^2=(73+1)^2=73\times73+2\times73+1$; e é evidente que o quadrado de 74 será igual á 5476, e que a raiz achada 73 é muito pequena de uma unidade. A differença entre dous quadrados perfeitos consecutivos, é tanto maior quanto as raizes destes quadrados são maiores, e a expressão desta differença deve ser conhecida. Sejam, por ex., dous numeros inteiros consecutivos, 5 e $5+1$ ou 6. Teremos elevando-os aos quadrados $5^2=25$, e $(5+1)^2=5^2+2\times5\times1$; e a differença entre $(5+1)^2$ e 5^2, é $(25+10+1)-25=10+1$. Logo a differença entre os quadrados de dous numeros consecutivos é igual ao dobro do menor destes dous numeros, augmentado da unidade. Assim a differença entre os quadrados de 348 e 347 é igual á $2\times347+1$, ou 695; ou em outros termos, os quadrados de 347 e de 348 comprehendem 649 numeros inteiros, que não são quadrados perfeitos.

Antes de passar á mostrar como podemos achar a raiz quadrada de um numero qualquer aproximadamente, é preciso mostrarmos como podemos extrahir as raizes quadradas das fracções e dos numeros decimais.

(173) Já mostramos que os quadrados dos numeros fraccionarios acham-se elevando os numeradores e os deno-

minadores da fracção á 2.ª potencia; que o quadrado de $\frac{3}{4}$ por exemplo, era $\frac{9}{16}$, ou que $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}$. Segue-se, que $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$. Podemos reduzir esta operação á uma só extracção de raiz; isto se faz multiplicando os dous termos da fracção dada pelo denominador; por este artificio a fracção conserva o seu valor primitivo, e o denominador torna-se um quadrado perfeito, e assim a operação reduz-se á extracção da raiz quadrada do novo numerador. Por exemplo seja proposto extrahir a raiz quadrada de $\frac{7}{8}$ multiplicando os dous termos desta fração por 8 termos $\frac{7}{8}=\frac{7\times8}{8\times8}=\frac{56}{64}$; ora a raiz quadrada de $\frac{56}{64}=\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{56}}{8}$: assim só temos que extrahir a raiz quadrada de 56. Poderiamos pelo contraio fazer o numerador um quadrado perfeito; multiplicando os dous termos pelo numerador; mas então a raiz quadrada do denominador sendo quase sempre um numero incommensuravel, e tendo de dividir o numerador por este numero incommensuravel, teriamos dous inconvenientes; 1.º, de reduzir esta operação á calculos complicados; 2.º, de não mostrar com que grao de exactidão se obtem a raiz da fracção dada. Para achar a raiz quadrada dos numeros complexos, que constam de um inteiro, e de uma fracção, reduzimos o numero à uma fracção impropria, e procedemos como para as fracções proprias. Seja proposto achar a raiz quadrada de $2\frac{1}{5}$; temos $\sqrt{2\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{11}{5}}=\sqrt{\frac{11\times5}{5^2}}=\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{55}}{5}=\frac{7}{5}$, á menos de $\frac{1}{5}$.

Exemplos.

1.º Qual é a raiz quadrada de $\frac{25}{36}$? Resposta $\frac{5}{6}$.

2.º Qual é a raiz quadrada de $\frac{64}{81}$? Resposta $\frac{8}{9}$.

3.º Qual é a raiz quadrada de $11\frac{11}{16}$? Resposta $\frac{23}{16}$ á menos de $\frac{1}{16}$.

(174) As raizes quadradas dos numeros decimaes se obtem

pelo modo seguinte. Já mostramos, que para formar o quadrado de um numero decimal, formamos o quadrado deste numero, como se fosse um numero inteiro, e depois separamos á direita duas vezes tantos algarismos quantos algarismos decimaes tem o numero dado (166).

Assim pois o quadrado de um numero decimal tem sempre um numero par de algarismos decimaes. Para achar a raiz quadrada de um numero decimal devemos extrahir a raiz quadrada deste numero considerado como inteiro; e depois separar tantos algarismos á direita da raiz quadrada, quantas unidades tem a metade do numero de algarismos decimaes do quadrado dado; esta regra se deduz da precedente. Seja proposto extrahir a raiz quadrada de 42,1201; a raiz quadrada de 421201 é 649, a raiz quadrada procurada é pois 6,49, separando no resultado 649 duas decimaes, porque o numero dado tem quatro. Esta regra demonstra-se facilmente pois

$\sqrt{42,1201}=\sqrt{\frac{421201}{10000}}=\frac{\sqrt{421201}}{\sqrt{10000}}=\frac{649}{100}=6,49.$

Qual é a raiz quadrada de 0,004212012, a raiz quadrada de 421201 é 649, a raiz procurada pois é 0,0649, separando no resultado 4 algarismos decimaes, porque o numero dado tem 8; $\sqrt{0,00421201}=\sqrt{\frac{421201}{100000000}}=\frac{\sqrt{421201}}{\sqrt{100000000}}=\frac{649}{10000}=0,0649$

Qual é a raiz quadrada de 0,15625. Resposta 0,125.

(175) Agora podemos mostrar, como se extrahem as raizes quadradas aproximadamente, quando os numeros dados não são quadrados perfeitos. Para extrahir a raiz quadrada de um numero qualquer, á uma fracção dada de differença, quer o numero dado seja inteiro ou fraccionario devemos proceder do modo seguinte: O que queremos é achar um numero, que diffira da raiz quadrada de um numero dado, de uma quantidade menor, que uma fracção dada. Seja o numero dado 59, e que queremos achar a raiz quadrada deste numero à menos de $\frac{1}{12}$. Podemos pôr 59 debaixo da forma seguinte $\frac{59\times 12^2}{12^2}$, quantidade igual á 59, porque multiplicamos e dividimos 59 pelo mesmo numero 12^2; assim effectuando as operações indicadas, temos $\frac{59\times 144}{144}=\frac{8496}{144}$, e extrahindo a raiz quadrada desta fracção temos $\frac{92}{12}$.

Ora a raiz quadrada de 8496 a uma unidade de differença é 92; segue-se pois que $\frac{8496}{144} = 59$; acha-se entre $\frac{(92)^2}{(12)^2}$ e $\frac{(93)^2}{(12)^2}$, isto é, que a raiz quadrada de 59 differe de $\frac{92}{12}$ á menos, e de $\frac{93}{12}$ á mais, de uma fracção menor que $\frac{1}{12}$; de facto $\frac{(92)^2}{(12)^2} = \frac{8464}{144}$; $\frac{(93)^2}{(12)^2} = \frac{8649}{144}$; numeros, que comprehendem entre si o numero $\frac{8496}{144} = 59$. Assim pois a regra para effectuar a aproximação proposta é a seguinte. Multiplica-se o numero dado pelo quadrado do denominador da fracção dada, que determina o gráo de aproximação, que se quer attingir; e extrahe-se a raiz quadrada do producto assim achado, e divide-se esta raiz aproximada pelo denominador, da fracção dada.

Qual é a raiz quadrada de $31\frac{4}{7}$ a mesma de $\frac{1}{23}$. O numero $31\frac{4}{7} = \frac{221}{7}$; o producto de $\frac{221}{7}$ multiplicado por $(23)^2$ é $\frac{116909}{7}$; effectuando a divisão, temos $16701\frac{2}{7}$, numero cuja raiz quadrada é 129, logo a raiz quadrada do numero dado é $\frac{129}{23}$ ou $5\frac{14}{23}$ exacta á menos de $\frac{1}{23}$.

Neste exemplo extrahimos a ráiz quadrada de $16701\frac{2}{7}$, fazendo abstracção de $\frac{2}{7}$, porque é evidente que se 16701 acha-se entre o quadrado de 129 e o de 130, o mesmo acontece á $16701\frac{2}{7}$.

A aproximação por decimaes funda-se nos mesmos principios, e é muito mais util, e a que se emprega sempre.

1.° Para obter a raiz quadrada de um numero inteiro, com differença de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc., é preciso multiplicar este numero por 10^2, 100^2, 1000^2 etc., isto é, pôr a direita deste numero duas, quatro, seis cifras, e depois extrahir a raiz quadrada deste producto á uma unidade de differença, e dividir a raiz por 10, 100, 1000 etc.

Em outras palavras; escreve-se á direita do numero dado duas vezes tantas cifras quantos algarismos decimaes se quer ter na raiz; extrahe-se a raiz quadrada deste novo numero, e separa-se á direita do resultado o numero de decimaes correspondente. Seja por exemplo proposto achar a raiz quadrada de 7 a $\frac{1}{1000}$ de differença. Escrevemos á direita de 7 seis cifras, porque queremos ter tres decimaes na raiz, e temos o numero 7000000; a raiz quadrada deste numero é 2645; assim separando á sua direita 3 algarismos temos 2,645, que é a raiz quadrada de 7 á menos de $\frac{1}{1000}$, ou 0,001, o que significa, que a raiz quadrada de 7 acha-se entre 2,645 e 2,646.

A fracção decimal, que achamos na raiz quadrada de um numero inteiro, que não é quadrado perfeito, apesar de ser composta de um numero illimitado de algarismos não pode ser uma fracção periodica. Se podesse ser seguiria-se, que, como toda a fracção periodica è equivalente a uma fracção ordinaria limitada, um numero incommensuravel pode ser igual à um commensuravel, o que é absurdo.

2.° Quando o numero, de que queremos extrahir a raiz quadrada em decimaes, é uma fracção temos dous casos; 1.°, ou o numero dado é já uma fracção decimal; ou 2.°, é uma fracção qualquer. Seja proposto achar a raiz quadrada de uma fracção decimal, aproximada a menos de uma fracção decimal dada. Seja o numero dado 3,425, e o limite da aproximação $\frac{1}{1000}$, ou 0,001. Para isto devemos multiplicar este numero dado por 1000^2, ou por 1000000, o que é evidentemente o mesmo, que escrever 5 cifras é direita do numero, e supprimir a virgula; assim obtemos o numero 3425000; a raiz aproximada deste numero è 1849, portanto 1849 é a raiz procurada exacta á menos de 0,001. Para extrahir a raiz quadrada de uma fracção decimal, 1°, torna-se o numero dos algarismos decimaes do numero dado, o dobro do numero dos algarismos decimaes, que se quer conservsar na raiz, o que se faz escrevendo á direita um numero conveniente de cifras; 2°, faz-se abstracção da virgula no novo numero, e extrahe-se a sua raiz quadrada aproximada de uma unidade; 3°, separa-se á direita desta raiz o numero de algarismos propostos.

Para avaliar a raiz quadrada de um numero fraccionario qualquer; reduz-se primeiro á fracção decimal equivalente, conserva-se na decimal duas vezes tantos algarismos decimaes, quantos são os que se quer conservar na raiz, e faz-se a operação, como ácima.

Seja por exemplo proposto achar a raiz quadrada de $\frac{310}{13}$ á menos de $\frac{1}{100}$ ou 0,01. Primeiro reduzimos $\frac{310}{13}$ á decimaes, e temos $\frac{310}{13} = 23,8461$ com quatro decimaes, por que queremos só duas na raiz, depois procederemos conforme a regra ácima.

$$\sqrt{\frac{310}{13}} = \sqrt{23,8461} = 4,88 \text{ á menos de } 0,01.$$

Fica pois provado que para numeros inteiros pode-se sempre achar a expressão da sua raiz quadrada exactamente, se o numero é um quadrado perfeito, aproximativamente, isto é, um numero de um valor tão aproximado quanto se queira da raiz, se o numero é um quadrado imperfeito. O mesmo podemos dizer de uma fracção qualquer.

Assim pois todo numero pode ser considerado como o quadrado de um outro numero commensuravel, ou incommensuravel.

Exemplos aproximados á 5 decimaes.

1.° Qual a raiz quadrada de 5?

Resposta 2,24606

2.° Qual é a raiz quadrada de 13?

Resposta 3,60555

3.° Qual é a raiz quadrada de 7,64?

Resposta 2,76586

4.° Qual a raiz quadrada de 0,056?

Resposta 0,23664

5.° Qual a raiz quadrada de $\frac{7}{4}$?

Resposta 1,32287

(176) Podemos aproximar da raiz quadrada de um numero sem limites, isto é, podemos tomar na raiz um numero indifinito de decimaes. Quando queremos levar a extracção da raiz á um grande numero de decimaes podemos abreviar o methodo geral de extracção das raizes quadradas. Seja por exemplo proposto achar a raiz quadrada de 12 com o maior gráo possivel de aproximação, isto é, conservando na raiz um numero consideravel de algarismos decimaes; 22, por exemplo. Podemos neste caso seguir a seguinte regra.

Depois de se ter achado a metade dos algarismos decimaes, que se quer conservar na raiz, se este numero é par, ou a metade mais um se é impar, o resto calcula-se simplesmente dividindo o ultimo dividendo pelo ultimo divisor, como na divisão abreviada das decimaes (149).

E' preciso notar, que neste processo (como em todos pelos quaes obtemos decimaes por aproximação), o ultimo algarismo nunca é muito exacto, e que por tanto é bom levar a operação mais adiante de um ou dous algarismos decimaes do que se precisa.

	12		3.46410161513
	9		
64)	300		
	256		
686)	4400		
	4116		
6924)	28400		
	27696		
69281)	79400		
	69281		
6928201)	11190000		
	6928201		
69282026)	4261799	00	
	4156921	56	
69280321)	104877	4400	
	69282	0321	
6928203225)	35595	407900	
	34641	016125	
69282032301)	954	39177500	
	692	82032301	
692820323023)	261	5714519900	
	207	8460969069	
	53	7253550831	

Se de qualquer resto cortarmos as cifras e todos os algarismos situados por baixo d'ellas ou para sua direita por uma linha vertical, acharemos na esquerda d'esta linha uma divisão contrahida como a que empregamos para abreviar a divisão de decimaes (149.) Por exemplo; depois de termos achado a raiz de 12 até 3.464101 temos 4261799, e o divisor 6928202. Os algarismos à esquerda da linha vertical nada mais são do que uma divisão abreviada d'este resto pelo divisor; com esta differença porém, que devemos principiar por tirar um algarismo á direita do divisor, em lugar de empregal-o todo inteiro. Por este modo podemos dobrar o numero de decimaes, e achar os algarismos 61537, o ultimo 7 obtemos levando a divisão abreviada um passo a diante com o resto 53. Temos pois esta regra; metade das decimaes achadas, em lugar de ajuntar duas cifras ao resto tira-se um algarismo á direita do numero, que deveria ser o divisor se o processo tivesse de ser continuado, e divide-se o resto pelo divisor contrahido como em (149).

Para dar um exemplo seja proposto dobrar o numero de algarismos decimaes da raiz quadrada de 12 achada acima, que é 3,46410161513.

O resto é 537253550831, o divisor é 692820323023 o processo é o seguinte:

```
692820323026)  537253550831  |7754587549
               484974226118
               ------------
                52279324715
                48497422611
                -----------
                 3781902102
                 3464101615
                 ----------
                  317800487
                  277128129
                  ---------
                   40672358
                   34641016
                   --------
                    6031342
                    5542562
                    -------
                     488780
                     484974
                     ------
                       3806
                       3464
                       ----
                        342
                        277
                        ---
                         65
                         62
                         --
                          3
```

Portanto a raiz quadrada de 12 com 22 algarismos decimaes é 34641016151377545870549 que é exacta até o ultimo algarismo um pouco grande de mais; porém pondo 8 em lugar de 9 na direita fariamos a raiz muito pequena.

2.

Extracção das raizes cubicas.

(177) A extracção da raiz cubica é uma operação ainda mais complicada e trabalhosa, que a da raiz quadrada.

Os cubos dos nove primeiros numeros devem ser decorados, e são.

Raizes	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubos	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

Todos estes cubos de numeros menores que 10 ou de um só algarismo são menores que $1000=10^3$. Para achar a raiz cubica de um numero menor que 1000 devemos fazer uzo desta tabella, e vemos que muitos numeros não tem raiz cubica, inteira ou exacta, pois de 1000 numeros só nove são cubos perfeitos.

(178) Para podermos extrahir as raizes cubicas dos numeros superiores á 1000, que devem conter mais de um algarismo, devemos-nos lembrar da expressão do cubo da somma de dous numeros, e como as partes da raiz entram no seu cubo (165, 3.º)

Podemos sempre considerar um numero qualquer como composto de duas partes; e se o numero é de dous algarismos, composto de dezenas e de unidades; e então o cubo de uma somma de dous numeros consta 1.º do cubo da 1.ª parte; 2.º mais o triplo do quadrado do 1.º numero multiplicado pelo 2º, 3º mais o triplo do quadrado do 2º multiplicado pelo 1º; 4º mais o cubo do 2.º numero. Um numero composto de dezenas e unidades contém no seu cubo quatro partes, a saber: 1.º O cubo das dezenas; 2.º o triplo do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades; 3.º o triplo do quadrado das unidades multiplicado pelas dezenas; 4.º o cubo das unidades.

Assim o cubo do numero 25, que pode ser considerado como igual á $20+5$, isto é, 2 dezenas, mais 5 unidades é composto do modo seguinte.

1.° $20^3 = 8000$

2.° $3 \times (20^2 \times 5 = 6000$

3.° $3 \times (5^2 \times 20) = 1500$

4° $\frac{5^3 = 125}{25^3 = 15625}$

Assim pois para achar o cubo de um numero qualquer como 259 podemos considerar este numero como composto de 25 dezenas, e de 9 unidades; e o cubo do numero inteiro é composto de $(250)^3$, mais 5 vezes $250^2 \times 9$, mais 3 vezes $9^2 \times 250$, mais 9^3.

1.° O cubo de um numero não póde ter senão o triplo dos algarismos de sua raiz, o triplo menos um, ou emfim o triplo menos dous. Sejam dados os numeros de 5 algarismos 10000 e 99999; o cubo de 10000, que é o menor numero de cinco algarismos tem 13 algarismos, isto é, o triplo menos 2 dos algarismos da raiz; porque o quadrado de 10000 tendo 9 algarismos é evidente, que multiplicado por 10000 para formar o cubo deve dar um producto de 13 algarismos. O cubo de 99999, que é o maior numero de 5 algarismos tem 15 algarismos, e não pode ter mais: com effeito o cubo de 99999 não pode ter menos de 15 algarismos, pois o cubo de 90000 que é menor tem 15; pois o quadrado tendo 10, o cubo tem 15; o cubo de 99999 não poda ter mais de 15; supponhamos que tem 16 por exemplo; então como o cubo de 100000, que é um numero maior que 99999 não tem senão 16; o que é evidente, pois o seu quadrado tendo 11, este multiplicado por 100000 deve dar um producto de 16 algarismos; e que este cubo é o menor numero representado por 16 algarismos, para que o cubo de 99999 tenha 16 algarismos seria preciso, que o cubo de um numero menor fosse maior que o de um maior, ou pelo menos igual, o que ê absurdo. Logo o cubo dos numeros entre 10000 e 99999 não podem ter senão 13, 14 ou 15 algarismos, isto é, o triplo dos algarismos da raiz menos 2 ou menos 1, ou o triplo exactamente.

2.° O numero de algarismos da raiz cubica de um numero qualquer é igual ao terço dos algarismos deste numero, quando o numero de seus algarismos é divisivel por 3; e ao terço dos algarismos do numero augmentado de um ou de dous, quando o numero destes algarismos não é divisivel por 3. Seja dado um numero de 15 algarismos; a sua raiz cubica terá 5 algarismos: de facto ella não pode ter mais, pois se tivesse 6, o cubo desta raiz deveria ter pelo menos 16 algarismos (1°) e não pode ter menos, pois o cubo do mais pequeno numero representado por 5 algarismos tem 13 algarismos.

Um numero de 13 algarismos tem 5 na raiz cubica, pois o cubo do mais pequeno numero de 5 algarismos tem 13.

Como o numero de algarismos da raiz cubica é igual ao terço do numero de algarismos do seu cubo, ou á este terço augmentado de um, ou de dous, é evidente, que dividindo um numero dado da direita para a esquerda em secções de tres algarismos cada uma, o numero dos algarismos da raiz cubica será igual ao numero de secções, a primeira á esquerda podendo constar de um ou dous algarismos só.

Os cubos dos numecos 10, 100, 1000 etc. são formados, pela unidade seguida de tres vezes tantas cifras quantas contem estes numeros; assim o cubo de um numero de dous algarismos, que se acha entre 10 e 100 tem o seu valor entre 1000 e 1000000, isto é, tem de 4, 5, ou 6 algarismos; portanto todo numero composto de 4, 5, ou 6 algarismos tem uma raiz cubica de dous algarismos. As raizes cubicas dos numeros inferiores á 1000 não tem senão um algarismo: a taboada acima as faz conhecer.

A extracção da raiz cubica de um numero qualquer apresenta dous casos.

1° caso. Quando o numero proposto tem 4, 5, ou 6 algarismos, então a raiz cubica, tem 2 (2°). Seja proposto extrahir a raiz cubica de 262144: este numero tem 6 algarismos, logo a sua raiz deve ter 2; e de facto podemos dividil-o em duas secções de 3 algarismos.

O cubo das dezenas da raiz, acha-se, elevando o numero destas dezenas ao cubo e ajuntando-se-lhe á direita 3 cifras: portanto separando-se por uma virgula os 3 algarismos 144 á direita do numero dado, 262 contem o cubo das dezenas consideradas, como unidades, e alem disso os milhares provenientes das outras partes.

O maior cubo contido em 262 é o de 6, o numero 262 acha-se entre 6^3 e 7^3 ; 6 pois será o algarismo das dezenas da raiz. Com effeito 262 sendo maior que $6^3 = 216$, os 262 milhares de 262144 exprimem um numero maior que 216000; ainda maior é 262144 que 216000, e 262 é menor que $7^3 = 343$; e o excesso de 7^3 sobre 262 não é menor que uma unidade; por conseguinte 262000 é menor que 343000, o excesso não pode ser menor que um mil; ajuntando-se pois á 262000 o numero 144, que é menos que 1000 a somma $262144 <$

que 343000: o numero proposto pois acha-se entre 60^3 e 70^3; a raiz cubica de 262144 acha-se entre 6 e 7 dezenas, e portanto composta de 6 dezenas, e de um certo numero de unidades menor que 10. Para achar o algarismo das unidades da raiz devemos tirar de 262144 o cubo de 60, que é igual á 216000 e fica o resto 46144. Este resto representa as outras partes do cubo, isto é, 3 vezes o quadrado das dezenas multiplicádo pelas unidades; mais 3 vezes as dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades; mais o cubo das unidades. Ora, o producto de 3 vezes o quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades forma-se multiplicando pelas unidades o triplo do quadrado dos dezenas; isto é, de 60, que é $3\times3600=10800$; este producto sendo composto de centenas, podemos separar os dous ultimos algarismos á direita de 46144, e não se acha senão em 46100, que contem além disso as dezenas provenientes das duas outras partes do cubo; dividindo pois 461000 por 10800, ou 461 por 108, o quociente representarà as unidades, ou um numero maior; este quociente è 4. Para verificar este numero, devemos formar a seguinte somma; 108 o que é o triplo do quadrado das dezenas, mais o triplo das unidades, multiplicadas pelas dezenas $3\times4\times60=720$; e o quadrado das unidades $4^2=16$ é a somma destes 3 numeros multipltcada por 4 dá o numero 46144; e mostra no caso de ser maior que o resto que o algarismo das unidades é muito grande, e experimenta-se um menor até que esta quantidade seja igual ou menor que o resto; no primeiro caso, que é o do nosso exemplo, tem o numero uma raiz cubica exacta; no segundo não tem, e o numero não é um cubo perfeito. Tambem se pode verificar o numero das unidades, ajuntando-o ao das dezenas, e elevando este numero ao cubo, como por exemplo, no caso presente; elevando 64 ao cubo, e ver-se 64 é maior, igual, ou menor que o numero dado. A raiz do maior cubo contido nos milhares de um numero qualquer determina sempre as dezenas da raiz cubica. Podemos escrever a operação acima do modo seguinte.

		64 raiz cubica
Numero dado	262144	
$6^3=$	216	$43200=3\times60^2)\times4$
Resto =	46144	$2880=3\times60\times4)\times4$
Divisor $6^2\times3=108$	46144	$64=4^2\times4$
	00000	46144

2º caso. Quando o numero dado contem mais de 6 algarismos, e a raiz mais de dous. Sejam quantos forem os algarismos de um numero, a raiz deste numero tem necessariamente mais de um algarismo, e pode-se considerar, como composta de dezenas e unidades, somente, o numero das dezenas, pode ter muitos algarismos. Seja por exemplo proposto extrahir a raiz cubica do numero 213359449. O cubo das dezenas da raiz não pode dar senão pelo menos milhares, logo este cubo não pode se achar senão na parte á esquerda dos tres ultimos algarismos. Se extrahirmos a raiz do maior numero cubico contido em 273350 considerado como representando unidades, acharemos o numero das dezenas da raiz procurada. Com effeito seja 64 a raiz cubica do menor cubo contido em 273359; segue-se, que a raiz do numero dado tem pelo menos 64 dezenas, pois que $64^3 \times 1000$ pode ser tirado de 273359000, e á forciori de 273359449, e a raiz não pode ter $64+1$ dezenas, porque $(64+1)^3$ é maior que 273359, e $(64+1)^1 \times 1000$ maior que 273359000, de pelo menos 1000, e por tanto maior que 273359449; logo a raiz procurada consta de 64 dezenas, e mais um certo numero de unidades menor que 10.

A questão pois fica redusida a extrahir a raiz cubica de 273359; mas este novo numero tendo mais de tres algarismos a sua raiz tem mais de um, isto é, contem dezenas e unidades. Para achar as dezenas é preciso separar os tres ultimos algarismos á direita 359, e extrahir a raiz do menor cubo contido em 273, se este novo numero tivesse mais de tres algarismos, empregariamos ainda o mesmo raciocinio, até chegar á um numero de trez algarismos.

O maior cubo contido em 273 é 6^3; logo 6 exprime as dezenas da raiz cubica de 273359, ou as centenas da raiz total; tirando pois o cubo de 6 ou 216 de 273 teremos o resto 57, ao lado d'este resto escrevemos a secção seguinte de tres algarismos o que dá o resto 57359; tomando para divisor d'este resto o triplo do quadrado de 6, achamos $6^2 \times 3 = 108$; e dividindo 57359, separando os dous ultimos algarismos á direita por 108 o quociente é 4, que é o algarismo das unidades da raiz cubica de 273359, por tanto 64 é a raiz cubica do maior cubo contido em 273359; e é o numero das dezenas da raiz cubica, do numero dado, ora o excesso de 273359 sobre $64^3 = 262144$ é 11215, a raiz cubica de 273389449, é composta de 64 dezenas, e um certo numero de unidades expressado por um só algarismo. Para achar as unidades escrevemos ao lado do resto 11215 a ultima secção 449, o que dá o numero 11215449; então formamos o triplo do quadrado de 64: $64^2\times3=1288$; e dividimos 112154 centenas do numero dado por este producto; o quociente 9, exprime o algarismo das unidades procuradas, ou um maior. Para verificar tiramos 649^3 de 273359449: o resto zero faz ver que 649 é a raiz cubica de 273359449. Esta operação pode ser escrita do modo seguinte.

273,359,449	649 raiz cubica	
216		
57359	$6^2\times3=108$ Div.	$64^2\times3=12288$
46144		
112154,49	$60^2\times4\times3=43200$	$640^2\times9\times3=11059200$
11215 449	$60\times4^2\times3=\ 2880$	$640\times9^2\times3=\ 155520$
00	$4^3=\ 64$	$9^3=\ 729$
	46144	11215449

(179) A regra geral para extrahir a raiz cubica de um numero inteiro é a seguinte.

1.° Divide-se o numero dado em secções de 3 algarismos cada uma, começando pela direita; a ultima á esquerda poderá ser de 1 de 2 ou de 3 algarismos. O numero de secções é igual ao numero de algarismos da raiz cubica.

2.° Da 1.ª secção contando da esquerda, se subtrahe o maior cubo n'ella contido, a raiz cubica d'este é o primeiro algarismo da raiz procurada.

3.° A direita do resto escreve-se a secção seguinte e separam-se os dous ultimos algarismos á direita.

4.° Divide-se o numero acima formado pelo triplo do quadrado da raiz já achada, e toma-se o quociente desta divisão para o algarismo da raiz, eleva-se então o numero formado pelos dous algarismos da raiz já achados ao cubo; se este cubo é maior que as duas primeiras secções do numero dado, cumpre diminuir de 1 algarismo e tornar a examinar, se elavando-o ao cubo pode este subtrahir-se das duas secções.

5.° Esta subtracção feita abaixa-se a 3.ª secção e separam-se os dous algarismos a direita.

6.° Divide-se o numero assim preparado pelo triplo do quadrado dos dous algarismos da raiz já achados: escreve-se o quociente na raiz que ficará tendo 3 algarismos, eleva-se ao cubo esta raiz; se não puder ser subtrahida das 3 secções, tira-se 1 ao ultimo algarismo e torna-se a verificar.

7.º Esta nova subtracção feita abaixa-se á direita do resto a secção seguinte, e separados os dous ultimos algarismos á direita, continua-se do mesmo modo até chegar á ultima secção.

$$
\begin{array}{r}
41278{,}242816(3456 \\
27 \\
3^2 \times 3 = 27) = 14278(4 \\
41278 \\
34^3 = 39304 \\
34^2 \times 3 = 3468)1974242(5 \\
41278242 \\
345^3 = 41063625 \\
345^2 \times 3 = 357075)21461781 6(6 \\
41278242816 \\
3456^3 = 41278242816
\end{array}
$$

Observação. Em toda a operação para a extrecção da raiz cubica, cada resto é igual ao numero dado diminuido da raiz cubica da parte da raiz já achada.

(179) Para extrahir a raiz cubica de um numero inteiro qualquer, procede-se como se o numero fosse um cubo perfeito, e quando fica um resto que corresponde ao algarismo das unidades da raiz, o numero não é cubo perfeito, e o numero achado como raiz exprime a raiz cubica do maior cubo contido no numero dado.

Podemos mostrar como fizemos á respeito das raizes quadradas (191), que quando um numero inteiro, como 3, não tem raiz cubica inteira, tambem não tem uma raiz fraccionaria, mas que podemos achar uma aproximada.

(180) Os cubos das fracções acham-se elevando os denominadores, e os numeradores das fracções ao cubo; para extrahir a raiz cubica de uma fracção basta pois extrahir a raiz cubica de seu numerador e de seu denominador. Como porèm pode acontecer que o denominador, ou o numerador não seja um numero cubico, é bom reduzir esta dupla operação à uma só, o que se faz multiplicando os dous termos da fracção pelo quadrado do denominador, a ultima fracção conserva o mesmo valor, e só se tem de fazer uma operação para achar a raiz cubica do numerador. Por exemplo a raiz

cubica de $\frac{11}{2}=\sqrt[3]{\frac{11\times2^2}{2\times2^2}}=\sqrt[3]{\frac{44}{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{44}}{2}$

(181) O cubo de um numero decimal acha-se formando o cubo d'este numero como se fora um numero inteiro, e separando depois á direita d'este cubo, tres vezes tantas decimaes quantos tinha o numero dado. O numero de decimaes de um cubo é sempre um multiplo de 3. Para extrahir a raiz cubica de um numero decimal, basta extrahir a raiz cubica do numero inteiro que resulta da suppressão da virgula da decimal dada, e depois separar à direita da raiz, tantas decimaes quantas unidades tem o terço do numero de decimaes do cubo dado. Por exemplo a raiz cubica de 273,359449 acha-se, extrahindo a raiz cubica de 273359449, que é 649, e separando á direita d'esta raiz 2 decimaes porque o numero dado tem 6 decimaes, e então a raiz procurada é 6,49. Se o numero proposto for 0,000273359449, procura-se a raiz cubica de 273359449 que é 649, e como esta deve ter 4 algarismos decimaes terço dos que tem o numero dado, a raiz cubica é 0,0649.

(182) Para achar a raiz cubica de um numero aproximadamente, empregam-se artificios analogos aos que indicamos para a extracção das raizes quadradas. Por exemplo para extrahir a raiz cubica de 3, á menos de um quarto multiplica-se 3 pelo cubo de 4, e depois extrahe-se a raiz cubica d'este prodúcto $3\times64=192$, $\sqrt[3]{192}=5,+$ um resto, a raiz cubica de 3 é pois um numero entre $\frac{5}{4}$ e $\frac{6}{4}$. A aproximação por meio das decimaes, acha-se, recuando para á direita a virgula tantas vezes trez lugares quantos algarismos se quer conservar na raiz cubica; para isto ajunta-se um numero conveniente de cifras sendo preciso. Assim $\sqrt[3]{0,3}$ á menos de $\frac{1}{100}$ ou 1,00, extrahe-se a raiz cubica de 0,300000, que é 64, logo a raiz cubica de 0,3, é 0,64.

Se o número dado é inteiro ajunta-se a cada resto uma secção de 3 cifras até que se obtenha o numero de algarismos decimaes que se quer.

Exemplos.

1 Qual a raiz cubica de 0,0001357 resposta 0,05138

2 Qual a raiz cubica de 5, resposta 1,709976
3 Qual a raiz cubica de 10, resposta 2,154435

(183) Nada diremos á respeito da extração das raizes 4.ª e 5.ª, etc. para o que temos methodos analogos aos que empregamos para a extração das raizes 2ª e 3ª, porque na algebra mostraremos como se pode extrahir uma raiz qualquer; nos usos da vida nunca precisamos senão da extração das raizes quadradas e cubicas. Observaremos porém que, quando o grão da raiz é o producto de muitos factores podemos decompol-a em extracções successivas de raizes de gráos menores. Assim por ex. para achar a raiz 4ª de um numero basta extrahir a raiz quadrada d'este numero, e depois a raiz quadrada desta raiz. A raiz 12ª, porque $12=2\times2\times3$, acha-se extrahindo duas vezes a raiz quadrada, e depois a raiz cubica; por exemplo para achar a raiz 12ª de 244140625, primeiro extrahe-se a raiz cubica que é 625, e depois a raiz quadrada de 625 que é 25, e finalmente a raiz quadrada de 25 que è 5, e assim $\sqrt[12]{244140625}=5$: De modo que só precisamos de saber extrahir directamente as raizes de gráos representados por numeros primos.

A extracção de raizes é uma operação trabalhosa, mas logo veremos que torna-se muito facil empregando-se os logarithmos.

PARTE 2.ª

COMPARAÇÃO DOS NUMEROS.

CAPITULO VIII.

DAS PROPORÇÕES E PROGRESSÕES.

§ 1.º

Razões.

(184) Dous numeros comparados não podem aprezentar senão duas relações, são, ou iguaes ou desiguaes. A igualdade de dous numeros considerada não no principio de formação respectiva á cada um, que pode ser differente, mas nos seus valores mesmos, é uma identidade simples que nenhuma consideração nos pode suggerir. A relação $6=6$ significa simplesmente que 6 é 6. A desigualdade entre dous numeros dà origem a duas considerações differentes, 1° esta comparação pode ter por objecto saber quanto um dos numeros é maior que o outro, e 2° quantas vezes um dos numeros contém o outro. No primeiro caso o resultado da comparação, ou a sua razão, é a differença de um para outro numero, no 2° caso, è o quociente de um numero dividido pelo outro. A differença de dous uumeros chama-se razão arithmetica, o quociente razão geometrica. Por exemplo a razão arithmetica de 5, e 7, é 2, porque $7-5=2$, e a razão geometrica de 3, e, 9, é 3 porque $\frac{9}{3}=3$. Os dous numeros comparados chamam-se os termos da razão, o primeiro termo chama-se antecedente, e o 2° consequente.

(185) Uma razão arithmetica fica sendo a mesma, quando augmentamos, ou diminuimos os dous termos de uma mesma quantidade; a razão de 7 à 5, é a mesma que a de $7+3$ á $5+3$ isto é, que a de 10 á 8, de facto $7-5=2$, e $10-8=2$.

(186) Uma razão geometrica não muda quando multiplicamos, ou dividimos os dous termos por uma mesma quantidade. Por exemplo a razão geometrica de 9 á 3, é a mes-

ma que a de 9×2, á 3×2, isto é de 18 á 6, e de facto a primeira é $\frac{9}{3}=3$, e a segunda $\frac{18}{6}=3$

(187) As razões das quantidades irracionaes podem ser determinadas, pois que entram nos calculos como representando valores aproximados. Estas razões são muitas veze-commensuraveis, por exemplo a razão geometrica entre $\sqrt{12}$ e $\sqrt{3}$ pode ser representada por $\frac{2}{1}$, pois

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4}{1}}=\frac{2}{1}$$

§ 2.º

PROPORÇÕES.

(188) Duas razões iguaes da mesma natureza, isto é ambas arithmeticas ou ambas geometricas, estabelecem entre os numeros que as formam uma igualdade que se chama proporção. Por exemplo a rasão arithmetica entre 7 e 5, sendo a mesma que entre 10 e 8, estes quatro numeros dão origem a igualdade $7-5=10-8$, que se chama equidifferença, ou proporção arithmetica. A razão geometrica entre 4 e 2 sendo a mesma que entre 6 e 3, os numeros 4, 2, 6, 3, dão origem á igualdade $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ que se chama um equiquociente, ou uma proporção geometrica.

Os quatro termos de uma equidifferença escrevem-se uns adiante dos outros separando por um (.) cada antecedente de seu consequente, e por (:) as duas razões comparadas; por exemplo a equidifferença $7-2=11-6$, escreve-se 7.2:11.6.

Os quatro termos de uma proporção geometrica escrevem-se uns depois dos outros separando por (:) cada antecedente de seu consequente, e por :: as duas razões; por exemplo o equiquociente $\frac{21}{3}=\frac{14}{2}$ escreve-se 21:3::14:2

Para distinguir os antecedentes e os consequentes d'uma proporção, chamam-se 1º antecedente e 1º consequente os dous termos da primeira razão, e 2º antecedente e 2º consequente os dous termos da segunda razão. O primeiro termo e o 4º termo são os extremos, e 2º termo e o 3º são os meios.

A differença entre os dous primeiros termos d'uma proporção arithmetica, é a rasão da 1ª relação, e a differença dos dous outros termos a rasão da 2ª relação, estas razões são iguaes. N'uma proporção geometrica o quociente do primeiro termo dividido pelo 2º é a razão da primeira relação, e o quociente do 3º termo dividido pelo 4º é a rasão da 2ª relação, estas duas razõess ão iguaes.

O quarto termo d'uma proporção é o que se chama a 4ª proporcional aos trez outros termos.

Quando os termos do meio são iguaes a proporção é continua; como 5:7:7.9. o termo do meio 7 é um meio arithmetico entre 5 e 9, esta proporção escreve-se $\div$ 5.7.9, e 9 é uma terceira proporcional á 5 e 7. Do mesmo modo 4:12::12:36 é uma proporção geometrica continua que se escreve $\div\!\div$4:12:36 e 12 é um meio geometrico entre 4 e 36 e este ultimo uma terceira proporcional geometrica á 4 e 12.

PROPORÇÕES ARITHEMTICAS.

(189) Theorema 1.º Em toda proporção por differença a somma dos extremos é igual a somma dos meios. Seja dada a proporção 7.2:11.6; a somma 7+6 dos extremos é igual a somma 2+11 dos meios. A proporção exprime por sua natureza que 7—2=11—6. portanto acrescentando aos dous termos desta igualdade uma mesma quantidade, (a somma dos consequentes ou das quantidades subtractivas 2+6,) não alteramos a igualdade (25 axi 4º) logo

$$7-2+2+6=11-6+2+6$$

e simplificando

$$7+6=11+2.$$

Portanto a somma dos extremos da proporção 7.2:1.6 é igual a somma dos meios.

(190) Theorema 2.º Todas as vezes que quatro numeros são taes que a somma de dous d'entre elles é igual a somma dos dous outros, estes quatro numeros formam uma equidifferença, ou uma proporção arithmetica, na qual os dous primeiros numeros occupam os extremos ou os meios, e os outros dous os meios ou os extremos. Seja dada a igualdade 7+9=11+5. Ora se das duas quantidades iguaes que formam esta igualdade tiramos uma mesma quantidade 5+9 não a alteramos, (26, 1º), logo

$$7+9-5-9=11+5-5-9$$

e redusindo

$$7-5=11-9$$

Esta ultima igualdade é uma proporção arithmetica, que pode ser representada por 7.5:11.9, ou por 11.9:7.5

(191) Theorema 3.º Um dos extremos d'uma proporção arithmetica é igual a somma dos meios diminuida do valor do outro extremo. E um dos meios é igual a somma dos extremos diminuida do valor do outro meio.

Seja dada a proporção 7.5:11.9 esta proporção nos dá a igualdade $7+9=11+5$ (189) tirando de cada termo desta igualdade a mesma quantidade 7, temos a seguinte igualdade

$$7+9-7=11+5-7$$

simplificando $9=11+5-7$

O 4.º termo 9 da proporção dada é igual a somma dos meios $11+5$ diminuida do outro extremo 7; a segunda parte se prova do mesmo modo

$$11+5=7+9$$

tirando desta igualdade 5 de cada termo temos a igualdade

$$11+5-5=7+9-5$$
$$11=7+9-5$$

um dos meios 11 é igual a somma dos extremos $7+9$ diminuida de 5, outro meio.

(191) Theorema 4.º Numa proporção arithmetica continua, o meio arithmetico é igual á metade da somma dos extremos: seja dada a proporção arithmetica 8.6:6.4. temos

$$8+4=6+6=12$$

logo devidindo os termos desta igualdade por dous, temos uma outra igualdade—

$$\frac{8+4}{2}=\frac{12}{2}=6$$

e 6 o meio arithmetico da proporção dada, é igual á metade da somma dos extremos.

(193) Theorema 5.º Podemos fazer n'uma proporção arithemetica todas as transformações que não alterão a igualdade entre a somma dos meios e a dos extremos. Por exemplo a proporção arithmetica 7.5:11.9 dando a igualdade $7+9=5+11$ pode fornecer as oito proporções seguintes.

7.5:11.9;7.11:5.9;9.5:11.7;9.11:5.7.
5.7:9.11;5.9:7.11;11.7:9.5;11.9:7.5

(194) Problema. 1, Conhecendo tres termos duma proporção arithmetica, determinar o 4.º quer seja um extremo ou um meio.

Representando o termo incognito por um x podemos sempre determinal-o dados os outros termos, a incognita não pode ser senão um dos extremos, ou um dos meios.

1.º Quando é um dos extremos como na proporção 4.2:12.x acha-se o seu valor por theorema 3º pois temos então $x=12+2-4=14-4=10$; o que se pode provar directamente pois a proporção dá a igualdade

$$x+4=12+2$$

tirando 4 de cada termo temos a igualdade

$$x=12+2-4=14-4=10$$

e de facto 4.2:12.10, ou $4-2=12-10$.

2.º Quando a incognita é um dos meios como na proporção 4.x:12.10, tãobem a achamos pelo mesmo theorema pois temos então, $x=4+10-12=14-12=2$; o que se prova directamente pois a proporção dada, nos dà a igualdade

$$4+10=x+12$$

tirando a mesma quantidade 12 de ambos os termes temos a igualdade

$$4+10-12=x$$
$$14-12=x$$
$$2=x$$

e de facto 4,2:12.10, ou $4-2=12-10$.

(195) Problema 2.º Achar um meio arithmetico entre dous numeroç dados.

O meio arithmetico entre dous numeros é a metade da somma d'estes numeros theorema 4º. Por exemplo seja proposto achar um meio arithmetico entre 12, e 8, este meio é $x=\frac{12+8}{2}=10$; e de facto 12.10:10.8: ou $12-10=10-8$

PROPORÇÕES GEOMETRICAS.

(196) Theorema 1.º Em toda proporção geometrica o producto dos extremos é igual ao producto dos meios: Seja dada a proporção geometrica, ou por quociente, 21:3::14:2,

então $21 \times 2 = 3 \times 14$, a proporção dada exprime que $\frac{21}{3} = \frac{14}{2}$, isto é que os quocientes d'estas duas divisões são iguaes: redusindo estas duas fracções ao mesmo denominador, temos as fracções seguintes $\frac{21 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14 \times 3}{3 \times 2}$, e por consequencia, ja que os denominadores destas fracções são iguaes, não podem ser ellas iguaes sem que os numeradores o sejão, e ellas são iguaes porque são as mesmas fracções que as que indicão a igualdade que resulta da proporção dada; logo podemos concluir que $21 \times 2 = 14 \times 3$, isto é, o producto dos extremos 21×2, é igual ao producto dos meios 14×3.

(197) Theorema 2.º Todas as vezes que quatro numeros forem taes que o producto de dous d'entre elles seja igual ao producto dos dous outros, estes quatro numeros formam uma proporção geometrica, da qual os dous primeiros numeros são os extremos, ou os meios, e os dous outros os meios, ou os extremos. Sejam dados os numeros 9,12,36,3, taes que $9 \times 12 = 36 \times 3$. Estes numeros formam uma proporção geometrica tendo por extremos, os dous numeros de um d'estes productos, e por meio os do outro producto: temos por hypothese a igualdade

$$9 \times 12 = 36 \times 3 = 108$$

dividindo os dous termos desta igualdade pela mesma quantidade 3×12 temos

$$\frac{9 \times 12}{3 \times 12} = \frac{36 \times 3}{3 \times 12}$$

supprimindo os factores communs nestas duas fracções dos denominadores e numeradores, o que vem a ser o mesmo que dividir os dous termos de cada uma pela mesma quantidade, temos á final a igualdade

$$\frac{9}{3} = \frac{36}{12}$$

e por tanto sendo estes dous quocientes iguaes, temos a proporção

$$9:3::36:12$$

e os numeros dados formam uma proporção geometrica.

(198) Theorema 3.º Um dos termos extremos de uma proporção geometrica é igual ao producto dos meios dividido pelo outro extremo; e um dos meios é igual ao producto dos extremos dividido pelo outro meio—seja dada a

proporção 9:3::36:12, temos por theorema 1.° $9\times12=3\times36$, dividindo os dous membros desta igualdade pela mesma quantidade 9, temos a seguinte igualdade

$$\frac{9\times12}{9}=\frac{3\times36}{9}$$

simplificando, ou supprimindo o factor commum aos dous termos da fracção $\frac{9\times12}{9}$ temos

$$12=\frac{3\times36}{9}$$

isto é, o 4.° termo da proporção dada é igual ao producto dos meios dividido pelo 1.° termo: do mesmo modo se prova que $9=\frac{3\times36}{12}$, e que os meios, $3=\frac{9\times12}{36}$, e $36=\frac{9\times12}{3}$

(199) Theorema 4.° N'uma proporção geometrica continua, o termo medio geometrico, é igual á raiz quadrada do producto dos extremos. Por exemplo na proporção geometrica continua 5:30::30:180, o termo medio 30 é igual a raiz quadrada de 180×5. Temos por theorema 1°, $5\times180=30\times30=30^2$, logo a raiz quadrada de 30^2 deve ser igual a raiz quadrada de 5×180, isto é temos a igualdade

$$30=\sqrt{5\times180}=\sqrt{900}=30$$

Assim 30, meio geometrico da proporção dada, é igual a raiz quadrada do producto dos extremos 5, e 180.

(200) Theorema 5.° Podemos fazer n'uma proporção geometrica todas as transformações que não alteram a igualdade entre o producto dos extremos com o dos meios. A proporção 6:3::14:7 dá a igualdade $6\times7=3\times14$ e podemos escrever esta proporção de diversos modos.

1.° Dislocando os extremos entre si, e os meios entre si, o que se chama alternando

6:14::3.7
7: 3::14:6
7:14:: 3:6

2.° Pondo os extremos em lugar dos meios, o que se chama invertendo—

3:6::7:14
14:6.:7: 3
3:7::6:14
14:7::6: 3

A proporção 6:3::14:7. dando por transformação a proporção 3:7::6:14. resulta que em toda proporção a razão do 1.º consequente ao 2.º consequente é a mesma que a razão do 1.º antecedente ao 2.º antecedente.

(201) Theorema 6.º Uma proporção não se altera multiplicando por um mesmo numero os dous primeiros termos, ou os dous ultimos, ou ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes. Seja dada a proporção 6:3::14:7 não alteramos esta proporção, multiplicando por um numero 5, 1.º, os dous primeiros termos 6, e 3, de facto a proporção 6:3:: 14:7. nos dá a igualdade $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$ e multiplicando 6 e 3 por 5 temos a seguinte igualdade $\frac{6X5}{3X5}=\frac{14}{7}$, logo 30:15::14:7. 2º os dous ultimos termos 14, e 7, na igualdade $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$ multiplicando os ultimos termos por 5, temos a igualdade $\frac{6}{3}=\frac{14X5}{7X5}=\frac{70}{35}$ e 6:3::70:35: 3.º os antecedentes 6 e 14, de facto na igualdade $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$ multiplicando 6 e 14 por 5, temos $\frac{6X5}{3}=\frac{14X5}{3}$, e por tanto 30:3::70:7: 4.º os consequentes 3 e 7. de facto na iguldade $\frac{6}{3}=\frac{14}{7}$ multiplicando 3 e 7 por 5 temos a igualdade $\frac{6}{3X5}=\frac{14}{7X5}$, logo 6:15::14:35.

Observação. Tambem não se altera a proporção dividindo por um mesmo numero, os primeiros termos ou os ultimos, ou os antecedentes, ou os consequentes; prova-se do mesmo modo.

Corollario. Por esta propriedade pode-se fazer desaparecer as fracções que se acham n'uma proporção, e simplificam-se os termos d'uma proporção quando tem hum factor commum á um extremo e um meio. Por exemplo $\frac{2}{3}:\frac{500}{7}::4:\frac{3000}{7}$, é uma proporção da qual podemos fazer desaparecer os denominadores 3, e 7, multiplicando os dous antecedentes por 3, e os dous consequentes por 7, e temos então 2:500::12:3000

Podemos simplificar esta proporção dividindo os consequentes por 100, e temos então 2:5::12:30.

(202) Theorema 7.º Quando duas proporções tem uma razão commum, as duas outras rasões formam uma proporção. As duas proporções 2.3::6:9. e 2:3::10:15, tendo uma

rasão commum 2:3, as duas outras rasões 6:9, 10:15 formam uma proporção 6:9::10:15. A primeira proporção dá a igualdade $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, e a segunda a igualdade $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$, logo $\frac{6}{9}=\frac{10}{15}$, e portanto 6:9::10:15.

(203) Theorema 8.º Quando duas proporções tem os mesmos antecedentes, ou os mesmos consequentes, os outros 4 termos formam uma proporção. Sejam dadas as duas proporções 2:6::3:9, e 2:8::3:12, tendo os mesmos antecedentes, 2, e 3, os quatro termos formam a proporção 6:8::9:12. As duas proporções dadas podem ser transformadas (200) nas seguintes 2:3::6:9, 2:3::8:12, e temos então as igualdades $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$, $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, e portanto (202) $\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$, e 6.9::8:12.

(204) Theorema 9.º Em toda proporção a somma ou a differença dos dous primeiros termos está para o segundo, como a somma ou a differença dos dous ultimos para o quarto. Na proporção 4:2::16:8 temos $4 \pm 2:2::16 \pm 8:8$. Nas fracções $\frac{4}{2}$, e $\frac{16}{8}$, que representam as duas razões da proporção dada, temos a expressão de quantas vezes os consequentes são contidos nos seus antecedentes, logo augmentando ou diminuindo cada antecedente de seu consequente cada rasão augmenta ou diminue de uma unidade, e como as duas rasões primeiras $\frac{4}{2}$, e $\frac{16}{3}$, são iguaes, as duas novas tambem o ficam sendo, logo $\frac{4 \pm 2}{2}=\frac{16 \pm 8}{8}$, e $4 \pm 2:2::16 \pm 8:8$.

Pela mesma rasão podemos concluir que o 1º termo de uma proporção mais ou menos um certo numero de vezes o 2º, está para o 2º, como o terceiro termo mais ou menos o mesmo numero de vezes o 4º está para o 4º.

(205) Theorema 10. Em toda proporção, o 1º antecedente mais ou menos o seu consequente, está para o 2º antecedente mais ou menos o seu consequente, como o 1º antecedente, para o 2º antecedente, ou como o 1º consequente para o 2º consequente. Seja dada a proporção 4:2::16:8, então, $4 \pm 2:16 \pm 8:4:16$, ou $4 \pm 2:16 \pm 8:2\cdot 8$. Esta proporção, nos dá por (204) e pelo que provamos no theorema antecedente a seguinte proporção $4 \pm 2:2::16 \pm 8:8$, alterando a ordem dos meios termos temos, $4 \pm 2:16 \pm 8:2:8$, e como invertendo os meios termos da proporção primitiva temos tambem 4:16::2:8, segue-se que (202), $4 \pm 2:16 \pm 8:4:16$.

D'este theorema concluimos que o 1º antecedente mais ou menos um certo numero de vezes o seu consequente está para o 2° antecedente mais ou menos o mesmo numero de vezes o 2° conseqnente', como o 1° antecedente está para o 2°, ou o 1° consequente para o 2°.

(206) Theorema 11°. Em toda a proporção a somma dos dous primeiros termos está para a somma dos dous outros termos, como a differença dos dous primeiros termos está para a differença dos dous outros. Seja dada a proporção 4:2::16:8. temos 4+2:16+8::4—2:16—8. pelo theorema antecedente temos $\frac{4+2}{16+8}=\frac{2}{8}$, e $\frac{4-2}{16-8}=\frac{2}{8}$ Logo, $\frac{4\div2}{16\div8}=\frac{4-2}{16-8}$ e por consequencia 4+2:16+8::4—2:16—8. Deste theorema se tira a conclusão de que o 1° antecedente mais um certo numero de vezes o seu consequente, está para o 2° antecedente mais o mesmo numero de vezes o seu consequente, como o primeiro antecedente menos um certo numero de vezes o seu consequente está para o 2° antecedente menos o mesmo numero de vezes o seu consequente.

(207) Theorema 12°. Em toda a proporção a somma ou a differença dos antecedentes, está para a somma ou a differença dos consequentes, como cada antecedente está para seu consequente. Seja dada a mesma proporção 4:2::16:8, temos 4±16:2±8::4:2 ou : :16:8.

Para provar este theorema basta mudar a ordem da proporção primitiva, e applicar o principio de (205). Assim mudando a ordem da proporção dada temos 4:16::2:8 , e por theorema (205) temos 4±16:2±8::16:8, e como 4:2::16:8 segue-se que 4±16::2±8::4:2.

O 1° antecedente mais ou menos um certo numero de vezes o 2° antecedente, está para o primeiro consequente mais ou menos o mesmo numero de vezes o 2° consequente, como cada antecedente está para seu consequente.

(208) Theorema 13. Em toda a proporção a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes, como a differença dos antecedentes este para a differença dos consequentes. Seja a proporção 4:2::16:8. então 4+16:8+2::16—4:8—2:) Temos (207) as seguintes proporções 4+16:2+8::16:8

16— 4:8—2::16:8

logo $\frac{16+4}{8+2}=\frac{16}{8}$, e $\frac{16-4}{8-2}=\frac{16}{8}$, e por consequencia $\frac{16+4}{8+2}=\frac{16-4}{8-2}$; e 16+4:8+2::16—4:8—2.

O primeiro antecedente mais um certo numero de vezes o 2º antecedente está para o 1º consequente mais o mesmo numero de vezes o 2º consequente como, o 1º antecedente menos um certo numero de vezes o 2º antecedente está para o 1º consequente menos o mesmo numero de vezes o 2º consequente.

(209) Theorema 14. Multiplicando ordenadamente os termos de duas ou mais proporções os productos resultantes estarão em proporção.

Sejam dadas as duas proporções 30:15::6.3 e 2:3::4:6; 30X2:15X3::6X4:3X6. As duas properções dão as igualdadades $\frac{30}{15}=\frac{6}{3}$, e $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, logo $\frac{30}{15}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{3}\times\frac{4}{6}$, pois as fracções iguaes $\frac{30}{15}$, e $\frac{6}{3}$ foram multiplicadas por quantidades iguaes $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{6}$, por tanto $\frac{30\times2}{15\times3}=\frac{6\times4}{3\times6}$, e por consequencia 30X2:15X3::6X4:3X6. O mesmo se pode provar de um numero qualquer de proporções.

(210) Theorema 15. Dividindo ordenadamente os termos de duas ou mais proporções, os quocientes resultantes estarão em proporção.

Sejam dadas as proporções 8:4::12:6, e 4:2.::6:3, temos $\frac{8}{4}:\frac{4}{2}::\frac{12}{6}:\frac{6}{3}$, e de facto $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$, e $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$, logo dividindo as fracções iguaes $\frac{8}{4}$, e $\frac{12}{6}$ pelas fracções iguaes $\frac{4}{2}$ e $\frac{6}{3}$ continuarão a ser iguaes por tanto $\frac{8}{4}\div\frac{4}{2}=\frac{12}{6}\div\frac{6}{3}$.

(211) Theorema 16. As potencias da mesma ordem de quatro numeros em proporção, formam tambem uma proporção. Seja dada a proporção 6:5::10:5, então $6^2:3^2::10^2:5^2$, $6^3:3^3::10^3:5^3$, o quo se prova facilmente, pois vem à ser o mesmo que multiplicar duas ou tres proporções iguaes e semelhantes, termo por termo; mas prova-se directamente este theorema pelo modo seguinte, a proporção dada, nos dá a igualdade $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$, e portanto $\frac{6^2}{3^2}=\frac{10^2}{5^2}$, $\frac{6^3}{3^3}=\frac{10^3}{5^3}$ logo $6:^2 3^2::10^2:5_2$

(212) Theorema 17. As raizes do mesmo grào de quatro quantidades em proporção tambem formam uma proporção. Seja dada a proporção 4:9::16:36, então $\sqrt{4}:\sqrt{9}::\sqrt{16}:\sqrt{36}$, ou 2:3::4:6, de facto $\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$, logo $\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{16}{36}};\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, e portanto 2:3::4:6.

(213) Theorema 18. Em uma serie de rasões iguaes a somma de um numero qualquer de antecedentes está para a somma de seus consequentes, como um antecedente está para o seu consequente. Sejam dadas as relações iguaes $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{14}$, temos 3:6::4:8, logo 3+4:6+8:4;8 (207) as rasões iguaes $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{14}$, dão a proporção 4;8;;7;14, por consequencia temos a proporção 3+4· 6+8:.7:14 e podemos formar a proporção seguinte

$$3+4+7:6+8+14::7:14.$$

Para indicar que umas poucas de razões são iguaes como $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{5}{10}$ etc. escreve-se assim 3:6::4:8::7:14::5:10 e diz se que 3 está para 6 como 4 para 8 como 7 para 14 como 5 para 10, isto è 3 é metade de 6, 4 de 8, 7 de 14, 5 de 10 etc.

(214) Problema 1.° Dados tres termos d'uma proporção geometrica determinar o outro, quer seja um extremo ou um meio.

Representando por x o termo incognito podemos sempre determinal-o, conhecendo os outros tres termos da proporção, quer seja um dos extremos, ou um dos meios. Por exemplo 1° 8;2::20; x témos

$$8\times x=20\times 2 \text{ dividindo os dous termos por } 8$$

$$x=\frac{20\times 2}{8}$$

$$x=\frac{40}{8}=5.$$

e de facto 8;2;;20:5. ou $\frac{8}{2}=\frac{20}{5}$

2.° 8:x::20:5, temos

$$20\times x=8\times 5$$

$$x=\frac{8\times 5}{20}=\frac{40}{20}=2$$

e de facto 8;2;:20:5 ou $\frac{8}{2}=\frac{20}{5}$.

(215) Problema 2.° Achar um meio geometrico entre dous numeros quaesquer.

Para achar o meio geometrico entre 4, e 36, forma-producto $4\times36=144$ dos dous numeros, e extrahe-se a raiz quadrada deste producto, que é 12, e 12 é o meio geometrico entre 4, e 36, é de facto $4:12::12:36$. ou $\div\div 4:12:36$. Em geral acha-se o meio geometrico entre dous numeros multiplicando um pelo outro, e extrahindo a raiz quadrada d'este producto.

Muitas vezes não se pode achar um meio geometrico entre dous numeros exactamente, mas sempre se pode achar um aproximadamente. Por exemplo para achar o meio geometrico entre 1 e 10 seria preciso extrahir a raiz quadrada de 10, esta raiz é incommensuravel, ou irracional, nenhum numero satisfaz á questão, mas póde-se achar um numero que se aproxime tanto quanto se queira do meio geometrico entre 1 e 10.

1.º Exemplo: qual é o meio geometrico entre 3, e 12. $3\times12=36$, a raiz quadrada de 36, é 6, meio pedido.

2.º Exemplo: qual e o meio geometrico entre 10, e 20.
Resposta 14, 1421356

§ 3.º

Progressões.

(216) A progressão é uma serie de numeros em proporção arithmetica ou geometrica, e assim são ou arithmeticas ou geometricas.

1.º Progressões Arithmeticas.

(217) Uma serie de numeros em que cada numero excede ou é menor que o que precede, e é menor ou maior que o que o segue, de uma mesma quantidade, é o que se chama uma progressão arithemetica, ou por differença. Por exemplo 2, 4, 6, 8, 10, 12, formam uma progressão arithmetica porque cada termo excede o que precede de 2, os numeros 16, 12, 8, 4, formam tambem uma progressão, mas nesta ultima, cada termo é menor que o que precede de 4 unidades o que se chama progressão decrescente, por ser o contrario da outra que se chama progressão crescente, indicam-se as progressões pelo modo seguinte $\div$ 2. 4. 6. 8. 10. 12. o que se enuncia 2 está para 4, como 4 para 6, como 6 para 8, como 8 para 10, como 10 para 12. A differença entre dous numeros

quaesquer da progressão é uma quantidade fixa que se chama razão.

(218) Theorema 1.º Um termo duma progressão arithmetica, é igual ao primeiro termo augmentado de tantas vezes a razão quantos termos ha que o precedem na progressão, quando esta é crescente; e igual ao 1.º termo diminuido de tantas vezes a razão quantos são os termos que o precedem, quando a progressão é decrescente.

Pela definição da progressão arithmetica (217) é evidente que nas progressões crescentes,o 2.º termo é igual ao 1.º mais a razão, o 3º igual ao 2º mais a razão, ou ao 1º mais duas vezes a razão, o 4º igual ao 3º mais a razão, ou ao 1º mais 3 vezes a razão, e assim por diante, logo qualquer termo é igual ao primeiro mais tantas vezes a razão quantos são os termos que o precedem. Na progressão decrescente o 1º termo menos a razão é igual ao 2º, o 2º menos a razão, ou o 1º menos 2 vezes a razão é igual ao 3º etc. logo um termo qualquer é igual ao 1º menos tantas vezes a razão quantos termos o precedem.

(219) Theorema 2.º A somma do 1º e ultimo termos de uma progressão arithmetica, é igual a somma de dous termos quaesquer igualmente distantes dos extremos, ou igual ao dobro do termo do meio, quando a progressão tem um numero impar de termos.

Seja dada a progressão 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, $2+14=4+12,=6+10,=8+8$.

O ultimo termo 14 é igual ao 1º, 2, mais a razão 2 multiplicada pelo numero de termos da progressão menos 1, isto é por 6. Assim a somma dos extremos é $2+(2+2\times6,)$ o 2º termo 4 é igual ao 1º mais a razão, o 6º termo é igual ao 1º mais a razão multiplicada pelo numero de termos que precedem isto é por 5, logo a somma d'estes dous termos é $(2+2)+(2+2\times5)=2+2+(1+5)\times2=4+6\times2$, igual á somma dos extremos, do mesmo modo se prova o resto.

(220) Theorema 3.º A differença entre os termos extremos de uma progressão arithmetica, é igual a razão multiplicada pelo numero de termos diminuido de 1. Na progressão 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, de 10 termos a razão é 2, e o numero de termos menos 1 é 9: então dizemos, que $20-2=2\times9=18$. O ultimo termo é igual por theorema 1º ao 1º mais a razão multiplicada pelo numero de termos menos 1, logo o ultimo termo menos o 1º é igual a razão multiplicada pelo numero de termos menos 1,

(221) Theorema 4.° A somma de todos os termos de uma progressão arithmetica, é igual a somma dos extremos multiplicada pelo numero de termos e dividida por 2. Ou a somma dos extremos multiplicada pelo numero de termos, é igual ao dobro da somma de todos os termos da progressão. Podemos fazer isto evidente do modo seguinte. Seja dada a progressão 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, escrevendo-se esta progressão, e por baixo a mesma progressão invertida, e sommando os termos correspondentes em ordem assim—

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 3. & 5. & 7. & 9. & 11. & 13. & 15 \\ 15. & 13. & 11. & 9. & 7. & 5. & 3. & 1 \\ \hline 16 & 16 & 16, & 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \end{array}$$

as sommas parciaes dão sempre o mesmo numero, e reunidos dão a somma das duas series, ou o dobro da somma dos termos de uma serie, e a somma parcial de cada dous termos é sempre igual á somma do 1° e ultimo termo da progressão. Logo a somma das duas series é igual a somma dos extremos da progressão multiplicada pelo numero de termos; e a somma de uma das progressões é igual á metade desta quantidade, ou à somma dos extremos multiplicada pelo numero de termos dividido por 2.

(222) Destes theoremas podemos tirar os meios de achar uma das 5 cousas, os dous extremos, o numero de termos, a razão, e a somma dos termos todos, quando 3 destas cousas são conhecidas.

1° Problema. O 1° termo, a razão, e o numero de termos dados, achar o ultimo; ou outro qualquer termo determinado.

Multiplica-se o numero de termos menos um pela razão, e ajunta-se este producto ao primeiro termo, se a progressão é crescente, ou diminue-se do 1° termo, se é decrescente, o resultado é o termo procurado. Esta regra é uma simples applicação do theorema 1.°

1° Exemplo. O primeiro termo de uma progressão arithmetica crescente sendo 2, a razão 3 e o numero de termos 30; pede-se o ultimo termo. Seja x o ultimo termo, este deve ser igual ao 1° mais a razão multiplicada pelo numero de termos que precedem, isto é pelo numero de termos menos um, logo temos

$x=2+3\times(30-1)=2+(3\times29)=89$. ultimo termo pedido.

Do mesmo modo pode-se achar um termo qualquer d'uma progressão arithmetica sem calcular todos os termos intermediarios.

2º Exemplo. Pede-se o 100mo. termo da progressão que principia por 1, com a razão 3, isto é da progressão 1. 4. 7. 10. etc. Seja x o centesimo termo, temos

$x=1+(99\times3)=298$, termo procurado.

3º Exemplo. O 1º termo d'uma progressão arithmetica decrescente sendo 30, a razão $1\frac{1}{2}$ e o numero de termos 20 qual o ultimo termo?

$x=30-(19\times1\frac{1}{2})=30-28\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ ultimo termo pedido.

2º Problema. Dados os dous extremos d'uma progressão, e o numero de termos achar a razão. Divide-se a differença entre os extremos pelo numero de termos menos um, o quociente desta divizão será a razão:

Sabemos por theorema 3º, que a razão de uma progressão multiplicada pelo numero de termos menos 1 é igual a differença dos extremos, logo a razão é igual á esta differença dividida pelo numero de termos menos um. Sejam dados os extremos 2 e 53, e o numero de termos 18, de uma progressão arithmetica, para achar a razão ; representando a razão por x temos $53-2=(18-1)\ x$ (theorema 3º) dividindo os dous termos desta igualdade por $(18-1)$ ou 17 temos a seguinte igualdade

$$\frac{51}{17}=x$$
$$3=x$$

3 é a razão procurada.

2º Exemplo. Os extremos de uma progressão arithmetica sendo 3, e 19, e o numero de termos 9, pede-se a razão.

$x=\frac{19-3}{8}=\frac{16}{8}=2$ razão pedida.

3º Exemplo. Uma pessoa fez uma jornada em 12 dias, no primeiro fez 3 leguas, e foi augmentando cada dia o caminho de um modo igual, de modo que no ultimo dia fez 53 leguas, pede-se o numero de leguas de que augmentou cada dia a jornada

Resposta 5 leguas.

3º Problema. Dados os extremos de uma progressão arithmetica, e a razão achar o numero de termos.

Divide-se a differença dos extremos pela razão, e o quociente augmentado de um será o numero de termos. A differença dos extremos dividida pelo numero de termos menos um dá a razão (problema 2,) logo a mesma differença dividida pela razão deve dar o numero de termos menos 1, e por tanto o quocieute desta divisão augmentado de um deve dar o numero de termos.

1° Exemplo. Os extremos são 2 e 53 e a razão 3, qual o numero de termos? representando o numero de termos por x temos por theorema 3°, a igualdade

$$(x-1)\times 3=53-2$$

logo dividindo os dous termos por 3, temos

$$(x-1)=\frac{53-2}{3}=\frac{51}{3}=17$$

Ajuntando 1 á cada termo temos

$x=17+1=18$ numero de termos.

2° Exemplo. Os extremos sendo 10, e 70, e a razão 3, qual o numero de termos?

resposta, $x=\frac{70-10}{3}+1=\frac{60}{3}+1=20+1=21$

3° Exemplo. Se o primeiro termo de uma progressão arithmetica é 1, o ultimo 10, e a differença $\frac{1}{10}$ qual é o numero de termos?

resposta 91.

4° Problema. Dados os extremos de uma progressão arithmetica, e o numero de termos, achar a somma de todos os termos.

Multiplica-se a somma dos extremos pela metade do numero de termos, este producto é igual a somma de todos os termos.

E' esta regra uma simples applicação do theorema 4°.

1° Exemplo. Seja proposto achar a somma da progressão 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7

$$1+2+3+4+5+6+7.=(7+1)\times\frac{7}{2}=\frac{8\times 7}{2}=28$$

2° Exemplo. O 1° termo de uma progressão é 2, o ultimo 53, e o numero de termos 18, pede-se a somma da progressão. Seja S a somma, temos $S=(2+53)\times\frac{18}{2}=55\times 9=495.$

3° Exemplo. O 1° termo é 1 o ultimo 21 e o numero de termos 11, pede-se a somma da progressão?

Resposta 121.

Observação. Tambem se pode achar a somma de uma progressão arithmetica conhecendo-se o primeiro termo, a razão e o numero de termos.

Multiplica-se o numero de termos menos um pela razão, e procura-se a somma ou differença d'este producto e de duas vezes o primeiro termo conforme a serie é crescente ou decrescente. Multiplicando este resultado por metade do numero de termos acha-se a somma da progressão. Esta regra é evidente pois não é senão a que damos acima, na qual se substitue o ultimo termo pelo seu valor.

Seja proposto achar a somma da progressão arithmetica que principia por 2, e que tem a razão 3, e 18 termos. Tendo o ultimo termo podemos achar a somma pela regra dada neste artigo, logo procurando determinar o ultimo termo, o que fazemos por problema 1º podemos fazer uso da regra. O ultimo termo é $(18—1)\times3+2$, e pela regra acima

$$S.=(18—1)\times3+2)+2)\times\frac{18}{2}$$
$$S.=(17\times3+4)\times9=55\times9=495.$$

5º Problema. Achar dous ou mais meios arithmeticos entre quaesquer dous numeros.

Para achar estes meios, subtrahe-se do maior numero o menor, e divide-se esta differença pelo numero de meios que se quer achar mais uma unidade, e assim acha-se a razão arithmetica, a qual sendo ajuntada ao menor termo continuamente, ou tirado do maior, dá os meios. Considerando-se os dous numeros dados como os extremos da progressão que formam com os meios, é evidente que o numero de termos da progressão é igual ao numero de meios mais dous, logo a razão da progressão, por problema 2º, acha-se dividindo a differença dos extremos pelo numero de termos menos um, o numero de termos menos um, é igual ao numero de meios mais 1, logo etc. como dá a regra.

1º Exemplo. Pede-se dous meios arithmeticos entre 2 e 8, seja x a razão então temos

$x=\frac{8-2}{2+1}=\frac{6}{3}=2$, e os dous meios são $2+2=4$, e $4+2=6$.

2º Exemplo. Pede-se 3 meios arithmeticos entre 1, e 2.

resposta $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$.

3º Exemplo. Pede-se 5 meios arithmeticos entre 2 e 14,

resposta 4, 6, 8, 10, 12,

1ª Observação. Assim podemos sempre inserir um numero qualquer de termos medios arithmeticos entre dous numeros; isto é, podemos sempre collocar entre dous numeros um numero dado de termos taes que a totalidade destes numeros formem uma progressão arithmetica.

2ª Observação. Inserindo successivamente um mesmo numero de meios arithmeticos entre o 1º e o 2º termo de uma progressão arithmetica, entre o 2º e o 3º etc. a totalidade d'estes termos forma uma outra progressão arithmetica. Seja dada, por exemplo, a progressão ÷ 2. 14. 26 inserindo tres meios arithmeticos entre 2 e 14, outros 3 entre 14 e 26, achamos a nova progressão ÷ 2, 5, 8, 11, 14, 17. 20, 23, 26. De facto a razão entre os novos termos determina-se do modo seguinte, $x=\frac{14-2}{4}=\frac{12}{4}=3$, $x=\frac{26-14}{4}=\frac{12}{4}=3$, assim a razão da nova progressão é 3, e a razão entre 2 e 14, sendo a mesma que entre 14 e 26, segue-se que a razão entre os termos da nova progressão é igual a 4ª parte de 14—2,= 26—14.

2.º Progressões geometricas.

(223) A progressão geometrica ou por quociente é uma serie de termos taes que cada um contém ou é contido no que precede o mesmo numero de vezes: isto é que um qualquer termo dividido pelo que o precede dá um quociente constante. Por exemplo 1, 3, 9. 27, 81, formam uma progressão geometrica crescente, e 81, 27, 9, 3, 1, uma progressão da mesma especie decrescente, a razão ou quociente constante na 1ª é $\frac{3}{1}=\frac{9}{3}$&$=3$; e na 2ª, $\frac{27}{81},=\frac{9}{27}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

Nas progressões crescentes a razão é um numero inteiro, nas decrescentes uma fracção; as progressões geometricas escrevem-se do modo seguinte ÷÷ 1; 3: 5; 27: 81 o que se lê, 1 está para 3, como 3 para 9, como 9 para 27, como 27 para 81.

(224) Theorema 1.º Na progressão geometrica um termo qualquer é igual ao 1.º termo multiplicado pela razão elevada á potencia indicada pelo numero de termos que precedem.

E' evidente, pela definição da progressão geometrica, que o 2.º termo é igual ao 1.º multiplicado pela razão, o 3.º igual ao 2.º multiplicado pela razão, ou ao 1.º multiplicado pelo quadrado da razão, o 4.º igual ao 3.º multiplicado pela razão, ou ao 1.º multiplicado pela terceira potencia da razão etc, logo um termo qualquer é igual ao 1.° multiplicado pela razão elevada a potencia indicada pelo numero de termos que o precedem.

(225) Theorema 2.° O producto dos extremos de uma progressão geometrica é igual ao producto de dous termos igualmente distantes dos extremos, ou ao quadrado do termo do meio, se a progressão é de um numero impar de termos. Seja dada a progressão ∺ 3: 6: 12 : 24: 48 , então $3\times48=24\times6=12^2$. Este theorema é evidente, pois um termo como 24 é igual ao 1.° multiplicado pela razão elevada a potencia marcada pelo numero de termos que o precedem , isto é igual a 3×2^3, e o termo 6 igualmente distante do outro extremo é igual ao 1° multiplicado pela razão elevada á potencia marcada pelo numero de termos que o precedem, isto é 3×2, e o producto destes termos é igual ao quadrado do 1.° termo multiplicado pela razão elevada á potencia marcada pelo numero de termos da progressão menos um, e o producto dos extremos é tambem igual a mesma quantidade, pois o primeiro termo multiplicado pela razão elevada a potencia marcada pelo numero de termos da progressão menos um é igual ao ultimo termo , e este multiplicado pelo primeiro termo é igual ao quadrado do primeiro termo multiplicado pela potencia da razão marcada pelo numero de termos da progressão menos um, de facto $3\times48=3\times3\times2^4=3^2\times2^4$, assim como $6\times24=(3\times2)\times(3\times2^3)=3^2\times2^4$. Do mesmo modo se prova que $12^2=12\times12=(3\times2^2)\times(3\times2^2)=3^2\times2^4$.

(226) Theorema 3.° O quociente da divisão dos extremos um pelo outro, é igual a razão elevada a potencia indicada pelo numero de termos menos um da progressão. Por exemplo nos 10 termos 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 , a razão é 2 , e o numero de termos menos 1, é 9, por tanto o quociente dos extremos $\frac{1024}{2}=512$, é igual á $2^9=512$. O maior termo de uma progressão é igual por (Theo 1) ao primeiro multiplicado pela razão elevada a potencia marcada pelo numero de termos da progressão menos 1, logo este maior termo dividido pelo 1.° dá por quociente a razão elevada a potencia marcada pelo numero de termos da progressão menos 1.

(227) Theorema 4.° A somma de todos os termos de uma progressão geometrica é igual ao producto do ultimo termo multiplicado pela razão diminuido do 1.° termo, e dividido pela razão menos um. Por exemplo na progressão 2 , 4 , 8 ,

16, 32, 64, a somma de todos os termos é igual a $\frac{(64\times2)-2}{2-1}$, pois a razão desta progressão é 2. A somma da progressão pode ser representada do modo seguinte; $2+2\times2+2\times2^2+2\times2^3+2\times2^4+2\times2^5=S$, multiplicando os dous termos desta igualdade pela razão 2, temos:

$2\times2+2\times2^2+2\times2^3+2\times2^4+2\times2^5+2\times2^6=S\times2$ —diminuindo desta ultima igualdade a primeira temos:

$(2\times2^6-2=S\times2-S$. logo—

$(2\times2^6)-2=(2-1)$ S.

dividindo ambos os termos por 2—1 temos

$$S=\frac{(2\times2^6-2}{2-1}$$

pois, $2\times2^6=(2\times2^5)\times2$, $=64\times2$, o ultimo termo multiplicado pela razão, e assim temos á final

$$S=\frac{(64\times2)-2}{2-1}$$

a mesma demonstração applica-se a qualquer outra progressão geometrica.

(228) Dos theoremas acima podemos tirar os meios de calcular uma das 5 cousas, o primeiro termo, o ultimo termo, a razão, o numero de termos, e a somma dos termos, quando 3 são conhecidas.

1.º Problema. O primeiro termo, a razão, e o numero de termos dados achar o ultimo, ou qualquer outro termo determinado—Éleva-se a razão a uma potencia indicada pelo numero de termos menos um, e este resultado multiplicado pelo primeiro termo dará o termo procurado; é esta regra uma simples applicação de Theorema 1.º

Seja dado o 1.º termo 2 d'uma progressão geometrica, a razão 2, e o numero de termos 13, para determinar o valor do ultimo termo. O ultimo termo é igual ao primeiro 2 multiplicado pela razão elevada a potencia indicada pelo numero de termos que o precedem, isto é no caso presente, que é 12 igual ao numero total de termos 13 menos 1.—assim pela regra temos $X=2\times2^{12})=8192$, ultimo termo procurado.

Exemplo 2.º Pede-se o 12.mo termo da progressão geometrica que tem por 1.º termo 3 e a razão 2—

resposta 6144

Exemplo 3.º O primeiro termo d'uma progressão é 1 a razão 2, e o numero de termos 23 pede-se o ultimo termo—

Resposta 4194304

Exemplo 4.º O 1.º termo d'uma progressão geometrica decrescente é 100, a razão $\frac{1}{2}$, o numero de termos 10, pede-se o ultimo termo—

resposta $\frac{25}{128}$

2º Problema. Os extremos e o numero de termos de uma progressão geometrica dados, achar a razão.

Divide-se o ultimo termo pelo primeiro, e extrahe-se deste quociente a potencia indicada pelo numero de termos menos um. O ultimo termo é igual ao 1º multiplicado pela razão elevada á potencia indicada pelo numero de termos menos um, logo o ultimo termo dividido pelo primeiro deve ser igual á razão elevada á potencia indicada pelo numero de termos menos um, e por consequencia, a razão é igual á raiz indicada pelo numero de termos menos um, do quociente da divisão dos extremos. Seja dada a progressão geometrica que principia por 1, e termina por 81, tendo 5 termos.

Seja x a razão, então —

$$81=1\times x^{5-1}=1\times x^4\text{ , e portanto } x^4=\frac{81}{1}=81\text{ , e}$$

$$X=\sqrt[4]{81}=3.$$

2.º Exemplo. Os extremos d'uma progressão geometrica são 2, e 138, e o numero de termos 7. pede-se a razão; temos—

$$X=\sqrt[7-1]{\frac{128}{2}}=\sqrt[6]{64}=2.$$

3.º Exemplo. Os extremos d'uma progressão de 4 termos são 2 e 250, pede-se a razão. resposta 5

3.º Problema. Dados os extremos d'uma progressão geometrica, e a razão, achar o numero de termos. Este problema não pode ser resolvido senão por meio dos logarithmos de que ainda não tratamos.

4.º Problema. Dados o 1.º termo, o ultimo termo, e a razão achar a somma de todos os termos de uma progressão geometrica—Multiplica-se o ultimo termo pela razão e divide-se a differença entre este producto e o 1.º termo pela differença entre 1 e a razão, o quociente será a somma.

Ou divide-se a differença entre 1 e uma potencia da razão indicada pelo numero de termos da progressão, pela differença entre 1 e a razão, e depois multiplica-se este quociente pelo 1.º termo, o resultado é a somma procurada Estas regras são simples applicações de theorema 3.º

Exemplo 1.º O primeiro termo de uma progressão e 1 e ultimo 2187, a razáo 3, pede-se a somma da progressão. Representando a somma por S, temos $S=\frac{(2187\times3)-1}{3-1}$ e por tanto effectuando a operação temos

$$\begin{array}{r} 2187 \\ 3 \\ \hline 6561 \\ 1 \\ \hline 6560 \mid 3-1=2 \\ 3280 \end{array}$$

a somma é igual a 3280—

Se em lugar de ser dado o ultimo termo conhecemos o numero 8 de termos da progressão, acharemos a somma do modo seguinte:

$S.=\frac{3^8-1}{3-1}\times1$ o que é evidente pois em lugar do ultimo termo podemos pôr o seu valor 1×3^7 e então temos

$$S=\frac{(1\times3^7)\times3-1}{3-1}=\frac{1\times3^8-1}{3-1}.$$

$$\begin{array}{r} 3^8=6561 \\ -1=\quad 1 \\ \hline 6560\ (3-1=2 \\ 3280 \\ \hline \end{array}$$

2.° Exemplo. Os extremos de uma progressão geometrica são 1, e 65536, e a razão 4, pede-se a somma

resposta 87381.

3.° Exemplo. Os extremos de uma progressão geometrica são 1024, e 59049, e a razão $1\frac{1}{2}$, qual a somma da progressão?

Resposta 175099.

5.° Problema. Achar dous ou mais meios geometricos entre dous numeros quaesquer.

Para achar dous meios geometricos entre dous numeros, divide-se o maior pelo menor, e a raiz cubica deste quociente será a razão dos termos da progressão, multiplicando o menor dos numeros pela razão acha-se o 1° meio, e este multiplicado pela razão dá o 2.°

Para achar qualquer numero de meios geometricos, divide-se o maior numero pelo menor, e extrahe-se a raiz indicada pelo numero de meios mais um deste quociente, o que será a razão, e então multiplicando o menor pela razão acha-se o 1° meio, e este multiplicado pela razão dá o 2° meio, e assim successivamente determinam-se todos os meios.

Esta regra é uma consequencia dos theoremas 1°, e 2°, pois, considerando os dous numeros dados como os extremos de uma progressão, è evidente que a progressão é composta de tantos termos quantos são os meios e mais dous que são os numeros dados, logo o ultimo termo é igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada a potencia indicada pelo numero de termos da progressão menos um, ou pelo numero de meios mais um, e assim a razão é igual a raiz do ultimo termo dividido pelo 1°, indicada pelo numero de meios mais 1.

1° Pede-se dous meios geometricos entre 3, e 24 pela regra acima temos $\sqrt[3]{\frac{24}{3}}=\sqrt[3]{8}$, $=2$, a razão é 2, portanto $3\times2=6$, é o 1° meio e, $6\times2=12$, é o 2° meio, e assim temos a progressão ∺3:6:12:24.

2° Exemplo. Pede-se dous meios geometricos entre 10, 100.

Resposta 21,54435, e 46,4159.

3° Exemplo. Pede se tres meios geometricos entre 6 e 1536

resposta 24, 96, 384.

4° Exemplo. Pede-se 4 meios geometricos entre 3, e 96

resposta 6, 12, 44, 48.

1ª Observação. Assim podemos sempre inserir um numero qualquer de termos medios geometricos entre dous numeros, isto é podemos sempre collocar entre dous numeros um numero dado de termos taes que a totalidade destes numeros forme uma progressão geometrica.

2ª Observação. Inserindo successivamente um mesmo numero de termos medios proporcionaes entre o 1.° termo e o 2.° d'uma progressão geometrica, entre o 2.° e o 3.°, etc. o todo d'estes numeros formará uma nova progressão geometrica. Seja dada a progressão ∺ 1: 81:6561 escrevendo sucessivamente entre 1 e 81, e entre 81 e 6561, tres meios geometricos acharemos a nova progressão ∺ 1:3:9:27:81: 242:729:218:6561— o que é evidente pois a razão entre 1, e 81, sendo a mesma que a razão entre 81, e 6561, segue-se, que a razão entre os 5 termos da nova progressão entre 1 e 81, é a mesma que a razão entre os 5 termos entre

81 e 6561—e é a 4.ª potencia da primeira, -pois a razão entre os 3 termos dados e $81=\frac{6561}{81}$, e a das novas é $\sqrt{81}$, e $\sqrt[4]{\frac{6561}{81}}$

CAPITULO IX.

DOS LOGARITHMOS

§ 1.º

Natureza dos logarithmos.

(229) Uma das mais importantes invenções é a dos logarithmos, e como servem para facilitar os calculos arithmeticos apresentaremos aqui algumas noções geraes, deixando para a Algebra a sua theoria completa.

Uma serie de termos taes que o 2.º é superior ao 1.º, da mesma quantidade que o 3.º é superior ao 2.º etc. forma uma progressão arithmetica. A razão da progressão e o excesso dos termos, ou a differença entre dous termos consecutivos.

Uma serie de termos taes que, o 1.º é contido no 2.º, o mesmo numero de vezes que o 2º, é contido no 3º, o 3º no 4.º etc. forma uma progressão geometrica. A razão da progressão é o numero de vezes que um termo contém o seu antecedente.

As duas series que acabamos de comparar são o germem da theoria das series, um dos ramos mais interessantes da alta algebra, e que muito tem occupado os mathematicos modernos.

A lei de uma serie é a maneira porque os seus termos são formados sucessivamente : assim a lei da progressão arithmetica consiste em que cada termo é igual ao que o precede mais a razão ; a lei da progressão geometrica consiste em que cada termo é igual ao que o precede multiplicado pela razão. O valor do termo geral da serie, isto é de um qualquer de seus termos, pode sempre ser expesso por meio do numero que denota a ordem que occupa na serie, e é um problema interessante, e muitas vezes difficil, exprimir os termos d'uma serie pela lei de sua formação. Na progressão arithmetica um termo qualquer é igual ao primeiro, mais a razão multiplicada pelo numero que indica a ordem do termo diminuido de uma unidade.

Na progressão geometrica um termo qualquer é igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada á uma potencia menor de uma unidade que o numero que indica a ordem do termo.

Examinando estes diversos resultados observamos entre estas duas progressões uma grande analogia. Tudo o que nas progressões arithmeticas se refere ás sommas, ou differenças, refere-se aos productos e aos quocientes nas progressões geometricas. Tudo que nas progressões arithmeticas se refere aos productos e aos quocientes, refere-se ás potencias e ás extracções de raizes nas progressões geometricas. Esta analogia, que já tinhamos notado no Capitulo antecedente conduzio Neper á invenção dos logarithmos, instrumento admiravel, que reduzindo à algumas horas o trabalho de muitos mezes, dobra a vida dos mathematicos, e dos astronomos, e poupa-lhes muitos erros, e disgostos inseparaveis de longos calculos.

(230) Para tornar esta anologia mais sensivel e ver como nasceram os logarithmos, é preciso escrever duas progressões, uma geometrica, outra arithmetica, a primeira principiando pela unidade, e a segunda por zero, e dispostas do modo seguinte—

	1	2	3	4	5	6	7	8	
$\div\div$	1:	3:	9:	27:	81:	243:	729:	2187.	Numeros.
$\div$	0.	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	Logarith.

Na 1.ª a razão é 3, e na 2.ª 2.

Comparando estas duas progressões é facil ver que ao producto de dous termos quaesquer da progressão geometrica corresponde a somma dos dous termos da progressão arithmetica correspondentes, e que ás potencias quaesquer de um termo qualquer da progressão geometrica, corresponde o producto do termo correspondente da progressão arithmetica multiplicado pelo expoente da potencia—

Por exemplo $3\times27=81$, e $8=2+6$.

Isto é 3 multiplicado por 27, é igual á 81, e 2 termo correspondente á 3, mais 6 termo correspondente á 27, são iguaes á 8 termo correspondente á 81.—Do mesmo modo $3\times3=3^2=9$. e $2\times2=4$, o quadrado de 3 é 9, e 2, termo correspondente á 3, multiplicado por 2, expoente da 2.ª potencia, é igual á 4, termo correspondente á 9.

Dando á cada termo da progressão arithmetica o nome de logarithmo do termo correspondente na progressão geometrica; o todo dos termos das duas progressões forma um systema de logarithmos.

(231) Podemos concluir do que temos dito que 1.º O logarithmo da unidade é sempre igual á zero, pois a progressão geometrica principia por 1, e a arithmetica por zero— 2.º Nas duas progressões, cada termo da progressão geometrica é igual à razão tomada como factor tantas vezes quantos termos ha que o precedem, e cada termo da progressão arithmetica é igual á razão repetida tantas vezes quantos termos ha que o precedem. Por consequencia—

1.º Os termos successivos da progressão geometrica são todas as potencias successivas da razão da progressão, e a ordem de cada termo é indicada pelo expoente da razão do termo augmentado de uma unidade. De facto a progressão geometrica acima pode ser representada por esta forma.

tem	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$1:$	$3:$	$3^2:$	$3^3:$	$3^4:$	$3^5:$	$3^6:$	$3^7:$	3^8 etc.

e o 6.º termo por exemplo sendo 3^5 é indicado pelo seu expoente 5 mais 1.

2.º Os termos successivos da progressão arithmetica correspondente são todos os multiplos successivos da razão da progressão, e a ordem de cada termo é indicada pelo multiplicador da razão do termo augmentado de uma unidade. De facto a progressão arithmetica acima pode ser representada do modo seguinte:

1	2	3	4	5	6	7	8
0.	2.	2×2.	2×3.	2×4.	2×5.	2×6.	2×7.

e o 6.º termo 2×5, é indicado pelo seu multiplicador 5 mais $1,=6$.

3.º Quando um termo da progressão geometrica occupa a mesma ordem que um termo da progressão arithmetica, estes dous termos são taes que o expoente da razão no termo da progressão geometrica, é igual ao multiplicador da razão na progressão arithmetica; e reciprocamente quando o expoente de um termo na 1.ª progressão é igual ao multiplicador da razão na 2.ª, estes dous termos occupam a mesma ordem nas duas progressões. Por exemplo o 5º termo da progressão geometrica é $3^4.=81$, e o mesmo termo da arithmetica é $2\times4=8$, e o expoente 4 do primeiro é igual ao multiplicador 4 do 2.º Os termos 3^5, e 2×5, das duas progressões tem o expoente de um igual ao multiplicador do outro, e estão ambos no 6.º lugar em suas progressões respectivas.

(232) Se multiplicarmos dous termos da progressão geo-

metrica um pelo outro, e se addicionarmos os dous termos correspondentes da progressão arithmetica, o producto dos dous termos da 1.ª progressão, e a somma dos dous termos da 2.ª serão termos correspondentes nas duas progressões.

O producto dos dous termos da progressão geometrica, contendo todos os factores do multiplicando e do multiplicador deve ser igual á razão tomada como factor tantas vezes quantas se acha nos dous termos multiplicados: por tanto o producto dos dous termos é uma potencia da razão da progressão geometrica, e o expoente da razão neste producto é igual á somma dos expoentes da razão nos dous termos multiplicados, logo, o producto dos dous termos é um termo da progressão geometrica. De facto multiplicando os 3.º e 5.º termos da progressão geometrica um pelo outro, temos $3^2 \times 3^4 = 3^6$. A somma dos dous termos da progressão arithmetica sendo igual a razão desta progressão repetida tantas vezes quantas o é em cada um dos dous termos addicionados, resulta que esta somma é um multiplo da razão da progrersão, e que o seu multiplicador é igual a somma dos multiplicadores dos termos sommados, logo a somma dos dous termos da progressão arithmetica é um termo da mesma progressão.

Se os dous termos que foram multiplicados na progressão geometrica, occupam a mesma ordem que os dous que foram addicionados na progressão arithmetica, os expoentes da razão nos dous termos da 1.ª progressão serão respectivamente iguaes aos multiplicadores da razão nos termos da 2.ª progressão, logo o expoente da razão no producto será igual ao multiplicador da razão na somma, por tanto o producto e a somma serão dous termos que occupam a mesma ordem nas duas progressões.

Estes raciocinios applicam-se, não só á dous termos como á um numero qualquer: por tanto multiplicando muitos termos entre si da progressão geometrica, e ajuntando os termos correspondentes da progressão arithmetica, o producto e a somma serão dous termos que se correspondem nas duas progressões.

Podemos pois concluir que para achar o producto de dous ou mais termos da progressão geometrica, basta ajuntar os termos correspondentes da progressão arithmetica, a somma corresponderá ao producto procurado. Assim temos demonstrado geralmente o que a inspecção simples das duas progressões nos tinha mostrado como uma propriedade d'ellas.

(233) Os termos da progressão arithmetica sendo os loga-

rithmos dos termos da progressão geometrica correspondentes, é evidente que o logarithmo do producto de dous ou mais termos da progressão geometrica, é igual a somma dos logarithmos destes termos. Por exemplo 16, logarithmo do producto 6561, dos termos 3, 27, e 81 da progressão geometrica é igual a somma dos logarithmos 2, 6, e 8 destes termos. Assim pois a somma dos logarithmos de dous numeros, é igual ao logarithmo do producto dos dous numeros.

Segue-se do que temos mostrado que o dobro do logarithmo de um numero é o logarithmo do quadrado d'este numero, o triplo é o logarithmo do cubo etc. em geral multiplicando o logarithmo de um numero por um factor qualquer obtemos o logarithmo de uma potencia deste numero denotada pelo factor.

Por exemplo 9^3; o triplo de 4 logarithmo de 9, é 12, e este é o logarithmo de $729=9^3$. O inverso destas propriedades são verdades faceis de provar.

(234). Tendo-se uma progressão indefinita geometrica, e uma outra arithmetica que corresponda á primeira, dispostas como as que apresentamos acima, é evidente que podemos redusir as multiplicações, divisões, elevações á potencias, e extracções de raizes, dos numeros contidos na progressão geometrica, á addições, subtracções, multiplicaveis, e divisões, dos numeros correspondentes na progressão arithmetica. Este modo de simplificar os calculos empregando os seus logarithmos, não é applicavel senão aos numeros que fazem parte da progressão geometrica, mas facil é extendel-o á todos os numeros comprehendidos entre os termos da progressão geometrica primitiva.

Para isto, supponhamos que as duas progressões saõ crescentes, e prolongadas indefinitivamente, inserindo successivamente um meio geometrico entre o 1.° e 2.° termos entre o 3.° e o 4.° etc. da progressaõ geometrica, e tambem um meio arithmetico entre os termos successivos da progressão arithmetica, temos duas novas progressões contendo um maior numero de termos, procedendo do mesmo modo como estas novas progressões, e continuando a mesma operação, podemos obter successivamente novas progressões, todas apresentando as mesmas propriedades, e nas quaes a differença entre dous termos consecutivos torna-se cada vez menor, de modo que podemos levar o calculo atè o ponto de obter duas progressões taes, que a differença entre dous termos consecutivos seja menor que toda e qualquer quantidade dada, Podemos por tanto conceber que todos os numeros maiores que a unidade façam parte de uma progressão geometrica crescente principiando pela unidade, e á qual corresponda uma progressão arithmetica crescente principiando por zero; e por tanto que todos os numeros superiorec á unidade tenham logarithmos. Tomando para razão da progressão geometrica um numero assàs pequeno, podemos formar uma progressão geometrica na qual os termos são mui aproximados em valor uns dos outros, e que por aproximação se achem incluidos n'ella os numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Supponhamos construida uma progressão geometrica cuja razaõ é taõ pequena que nella se achem inseridos mui aproximadamente todos os numeros inteiros, e que tenhamos formado uma taboada na qual se escreveram ao lado de cada um d'estes numeros os seus logarithmos, ou os termos correspondentes da progressão arithmetica; com uma taboada d'estas podemos simplificar muito todos os colculos arithmeticos—Pois.

1.º Para multiplicar dous numeros um pelo outro, basta procurar na taboa os logarithmos d'estes dous numeros, sommal-os, e procurar na mesma, o logarithmo igual á esta somma, o numero correspondente será o producto procurado. Para achar o producto de 3, e 8, procuramos os logarithmos de 3, e de 8, e sommando-os temos o logarithmo do producto.

$$\text{Log. } 3+\text{log. } 8=\text{log. } 24.$$

2.º Para dividir um numero por outro procuramos na taboa os logarithmos dos dous numeros, a differença entre elles é igual ao logarithmo do quociente

$$\text{log. } (\tfrac{24}{3})=\text{log. } 24-\text{log. } 3.$$

3.º O logarithmo de uma fracção se obtem do mesmo modo, tirando o logarithmo do denominador, do do numerador

$$\text{log. } \frac{24}{3}=\text{log. } 24-\text{log. } 3.$$

4. O logarithmo de uma potencia de um numero é igual ao producto do logarithmo do numero pelo gráo da potencia; e procurando-se na taboa entre os logarithmos este producto, o numero correspondente será a potencia procurada—Por exemplo $4^3=4\times4\times4$, logo $\text{log. } 4^3=\text{log. } 4+\text{log. } 4+\text{log. } 4=3\times \text{log. } 4$.

5. O logarithmo da raiz de um certo grào de um numero se obtem dividindo o logarithmo deste numero pelo gráo da

raiz, e procurando o quociente entre os logarithmos, o numero correspondente será a raiz procurada. Por exemplo seja dado o numero $\sqrt[3]{64}$.

$$64=\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{64}.$$

$\log.64=\log.\sqrt[3]{64}+\log.\sqrt[3]{64}+\log.\sqrt[3]{64}=3\log.\sqrt[3]{64}$; portanto o logarithmo de $\sqrt[3]{64}=\log.\frac{64}{3}$

Assim pois os calculos os mais complicados tornam-se mui simples pelo uso dos logarithmos. E' por tanto o emprego d'estes de grande utilidade, e devemos agora mostrar primeiro, como podemos calcular e dispôr uma taboa completa de logarithmos, e segundo, como podemos fazer uso d'ella nos calculos arithmeticos de todas as especies.

§ 2.º

Formação de taboas de logarithmos.

(235) Até agora as progressões por quociente e por differença que temos adoptado nas reflexões acima, eram arbitrarias, com tanto que principiassem uma pela unidade, outra por zero, e assim um mesmo numero podia ter uma infinidade de logarithmos. Mas como a grande vantagem de uma taboa de logarithmos é que com facilidade, n'ella dado um numero se ache o seu logarithmo, e o contrario, e para isto uma das condições sendo a uniformidade de systema, foi preciso que os mathematicos concordassem em adoptar duas progressões determinadas, uma geometrica, e outra arithmetica.

(236) Agora trataremos de expôr o systema de logarithmos geralmente adoptado, que é o que se deduz das duas progressões indefinitas seguintes—

$$\div\!\div 1:\ 10:\ 100:\ 1000:\ 10000:\ 100000:\ 1000000.$$
$$\div\ 0.\quad 1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.$$

Nestas duas series 1, 2, 3, 4, etc. são os logarithmos de 10, 100, 1000, 10000, etc.—

Uma vez feita esta convenção, resta achar os logarithmos dos numeros intermediarios, de 2, 3, 4 etc. que se acham entre 0 e 1, de 11, 12, 13, etc. que se acham entre 1, e 2 etc. Não podemos obter estes logarithmos senão por aproximação, porque os numeros naturaes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc. não entram rigorosamente n'uma mesma progressão geometrica, seja qual for a razão adoptada: mas como entre 1, e 100000, por exemplo podemos inserir um numero qualquer de meios geometricos, estes crescerão por gràos insensiveis, e os numeros naturaes poderão confundir-se com estes meios geometricos, e se ao mesmo tempo, tomando zero por 1.° termo da progressão arithmetica, e 5 pelo termo correspondente à 100000, na progressão geometrica, inserirmos entre 0, e 5, o mesmo numero de meios arithmeticos, estes serão os logarithmos dos meios geometricos correspoodentes que representam aproximadamente os numeros naturaes. Na pratica a aproximação é levada á 7 algarismos decimais.

Para inserir um grande numero de meios geometricos entre dous numeros é preciso extrahir uma raiz de um gráo muito elevado (228, prob. 5°), podemos porém evitar esta difficuldade por meio de extracções successivas de raizes quadradas. Por exemplo seja proposto achar os logarithmos de qualquer dos numeros naturaes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.—para isto, procuramos o meio geometrico entre 1, e 10, ou entre 10, e 100, ou quaesquer outros termos adjacentes da serie entre os quaes se acha o numero proposto; do mesmo modo procuramos entre o meio assim achado e o mais proximo extremo, um outro meio geometrico, e assim por diante até chegar ao numero cujo logarithmo procuramos, com a aproximação que tomamos por limite; isto feito procuramos um meio arithmetico da mesma ordem que o meio geometrico achado, e este será o logarithmo do meio geometrico correspondente. Para melhor intelligencia, seja proposto, por exemplo, achar o logarithmo de 9.

O numero 9 acha-se entre 1, e 10—devemos proceder do modo seguinte:

1.° O meio geometrico entre 1, e 10, é $\sqrt{10\times1}=\sqrt{10}=3,\ 1622777$.

O logarithmo de 1, é 0, e o de 10, é 1, o meio arithmetico entre 0, e 1, é $\frac{1\times0}{2}=\frac{1}{2}=0,\ 5$, logo devemos concluir que o logarithmo de 3. 1622777, é 0, 5.

2.° O meio geometrico entre 3, 1622777, e 10, é $\sqrt{10\times3,1622777}=5,6234132$.

O logarithmo de 5,1622777, é 0, 5, e o de 10, é 1, portanto o meio arithmetico entre 0, 5, e 1 sendo $\frac{1 \times 0,5}{2}=0,75$, o logarithmo de 5,6234132 é 0, 75.

3.° O meio geometrico entre 5, 6234132, e 10 é $\sqrt{10 \times 5,6234132}=7.4989422$.

O logarithmo de 5,62234132, é 0,75, e o de 10, é 1, por tanto o meio arithmetico entre 0,75, e 1, sendo $\frac{1 \times 0.75}{2}=0,875$, o logarithmo de 7,4989422, é 0,875.

4.° O meio geometrico entre 10, e 7,4989422 é $\sqrt{10 \times 7,4989422}=8,6596431$.

O logarithmo de 10, é 1, e o de 7,4989422, é 0,875, por tanto o meio arithmetico entre 1, e 0,875, sendo $\frac{1 \times 0,875}{2}=0,9375$ o logarithmo de 8,6596431, é 0,9375.

5.° O meio geometrico entre 10, e 8,6596481 é $\sqrt{10 \times 8,6596431}=9,3057204$.

O logarithmo de 10, é 1; e o de 8,6596431, é 0,9375, por tanto o meio arithmetico entre elles, sendo $\frac{1 \times 0,9375}{2}=0,96875$, o logarithmo de 9.3057204, é 0,96875.

6.° O meio geometrico entre 8,6596431, e 9,3057204, numeros entre os quaes se acha 9, é $\sqrt{8,6596431 \times 9,3057204}=$ 8,9768713.

O logarithmo de 8,6596431, é 0,9375, e o de 9.3057204 é 0,96875, portanto o meio arithmetico sendo— $\frac{0,9375 \times 0,96875}{2}=0,953125$, o logarithmo de 8,9768713 é 0,953125.

Continuando do mesmo modo, depois de 25 extracções, acharemos que o logarithmo de 8,9999998, é 0,9542425, o que pode ser tomado pelo logarithmo de 9, pois a differença è tão pequena que pode ser dispresada em todas as applicações sem o menor inconveniente. Do mesmo modo podemos calcular o logarithmo de todos os outros numeros. Estes calculos são laboriosos, mas não è preciso pratical-os senão para obter os logarithmos dos numeros primos, os dos outros numeros podendo ser deduzidos d'estes; por exemplo uma vez conhecido o logarithmo de 2, deduzimos o de 4, pois $4=2 \times 2$, e por tanto o logarithmo de $4=$log. de $2+$log. de 2; o de 6 se deduz do de 2, e de 3, pois $6=3 \times 2$, logo o logarithmo de $6=$log. $2+$log. 3. etc.

Apezar disto para achar os logarithmos de todos os numeros primos por este methodo teriamos de fazer calculos muito enfadonhos,e capazes de fatigar a paciencia de qualquer calculador; felizmente não precisamos de empregal-os para construir as taboas de logarithmos, temos outros methodos muito mais commodos, mas que não podemos expor aqui porque dependem de conhecimentos que só na Algebra poderemos obter: apresentamos aqui este methodo para mostrar como podemos construir uma taboa de logarithmos.

(237) As duas progressões acima tem sido adoptadas de preferencia pelas razões seguintes:

1.° Os logarithmos dos numeros 1, 10, 100, 1000, 10000, 1000000 etc. são 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. portanto os numeros comprehendidos entre 1, e 10, entre 10, e 100, entre 100, e 1000, etc. tem seus logarithmos comprehendidos entre 0, e 1, 1, e 2, 2, e 3 etc. estes numeros pois constam de duas partes uma inteira, e outra fraccionaria, avaliando-as em decimaes, a parte inteira de um logarithmo correspondente á um numero inteiro maior que a unidade, tem por parte inteira tantas unidades quantos algarismos tem o numero menos uma unidade. A parte inteira dos lagarithmos chama-se caracteristica.

Assim pois uma das vantagens do systema de logarithmos usual, è que podemos fixar a caracteristica do logarithmo de qualquer numero pela simples inspecção dos algarismos de que consta, ou pelo contrario sabendo qual é a caracteristica de um logarithmo, determinamos logo de quantos algarismos é composto o numero correspondente: por exemplo o numero 543, 21 tem duas unidades no seu logarithmo porque consta de tres algarismos, e acha-se por tanto entre 100, e 1000, e o seu logarithmo entre 2, e 3; o numero 3, 4771213, è o logarithmo de um numero de 4 algarismos, isto é de um numero entre 1000, e 10000. Por esta razão nas taboas de logarithmos basta inserir as partes decimaes dos logarithmos.

2.° Quando queremos multiplicar, ou dividir, um numero por 10, 100, 1000 etc. basta ajuntar ou tirar de seu logarithmo 1, 2, 3 etc. unidades; do que se segue que augmentando a caracteristica de um logarithmo, de 1, 2, 3 etc. multiplicamos por 10, 100 etc. e diminuindo a de 1, 2, 3 dividimos por 10, 100 etc.: por exemplo 3.4578; 34, 578; 345, 78; tem nos seus logarithmos a mesma parte decimal, somente as caracteristicas são 0, 1, 2.

(238) O systema de logarithmos formado pelas progressões

$$\div\div 1:10:100:1000:10000:100000 \text{ etc.}$$
$$\div\ 0\ \ 1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5 \text{ etc.}$$

não nos dá senão os logarithmos dos numeros maiores que a unidade.

Para achar os logarithmos dos numeros menores que a unidade seria preciso que estes numeros fizessem parte da progressão geometrica; ora n'esta progressão cada termo dividido pela razão 10 dá o termo antecedente, logo podemos fazer preceder o termo 1, pelos termos $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ e etc. de modo que a progressão geometrica n'este caso torna-se indefinita de um e outro lado do termo 1, ficando então representada por

$$\div\div:\frac{1}{10000}:\frac{1}{1000}:\frac{1}{100}:\frac{1}{10}:1:1\cdot 100:1000:\text{etc.}$$

os pontos que precedem $\frac{1}{10000}$, e seguem 1000, indicam que estes termos são precedidos, e seguidos de outros, e que o todo forma uma progressão geometrica sem limites de um e outro lado.

Para achar porém os logarithmos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc. não podemos deixar de fazer algumas convenções afim de podermos determinar os termos da progressão arithmetica que precedem 0.

Cada termo d'esta progressão diminuido da unidade dà o que precede, o termo 0 obtem-se tirando 1 de 1, e tirando de 0 a unidade devemos ter o termo que precede, e que corresponde à $\frac{1}{10}$; ora esta subtracção representada por 0—1, não pode ser effectuada, mas indica-se pela expressão —1, qne quer dizer uma subtracção á fazer, o termo que precede—1, obtem-se tirando de—1, a unidade, ou tirando 2 de 0, esta subtracção indica-se pela expressão 0—2, ou simplesmente—2, pela mesma razão os termos que precedem—2, são—3,—4,—5 etc. e assim formamos a progressão indefinita de ambos os lados.

$$\div.-5.-4.-3.-2.-1.-0.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \text{ etc.}$$

o termo 0 corresponde ao termo 1, da progressão geometrica: Os logarithmos negativos representam as fracções.

Para calcular estes logarithmos podemos empregar o mesmo methodo já indicado para calcular os dos numeros maiores que a unidade; isto é o de inserir meios geometricos entre 1, e $\frac{1}{10}$, entre $\frac{1}{10}$, e $\frac{1}{100}$ etc. e meios arithmeticos entre 0, e—1, entre—1, e—2 etc. Todas as propriedades já provadas á respeito dos numeros inteiros, e seus logarithmos, são applicaveis ás fracções, e seus logarithmos.

§ 3.º

Disposição e uso das taboas de logarithmos.

(239). Existem muitas taboas de logarithmos todas trazem uma introducção relativa á sua disposição particular. No fim d'este compendio acha-se uma taboa de logarithmos, e sobre ella temos que fazer algumas reflexões. Esta taboa contém os logarithmos de todos os numeros d'esde 1 até 10000, com 5 algarismos decimaes. Os numeros acham-se nas columnas marcadas N., e nas marcadas Log., as partes decimaes dos logarithmos dos numeros correspondentes na 1.ª columna; não se escreveram as caracteristicas porque è facil supprir esta falta, pois como sabemos, a caracteristica do logarithmo de um uumero qualquer inteiro, é representada por tantas unidades menos uma, quantos algarismos tem o numero. A differença entre os logarithmos de dous numeros inteiros consecutivos comprehendidos entre 1000, e 10000 acham se á direita na columna D no meio do espaço que separa estes logarithmos, o primeiro algarismo à direita d'estas differenças exprime cem millesimos da unidade: por exemplo, a differença entre os logarithmos dos numeros 3284, e 3285, é 14 cem millesimos, ou 0, 00014. As differenças entre os logarithmos dos numeros inteiros menores que 1000 não estão na taboa, porque como veremos não precisamos d'ellas.

(240) Para podermos fazer uso da taboa de lagarithmos é preciso saber resolver os dous problemas seguintes:

1.º Problema. Achar o logarithmo de um numero dado qualqurer.

1.º Caso: Quando o numero dado è inteiro, e menor que 10000, limite da taboa. Procura-se na columna N. o numero dado, defronte na columna Log. acha-se a parte decimal do seu logarithmo, a caracteristica determina-se, pelo numero de algarismos do numero dado. Por exemplo seja proposto achar os logarithmos de 5, de 23, e de 500, procuramos na columna N. estes numeros, e achamos na columna Log. as partes decimaes de seus logarithmos, as caracteristicas são de 5, 0, porque tem um só algarismo, de 23, 1, porque tem dous algarismos, de 500, 2, porque tem 3 algarismos, assim achamos que os logarithmos dos numeros dados são

Log. 5=0,69897
Log. 23=1,36173
Log. 5000=2,69897

Exemplos.

Seja proposto achar os logarithmos de 225, 340, 1023, 7341, 8753, 6789.

2.° Caso. Quando o numero dado é inteiro, mas maior que 10000 limite da taboa, a caracteristica determina-se facilmente pela regra já indicada, resta achar a parte decimal; a parte decimal do logarithmo de um numero não muda quando o dividimos por uma potencia de 10, portanto podemos sempre reduzir a questão á determinar a parte decimal do logarithmo de um numero comprehendido entre 1000, e 10000, collocando a virgula depois dos quatro primeiros algarismos á esquerda do numero cujo logarithmo procuramos, e considerando os que seguem como decimaes.

Seja proposto achar o logarithmo do numero 21598, a caracteristica d'este logarithmo é 4, porque o numero contem 5 algarismos, a parte decimal deste logarithmo é a mesma que a de 2159,8 pois o logarithmo do 21598=log. 2159,8×10)= log. 2159, 8+log. 10= log. 2159+1, assim para achar o logarithmo do numero 21598, basta procurar na taboa a parte decimal do logarithmo do numero 2159,8, achamos n'ella a parte decimal do logarithmo de 2159, que é 33425, para achar o logarithmo de 2159,8 é preciso ajuntar á este logarithmo uma fracção relativa á sua parte decimal.

Para este fim é preciso adoptarmos o principio seguinte, que a differença entre dous numeros, é proporcional a differença entre os logarithmos d'estes dous numeros. Veremos na algebra que esta hypothese é quase exacta, e que o erro é menor a medida que os numeros são maiores. A differença entre os logarithmos dos numeros 2159, e 2160, sendo 20 cem millesimos, ou 0, 000 20, faremos a seguinte proporção.

Como a differença entre os dous numeros.

Está para a differença entre os logarithmos.
Assim está a parte decimal do numero.
Para a parte proporcional do logarithmo.
No exemplo acima temos a seguinte proporção:
1: 0,00020:: 0.8: X, donde deduzimos

$$X\times 1=0,00020\times 0,8, \text{ isto é } X=0,00016.$$

Assim pois ajuntando á 3.33425, logarithmo de 2159, a quantidade 0,00016, a somma 3,33441, é o logarithmo de 2159,8, ora o logarithmo de 21598=log. 2159, 8+1, por tanto o logarithmo de 21598=3,33441+1=4,33441.

Seja proposto achar o logarithmo de 21598000; temos, log. 21598000=log. (21598×1000)=log. 21598+log, 1000= log.21598+3.=4,33441+3=7,33441.

Em geral para achar o logarithmo de um numero terminado por cifras, basta achar o logarithmo do numero sem as cifras finaes, e augmentar a caracteristica d'este ultimo logarithmo de um numero de unidades igual ao numero de cifras dispresadas.

Exemplos.

1.° Pede-se o logarithmo de 20345.

Este numero sendo superior á 10000, separamos o ultimo algarismo á direita, o que vem á ser o mesmo que dividil-o por 10, e procuramos na taboa o logarithmo de 2034, 5; para isto procedemos do modo seguinte:

Log. 2034=3.30835.
differença entre log. 2034, e 2035=21.
1: 0,00021.:: 0, 5:x=0.00021×05=0,00010,
Por tanto o logarithmo de 2034,5=3.30845.
e o logarithmo de 20345=4.30845.

2,° Pede-se o logarithmo de 35468

4.54985

3.° Pede-se o logarithmo de 4589.35.

5.66175.

4.° Pede-se o logarithmo de 3425,789.

3.° Caso, logarithmo de uma fracção, este acha-se tirando o logarithmo do denominador, do do numerador.

Por tanto se a fracção é maior que a unidade, o logarithmo é positivo, mas se é menor que a unidade o logarithmo é negativo.

Exemplo 1.° Seja proposto achar o logaritgmo de $\frac{3478}{9}$, para isto calculamos os logarithmos de 3478, e de 9. estes são 3,54133, e 0.55424, tirando o 2.º do 1.º temos 3,54133—0,55424=2,58709, que è o logarithmo de $\frac{3478}{9}$

Exemplo 2.º Seja proposto achar o logarithmo de $\frac{9}{3478}$ temos pela mesma regra

$\log. \frac{9}{3478} = \log. 9 - \log. 3478 = 0,55424 - 3,54133$
$= -2,58709.$

4.º Caso. Os logarithmos das decimaes. Um numero decimal sendo igual á uma fracção ordinaria cujo numerador é o numero decimal abstrahindo a virgula, e cujo denominador é a unidade seguida de tantas cifras quantos algarismos decimaes ha á direita da virgula, segue-se que podemos achar o logarithmo de um numero decimal procurando 1.º o logarithmo do numero inteiro que resulta da suppressão da virgula no numero proposto, e 2.º diminuindo este logarithmo de tantas unidades quantos algarismos decimaes tem o numero, pois o logarithmo da unidade seguida de cifras é um numero composto de tantas unidades quantas são estas cifras.

Exemplo 1.º Seja proposto achar o logarithmo de 21,598, temos $\log. 21,598 = \log. \left(\frac{21598}{1000}\right) = \log. 21598 - \log. 1000 =$ $\log. 21598 - 3$, basta pois achar o logarithmo de 21598, e depois diminuil-o de 3. O logarithmo de 21598, é 4,33441, logo o logarithmo de 21,598, é 4,33441—3=1.33441.

O logarithmo de um numero decimal maior que a unidade se obtem tomando por caracteristica tantas unidades menos uma quantos são os algarismos da parte inteira, e como a parte decimal do logarithmo de um numero não muda quando se remove a virgula para a direita, e para a esquerda, porque então nada se faz senão multiplical-o ou dividil-o por 10, para achar esta parte decimal do logarithmo de um numero decimal superior á unidade basta determinar a parte decimal do logarithmo de um numero, comprehendido entre 1000, e 10000, limite da taboa, transpondo a virgula para depois dos 4 primeiros algarismos á esquerda do numero dado:

Por exemplo. Seja proposto achar o logarithmo de 21.598, a caracteristica é 1, e a parte decimal do logarithmo é a mesma que a do logarithmo de 2159, 8, procura-se pois a parte decimal do numero 2159, 8, na taboa, e então concluimos que o logarithmo de 21,598, é 1,33441.

Exemplo 2.º Seja proposto achar o logarithmo de 0,0021598, temos aqui uma decimal menor que a unidade.

$\text{Log.}\ 0{,}0021598=\text{log.}\ \frac{21598}{10000000}=\text{log.}21598-\text{log.}10000000$ $=\text{log.}\ 21598-7$. O logarithmo de 21598, é 4,33451, por tanto

$$\text{log.}\ 0{,}0021598=4{,}33441-7=-2{,}66559.$$

Nos casos em que os numeros decimaes são menores que a unidade, representando fracções, os logarithmos são negativos; podemos porém dar uma outra forma á estes logarithmos muito mais commoda. Por exemplo o log. de 0,0021598 é igual á 4.33441 -7, ora $4{,}33441-7=4-7+0{,}33441,=-3+0{,}33441$ o que se exprime de modo seguinte $\bar{3}{,}33441$ o signal— por cima da caracteristica indica que só ella è negativa, e a parte decimal positiva, de modo que 0,33441 deve ser ajuntado a -3. Por tanto

$$\text{log.}\ 0{,}0021598=-2{,}6559,\ \text{ou}=\bar{3},\ 33441,$$

e assim o logarithmo de uma decimal menor que a unidade pode tomar duas formas differentes.

1. Quando queremos que o logarithmo seja inteiramente negativo. Procuramos a parte decimal do logarithmo do numero inteiro que resulta da suppressão da virgula na fracção decimal dada, e tiramos esta parte decimal de 100000, o que vem a ser o mesmo que tirar de 10, o primeiro algarismo à direita, e todos os mais de 9, o resto é a parte decimal do logarithmo; a caracteristica deve conter tantas unidades quantas cifras ha entre a virgula e o primeiro algarismo decimal significativo: Exemplo. Seja proposto achar os logarithmos das fracções decimaes, 0,21598, 0,021598, e 0,00021598.

Procuramos a parte decimal do logarithmo do numero 21598, que é 33441, e tirando este numero de 100000, o resto 66559, é a parte decimal dos logarithmos das fracções dadas, as caracteristicas são, 0, 1, 3, por tanto os logarithmos das tres fracções decimaes dadas são

$-0{,}66559$, $-1{,}66559$, $-3{,}66559$.

2° Quando queremos que só a caracteristica seja negativa. Procuramos a parte decimal do logarithmo do numero inteiro que resulta da suppressão da virgula na fracção decimal, e damos á esta parte decimal uma caracteristica negativa que contenha tantas unidades mais uma, quantas cifras ha entre a virgula, e o primeiro algarismo decimal significativo do numero.

Exemplo. Seja proposto achar os logarithmos dos numeros—

0,21598, 0,021598, 0,0002159 etc.

Procuramos a parte decimal do logarithmo de 21598, que é, 33441, e determinamos as caracteristicas 1, 2, 4, e assim os logarithmos pedidos são

$$\bar{1},\ 33441,\quad \bar{2},\ 33441,\quad \bar{4},\ 33441$$

O emprego dos logarithmos cuja caracteristica só é negativa offerece esta vantagem, sejam quaes forem as potencias de 10 pelas quaes se multiplica, ou se divide um numero, os numeros maiores ou menores, que a unidade que resultam d'estas operações, tem logarithmos cuja parte decimal é constantemente a mesma, o que não acontece fazendo uso dos logarithmos inteiramente negativos; assim pois quando numeros inteiros não differem senão por cifras à direita, e quando numeros decimaes não differem senão pela posição da virgula, os logarithmos d'estes numeros tem a mesma parte decimal. Por exemplo o logarithmo de 2159 sendo 3,33425, os logarithmos de 21590000, 21, 59, 0,02159, e 0,00000215 são

$$7.33425,\quad 1.33425,\quad \bar{2}.33425,\ \text{e}\ \bar{6},33425$$

Problema 2.º Achar á que numero corresponde um logarithmo dado.

1.º Caso. Quando o logarithmo é positivo; n'este caso é evidente que pertence à um numero maior que a unidade, a caracteristica augmentada de uma unidade indica quantos algarismos tem a parte inteira do numero à que corresponde o logarithmo dado:

1.º Quando a caracteristica é 3, o numero á que pertence o logarithmo dado acha-se comprehendido entre 1000, e 10000. Para determinar este numero procuramos na columna Log. a parte decimal do logarithmo, quando ella alli se acha, o numero que corresponde na columna N. é o procurado. Por exemplo seja proposto achar o numero correspondente ao logarithmo 3,00043, procuramos entre os logarithmos dos numeros de 4 algarismo este, e achamos que corres ponde á 1001.

Quando porém a parte decimal do logarithmo dado não se acha na taboa, cahe necessariamente entre as partes decimaes dos logarithmos de dous numeros inteiros consecutivos de 4 algarismos, o menor d'estes dous numeros inteiro exprime a parte inteira do numero procurado, pois então este é necessariamente um numero decimal; para achar a parte decimal, toma-se a differença entre os logarithmos dos numeros entre os quaes se acha o procurado, e tambem a differença entre este numero, e entre o menor dos logarithmos, e o logarithmo dado, e então fazemos a seguinte proporção.

Como a differença dos logarithmos tabulares. Está para a differença dos numeros. Assim está a differença entre o logarithmo dado, e o menor dos tabulares. Para a differença numeral correspondente. Esta differença ajuntada ao menor numero, dá o numero procurado correspondente ao logarithmo dado. Por exemplo seja proposto determinar à que numero corresponde o logarithmo 3.33441. A parte decimal não se achando na columna Log. que contem as partes decimaes dos logarithmos dos numeros inteiros de 4 algarismos, tomamos as partes decimaes 33425, e 33445, entre as quaes se acha 33441, e que pertencem aos numeros 2159, e 2160, portanto o logarithmo 3,33441, pertence ao numero 2159, augmentado de uma quantidade incognita x, menor que a unidade. Para calcular esta incognita tomamos na columna D. a differença 20 cem millesimos, ou 0,00020, entre os logarithmos de 2159, e 2160, tirando o menor logarithmo do logarithmo dado achamos a differença 3,33445—3,33425= 0,00016, e fazemos a seguinte proporção

$$0{,}00020 : 1 :: 00016 : x \text{ ou}$$
$$20 : 1 :: 16 : x$$
$$20 \times x = 16$$
$$x = \frac{16}{20} = 0{,}8$$

O logarithmo 3.33441, pertence ao numero 2159+0,8= 2159,8.

2.º Quando a caracteristica do logarithmo não é 3, podemos sempre redusir este caso ao primeiro, augmentando ou diminuindo a caracteristica de tantas unidades quantas são precisas para que fique sendo 3.

Procura-se então o numero á que pertence este novo logarithmo, este numero é igual ao numero procurado multiplicado, ou dividido por uma potencia de 10, indicada pelo numero que se augmentou, ou se tirou á caracteristica. E' pois facil dedusir o numero correspondente ao logarithmo dado, o que se faz separando pela virgula tantos algarismos decimaes quantos são os numeros ajuntados, ou diminuidos na caracteristica. Por exemplo: Seja proposto achar á que numero pertence o logarithmo 1,33425. Ajunta-se 2 á caracteristica 1, e procura-se o logarithmo 3,33425 na taboa, o numero correspondente é 2159, que deve ser dividido por 10^2, ou por 100, o que se faz separando pela virgula dous algarismos, logo 21,59 é o numero procurado.

Seja proposto achar á que numero pertence o logarithmo 7.33441, diminuindo a caracteristica 7 de 4, fica reduzido à 3,33441, então procurando na taboa o numero correspondente á este logarithmo acha-se 2159, 8, que deve ser multiplicado por 10^4, ou por 10000, o producto que é 21598000 é o numero á que corresponde o logarithmo dado 7.33441.

Exemplos.

1.º Qual o numero correspondente ao logarithmo 1.53288
resposta 34, 11

2.º A' que numero corresponde log. 5, 18412
resposta 1528

3.º A' que numero corresponde o logarithmo 6.18696
resposta 1538000.

Todos os calculos precedentes reduzem-se à suppor que a caracteristica do logarithmo proposto é 3, e à procurar o numero que corresponde á este logarithmo, e á separar depois, pela virgula, tantos algarismos mais um, á partir da esquerda d'este numero quantas unidades tem a caracteristica do logarithmo dado, quando o numero de algarismo não é sufficiente ajuntam-se á direita as cifras precisas, e supprime-se a virgula quando não é seguida de algarismos decimaes.

As taboas não dão as fracções que correspondem aos logarithmos dados senão em decimaes, mas querendo podem ser reduzidas à fracções ordinarias.

2.º Caso. Quando os logarithmos dados são negativos inteiramente; Ajuntam-se ao logarithmo dado tantas unidades quantas bastam para que a caracteristica seja positiva, e igual á 3, procura-se depois o numero á que corresponde este novo logarithmo, e então divide-se por uma potencia de 10 indicada pelo numero de unidadas ajuntadas ao logarithmo dado, o que vem á ser o mesmo que adiantar para a esquerda a virgula de tantos algarismos quantas unidades se ajuntaram ao logarithmo dado, o resultado exprime o numero correspondente.

Exemplo. Seja proposto determinar á que numero pertence o logarithmo—2,66559.

Ajuntamos á este logarithmo 6, e temos 6—2,66559= 3, 33441, procuramos então na taboa o numero correspondente, que é 2159, 8, este numero é igual ao procurado multiplicado por 10^6, assim dividindo por 10^6, achamos o numero procurado correspondente, á—2,6655, dividimos 2159, 8 por 10^6, recuando a virgula para a esquerda de modo á separar para a direita 6 algarismos, por tanto o numero procurado é 0, 0021598.

Caso 3. Quando a caracteristica só é negativa. Ajuntam-se ao logarithmo dado unidades bastantes para que a caracteristica torne-se positiva, e igual á 3; procura-se á que numero pertence este nove logarithmo, e divide-se o numero por uma potencia de 10 indicada pelo numero das unidades que foram ajuntadas á caracteristica, isto é adianta-se a virgula decimal de tantos algarismos para a esquerda quantas unidades foram ajuntadas á caracteristica; o resultado exprime o numero à que corresponde o logarithmo dado.

Exemplo. Seja proposto achar á que numero corresponde o logarithmo $\overline{3}, 33441$; $\overline{3}, 33441 = -3+0, 33441$, por tanto ajuntando 6 unidades à $\overline{3}, 33441$, o resultado è $6-3+0, 33341 = 3+0,33441$, ou emfim 3,33441, este novo logarithmo corresponde ao numero 2159,8, que ê igual ao numero procurado multiplicado por 10^6, logo este se acha, dividindo 2159, 8, por 10^6, o resultado é 0,002159 8, que é o numero correspondente ao logarithmo $\overline{3}, 33441$.

(241). As explicações precedentes são sufficientes para podermos fazer todos os calculos por meio dos logarithmos, sabemos sempre calcular o logarithmo de um numero dado qualquer, e achar á que numero corresponde um logarithmo dado. Reduzimos estes calculos, em todos os casos, á operar sobre os logarithmos dos numeros comprehendidos entre 1000, e 10000, porque assim chegamos ao mais alto gráo de exactidão de que é susceptivel a nossa taboa de logarithmos. Procedendo assim.

1.° Quando queremos achar o logarithmo de um numero, a proporção indicada (n. 240, caso 2.°) não dá senão com millesimos da unidade do logarithmo pedido; isto é, obtemos o logarithmo procurado á menos de um cem millesimo da unidade.

2.° Os nossos logarithmos tabulares não tendo senão 5 decimaes não conhecemos os seus valores senão á menos de meio cem millesimo da unidade; o erro que resulta das decimaes dispresadas é tal, que quando se quer achar o numero ao qual corresponde um logarithmo dado cuja caracteristica é 3, a taboa não fornece as vezes senão os quatro primeiros algarismos á esquerda do numero pedido, isto é, que em certos casos a proporção indicada não fornece um só dos algarismos decimaes do numero ao qual pertence o logarithmo dado.

De facto a menor differença entre dous logarithmos tabulares consecutivos, sendo 0,00004, vemos que um erro de 0,00004 n'um logarithmo basta para produzir um erro de uma unidade no numero correspondente, por tanto um erro de 0,00001 n'um logarithmo, pode introduzir no numero correspondente um erro de $\frac{1}{4}$, ou de 0, 25, um meio millesimo de erro no logatithmo dado pode pois introduzir um erro no numero de 0, 125. Assim pois o erro que pode se introduzir nos numeros aos quaes pertencem os logarithmos calculados, pode ser de pouco mais ou menos 0, 125, influe pois algumas vezes no algarismo das decimas da unidade do numero procuredo.

Quando queremos achar o numero à que pertence um logarithmo dado cuja caracteristica não é igual á 3, augmentamos ou diminuimos esta caracteristica de um certo numero de unidades de modo que o novo logarithmo seja positivo e affectado da caracteristica 3, e então procuramos o numero á que pertence, acabamos de mostrar que não podemos contar como exactos senão os 4 primeiros algarismos á esquerda do numero que achamos pela taboa, depois dividimos ou multiplicamos este ultimo por uma potencia de 10 indicada pelo numero de unidades de que o logarithmo dado foi augmentado, ou diminuido, o resultado é um valor aproximado do numero à que pertence o logarithmo dado: esta aproximação é tal que não devemos contar como exactos senão os 4 primeiros algarismos significativos á esquerda do resultado, ou por outra o erro é menor que uma unidade da ordem indicada pelo ultimo dos 4 algarismos significativos á principiar pela esquerda.

Quando este grão de aproximação não é sufficiente, devemos fazer uso de outras taboas mais extensas, isto é calculadas com um maior numero de decimaes, e abrangendo dentro de seus limites mais numeros. As melhores taboas são as de Callet, de Delambre, e de Hutton.

§ 4.°

Calculos por meio de Logarithmos.

(242) Multiplicação. Para multiplicar dous, ou mais numeros, uns pelos outros, por meio de logarithmos, procede-se do modo seguinte.

Tiram-se da taboa os lagarithmos dos factores, addicionam-se estes logarithmos, e procura-se na taboa o numero que corresponde á somma, este numero é o producto dos factores dados.

Devemos notar, que fazendo uso dos logarithmos só negativos na caracteristica, que o que se leva da parte decimal para a parte inteira na addição dos logarithmos, é sempre positivo, em quanto que a parte inteira, ou as caracteristicas, podem ser positivas, ou negativas.

Exemplo 1.° Seja proposto multiplicar 93, por 3514.

	Numeros.	Logarithmos.	
	93=	1.96848	
	3514=	3,54580	
Prod.	326800=	5,51428	Somma.

Procuram-se na taboa os logarithmos de 93, e de 3514, addicionam-se estes dous logarithmos, e depois procura-se na taboa o numero que corresponde à somma 5, 51428, este numero é o producto procurado, numero que não é exacto senão nos 4 primeiros algarismos a esquerda, quando o numero excede o limite da taboa que é 10.000; esta aproximação é muito sufficiente quando se trata de numeros decimaes, em todos os casos.

Exemplo 2.° Qual o valor de 387×1225?

Numeros.	Logarithmos.
387=	2.58771
1225=	3.08814
474077=	5.67585

3.° Exemplo. Qual o producto $3,4567892\times1,234567892$?

Numeros	3,4567892	=0, 53867
	1,23456789	=0, 09152
	4,2677	=0, 62919

4.º Exemplo. Qual o producto de 112,246×13,958?

	Numeros	Logarithmos
	112, 246	=2. 94917
	13, 958	=1. 14482
	1563.128	=3, 19399

5.º Exemplo. Multiplique-se 46,7512 por 0, 3275.

	46, 7512	=1. 66988
	0, 3275	=$\bar{1}$. 51521
Producto	15, 31102	=1: 18509

(243.) Divisão. Do logarithmo do dividendo tira-se o logarithmo do divisor, e o numero correspondente á esta differença, é o quociente procurado.

Muda-se o signal da caracteristica do divisor de positivo para negativo, ou de negativo para positivo.

1.º Seja proposto dividir 24163, por 4567.

Dividendo	2416	= 4.38315
Divisor	4567	= 3.65963
Quociente	5,2975.	== 0.72352

2.º Exemplo. Divida-se 37. 149, por 523,76.

Dividendo	37. 149	= 1. 56994
Divisor	523, 76	= 2. 71913
Quociente	0,070927	= $\bar{2}$.85081

3. Divida-se 0,06314, por 0,007241.

Dividendo	0,06314	=$\bar{2}$, 80030
Divisor	0,007241	=$\bar{3}$, 85980
Quociente	8,7196	=0. 94050

Quando a caracteristica é negativa , e que toma-se 1 emprestado para poder subtrahir a parte decimal do divisor do dividendo, a caracteristica em lugar de diminuir de uma unidade augmenta pelo contrario,—2+0,80030 , é o mesmo que—3+1, 80030—

Exemplo 4.º Divida-se 0,7438, por 12,9476.

Dividendo	0,7438	= $\bar{1}$, 87146
Divisor	12,9476	= 1, 11218
Quoc.	0,057446.	= $\bar{2}$, 75928

(244). Involução, ou elevação á potencias. Tira-se da taboa o logarithmo do numero dado, multiplica-se este logarithmo pelo expoente da potencia pedida: procura-se então na taboa qual o numero que corresponde á este producto, este numero é a potencia procurada.

Quando se multiplica um logarithmo com caracteristica negativa por um numero positivo, o producto é negativo, mas o que se leva da parte decimal do logarithmo é positivo, e por tanto deve ser subtrahido da caracteristica, e não addicionado.

1.º Exemplo. Qual é a 2.ª potencia de 2, 5791.

	Numero.	Logarithmo.
Raiz	=2, 5791	=0, 41146
Expoente		2
Potencia	6, 6515	=0, 82292

2.º Exemplo. Qual é o cubo de 3, 07146.

		Logarithmo.
Raiz	3, 07146	=0, 48734
Expoente		3
Potencia	28,9747	=1: 46202

3.º Exemplo. Pede-se a 4.ª potencia de 0,09163.

Raiz	0, 09163	$=\bar{2}$, 96204
		4
Pot.	0,0,00070495	=5, 84816

Exemplo 4.º Qual a 5.ª potencia de 6425.

6425.	=3, 80787
	5
10948461	=7. 03935

Exemplo 5.º Qual a 365 potencia de 1.0045.

	1;0045	=0, 00195
Expoente		= 365
		975
		1170
		585
	5,14935	=0, 71175

(245) Evolução. Toma-se na taboa o logarithmo do numero dado, divide-se este logarithmo pelo expoente da raiz, o numero que corresponde ao quociente é a raiz procurada.

Quando a caracteristica do logarithmo é negativa, e não contém exactamente o divisor sem resto, augmenta-se á caracteristica de um numero sufficiente para tornal-o divisivel pelo expoente da raiz, levando as unidades assim tomadas como tantos dez para o lado esquerdo da decimal, e depois dividindo como inteiros.

1.º Exemplo. Pede-se a raiz quadrada de 365.

Numero.	Logarithmo.
365	=2,56229 (2
19.0496	=1.28114, 5

Tira-se da taboa o logarithmo de 365, divide-se este logarithmo por 2, e procura-se na taboa o numero correspondente ao quociente, este numero é a raiz procurada.

2.º Exemplo. Pede-se a raiz cubica de 12345.

Numero.	Logarithmo.
12345	=4,09149 |3.
Raiz 2,1146.	=1.36383

3.º Exemplo. Pede-se a 10.^{ma} raiz de 2.

Numero 2 =0, 30103 (10
Raiz 1,071775 =0, 03010

4.º Exemplo. Pede-se a raiz 365^{ao} de 10,45.

Numero 10,45=0, 01912 (365
Raiz 1.000121 =0, 00005

5.º Exemplo. Pede-se a raiz quadrada de 0,093.

0,093 $=\overline{2}$, 96848 (2
0,304950 $=\overline{1}$, 48424.

6.º Exemplo. Pede-se a raiz cubica de 0.00048.

0,00048 $=\overline{4}$, 68124 (3
0,0782973 $=\overline{2}$, 89374

Aqui a caracteristica $\overline{4}$, não sendo divisivel por 3, augmenta-se de $\overline{2}$, e fica sendo divisivel por 3, pois é então $\overline{6}$, mas como a parte negativa augmenta-se de 2, é preciso ajuntar á parte positiva 2, e consideramos o primeiro algarismo da parte decimal como 26 em vez de 6, o que é evidente, pois $-4+0,68124$ é o mesmo que $-6+2,68125$.

Complementos arithmeticos.

(246). O resto que se obtem tirando um logarithmo de 10 é o que se chama complemento arithmetico d'este logarithmo.

Por exemplo, o logarithmo de 2 sendo 0,30103, o complemento arithmetico d'este logarithmo é $10-0,30103=9.69897$.

Para obter o complemento arithmetico de um logarithmo, tira-se de 10, o primeiro algarismo significativo á direita do logarithmo dado, e tira-se de 9 cada um dos outros algarismos. Para indicar o complemento arithmetico de um logarithmo escreve-se um C antes, assim C log. 2, quer dizer complemento arithmetico do logarithmo de 2.

(247). Quando queremos subtrahir de um numero dado um logarithmo, se em lugar d'effectuar esta subtracção, ajunctamos ao numero dado, o complemento arithmetico do logarithmo, a somma é igual a differença procurada augmentada de 10 unidades. Esta somma é muito grande em comparação á differença procurada não só do logarithmo que devia ser tirado do numero, mas tambem do complemento que se ajuntou, e conforme a difinição do complemento, a somma destes ultimos numeros é igual á 10, assim a somma excede a differença de 10.

Por exemplo seja proposto tirar de 3,54133, o logarithmo 0,95424, se em lugar de fazer esta subtracção, ajuntamos á 3,54133, o complemento arithmetico de 0,95424, que é 9,04576, o resultado 12.58709, será maior que a differença procurada de 10, portanto diminuindo 12,58709, de 10, temos a differença pedida.

$$3,54433-0,95424=2.58706 \quad \text{é}$$
$$3,54133-0,95424=3,54133+10-0,95424-10$$

e como $10-0,95424=9,04576$, complemento arithmetico segue-se que

$$3,54133-0,95424=3,541336+0,95424-10$$

(248). Pelos complementos podemos sempre redusir as subtracções á addições.

O logarithmo d'uma fracção acha-se ajuntando ao logarithmo do numerador o complemento arithmetico do logarithmo do denominador, e tirando d'esta somma 10. Por exemplo o logarithmo de $\frac{3478}{9}$ acha-se do modo seguinte:

$$\log.\ 3478 + C\ \log.\ 9 - 10$$

Seja proposto dividir 37.149, por 523,76,

Log.	37,149	=1, 56994
Com.Log.	523, 76	=7, 28087
		8, 85081
		—10
		0.070927=$\overline{2}$, 85081

(249). Temos concluido o que tinhamos á dizer á respeito de logarithmos n'este compendio, a utilidade dos logarithmos é immensa; 1.° para facilitar as multiplicações, e divisões de numeros decimaes de muitos algarismos, 2.° para calcular com menos trabalho as potencias dos numeros, 3.° para se extrahir as raizes, e esta é a sua principal vantagem, pois pelos meios ordinarios é já um calculo enfadonho a extracção das raizes do 3.° gráo de um numero de muitos algarismos, e quanto á das mais raizes é tão trabalhoso o calculo, que não podemos sem muita perda de tempo fazel-o, pelos logarithmos nada ha de mais facil do que extrahir uma raiz qualquer. 4.° para resolver todos os problemas relativos as proporções e progressões, redusindo as multiplicações, e divisões à addições, e subtracções, as potencias, e extracç ões de raizes, à multiplicações, e divisões. Por exemplo no (228 Prob. 2 exemplo 1.), resolvemos, a seguinte igualdade $X=\sqrt[4]{81}$, por meio da extracção de raizes quadradas, por logarithmos podemos resolver a mesma questão pela formula seguinte:

$$\log.\ x = \frac{\text{Log. } 81}{4}$$

no mesmo numero Problema 3.°, dissemos que este não podia ser resolvido se não por meio dos logarithmos, agora devemos mostrar como podemos resolvel-o; sejam dados os extremos de uma progressão geometrica, 3, e 192, e a razão 2, para achar o numero de termos; representando o numero de termos por x, temos a seguinte igualdade, o ultimo termo 192, é igual ao primeiro termo 3, multiplicado pela razão 2, elevada á potencia representada pelo numero de termos menos 1. logo $192=3\times2^{x-1}$.

$$\text{logarith. } 192=\text{log. } 3+\text{log. } 2\times X-1$$
$$\text{logarith. } 192-\text{log. } 3=\text{log. } 2\times X-1$$
$$\frac{\text{logarith. } 192-\text{log: } 3}{\text{log. } 2}=X-1$$
$$\frac{\text{logarith. } 192-\text{log. } 3}{\text{log. } 2}+1=X$$

Calculando estes logarithmos, achamos o numero de termos 7, de facto.

$$\begin{array}{lll}
\text{Logarith. } 192=2{,}28330: & \text{logarith. } 2=0{,}30103 & \\
\text{Logarith. } \quad 3=0{,}47712 & & \\
\text{Differença} & =1.80618 & \\
 & 1.80618 & |\,0.30103 \\
 & 180618 & \quad 6 \\
 & 000000 & \\
 & \text{e } 6+1=7. &
\end{array}$$

APPENDICE.

Applicações da Arithmetica ao Commercio.

(1) O objecto d'este appendice é mostrar como podemos applicar os principios da Arithmetica á solução de alguns problemas, de uso frequente no Commercio.

ARTIGO 1.º

Numeros concretos.

(2) Para fazer os calculos necessarios nos usos da vida, nenhum processo novo é empregado, todos foram já explicados na parte scientifica d'este Compendio; precisamos porém de uma cousa para estas applicações da Arithmetica, não para tornar os calculos mais certos, mas para facilitar a comparação dos resultados.

(3) Na parte scientifica deste Compendio empregamos so uma unidade, e tratamos de todas as mais quantidades como formadas, ou de um certo numero d'esta unidade, ou de um certo numero de partes d'ella; por exemplo se tratamos de distancias, e tomamos uma legua por unidade qualquer outra distancia, poderà ser representada, ou por um certo numero de leguas, ou por um certo numero de partes da legua, isto é, a distancia poderà ser representada por um numero inteiro, ou por uma fracção. Com este systema, porém, encontramos na pratica alguns inconvenientes; se dissermos que o comprimento de uma salla é de $\frac{1}{320}$, de legua, e o de uma outra de $\frac{1}{380}$ de legua, não podemos formar uma ideia, muito clara de quanto uma destas sallas è mais comprida do que a outra. Para podermos ter uma ideia mais clara, devemos adoptar uma medida menor, uma vara por exemplo, e então considerando a legua como constando de 5050 varas, cada vara será igual $\frac{1}{5050}$ de legua, e acharemos que as sallas tem de comprimento, a 1.ª $\frac{5050}{320}=15.\frac{250}{320}$ varas; a 2.ª $\frac{5050}{380}=13,\frac{110}{380}$ varas; deste modo formamos uma ideia muito

mais clara d'estes dous comprimentos, porém ainda um tanto obscura por causa das fracções $\frac{250}{320}$, e $\frac{110}{380}$, mas que pode se tornar mais clara ainda fazendo uso de uma unidade menor que a vara para avaliar as fracções, do palmo por exemplo, e então considerando a vara como composta de 5 palmos, cada palmo será igual á $\frac{1}{5}$ de vara, e as duas fracções $\frac{250}{320}$, e $\frac{110}{380}$, de varas, ou o que vem à ser o mesmo $\frac{25}{32}$ e $\frac{11}{38}$, são iguaes á $\frac{25X5}{32}$palmos,$=3$ e $\frac{29}{32}$ palmos e $\frac{11X5}{38}=$ 1 e $\frac{17}{38}$ palmos, de modo que a 1.ª salla tem de comprimento 15 varas 3 $\frac{29}{32}$ palmos, e a 2.ª 13 varas 1 $\frac{17}{38}$ palmos. Por este exemplo vemos que é de grande vantagem termos medidas grandes para quantidades consideraveis, e pequenas para as menores.

(4) As medidas empregadas por todos os povos não são aquellas que seriam recommendadas por pessoas instruidas na sciencia dos numeros, pelo contrario são todas pouco racionaes. Os Francezes no tempo de sua memoravel revolução fizeram um systema de pezos e medidas, muito completo, e baseado sobre principios philosophicos, que infelizmente por causa dos preconceitos vulgares, e do apego aos costumes antigos, não tem sido adoptado pelas mais nações, e até na França, apesar dos esforços da administração, encontrou, e ainda encontra, alguma resistencia da parte do povo que prefere as antigas medidas, e talvez com muita razão, mas não é n'um tratado de Arithmetica que se deve examinar esta questão.

(5) O grande objecto que se deve ter em vista na creação d'estas medidas, que em grande parte são arbitrarias, é que as unidades de pezos e medidas possam sempre ser as mesmas, e que a posteridade possa em todo tempo representa-las, e torna-las a fazer caso se percam. Por exemplo uma jarda, (yard) é uma medida arbitraria de que se servem os inglezes para medir distancias, ou comprimentos, na torre de Londres existe uma jarda guardada para servir de padrão, em todo tempo, mas se não havendo mais medidas d'esta especie, a torre de Londres fosse incendiada, ficariamos sem meio algum de restaurar esta unidade, (*) e é o que acon-

(*) A (yard) está hoje determinada exactamente pelo comprimento da pendula.

tecco com muitas medidas da antiguidade, resultando d'isso muitas difficuldades na intelligencia, de obras de sceincia e de historia escriptas pelos antigos. Para assegurar o conhecimento das unidades das medidas, estas devem ser derivadas de algum phenomeno inalteravel, que sirva para determinar o padrão da unidade fundamental de cada especie.

(6) As quantidades que nos usos da vida precisamos determinar com exactidão, são; a duração, a extensão, e o pezo, porque o grão de calor, a intensidade da luz, do som, e da electricidade, só interessam nos estudos scientificos. Uma outra quantidade torna-se precisa á cada passo, e deve ser medida com exactidão, esta é o valor monetario.

(7) Em todas as medidas precisamos de duas cousas; 1.° de um padrão exacto da unidade fundamental de cada especie de medidas; 2.° de um systema de divisão para da unidade fundamental derivar outras maiores, ou menores; este systema deve ser regular e fixo; seria muito commodo para os calculos que seguisse sempre ás divisões decimaes, já que a nossa numeração abstracta é decimal. (*)

(8) Apresentaremos aqui o systema de pezos e medidas adoptado entre nós.

1.° Medidas de tempo.

(9) Para a medição do tempo temos duas unidades principaes, o Dia, e o Anno; ambas derivadas de phenomenos naturaes fixos e constantes, a rotação da Terra sobre o seu eixo, e a revolução da mesma em torno do Sol. Estes phenomenos continuarão a ser os mesmos, ao menos por um extraordinario numero de seculos, salvo se apparecer alguma grande e totalmente desconhecida alteração no systema solar; e em quanto a Astronomia fôr cultivada estas duas quantidades serão conhecidas com exactidão.

Um Dia é o tempo decorrido desde que o centro do sol parte de um meridiano até que a elle volte.

O anno solar é o tempo decorrido desde que o sol corresponde á um ponto dado e fixo no Ceo, até que depois de fazer um giro na eclyptica volte á mesma correspondencia no Ceo: chama-se anno tropico o tempo que o sol gasta d'esde

(*) Existe uma tendencia natural nas numerações concretas, a adoptarem por base de divisão, os numeros 7, ou 12, por esta razão talvez fosse mais conveniente abandonar a numeração decimal, e adoptar a septimal.

que parte até que volta ao ponto equinoxial de Aries, e este é o anno civil, com esta differença que o anno civil principia de 1.º de Janeiro, o que não corresponde com o tempo em que o sol parte do ponto equinoxial.

Comparando o dia com o anno, as observações mostram ser o anno de 365, 2422694 dias, ou de pouco menos de 365 $\frac{1}{4}$ dias. Considerando o anno como contendo só 365 dias, no fim de algum tempo já o sol não pode representar por sua posição as estações; Julio Cesar para regular com mais exactidão a medida do anno, suppoz que a sua duração era de 365, 25 dias, ou de 365 $\frac{1}{4}$ dias, e ordenou que de então em diante (45 annos antes de J. C.) houvessem 3 annos de 365, e o quarto de 366, o que formou a regra dos annos bissextos, porque no fim de 4 annos os 0,25 ou $\frac{1}{4}$ de dia, despresados em cada anno, fazem 1 dia inteiro. Mas ainda assim não se obteve uma correspondencia exacta das estações no fim de algum tempo; porque o augmento de 1 dia em 4 annos é muito, pois o anno não é de 365, 25 dias, mas de 365, 2422694, a differença sendo de 0, 0077306, esta quantidade no fim de 128 annos é igual a 1 dia, e no fim de 400 annos á 3 dias; pelo modo Juliano de contar, o dia do equinoxo deveria retrogradar continuamente, e no fim de 400 annos este atraso era de 3 dias. Daqui veio que tendo o consilio de Nicea achado o equinoxio da primavera (emispherio do norte) em 21 de Março, este equinoxio depois de passados 1200 annos cahio em 11 de Março. O papa Gregorio 13.º, afim de corrigir este erro supprimio no anno de 1582, 10 dias do mez de Outubro mandando que o dia 21 se contasse como 11, o que fez annular 10 dias, e para evitar no futuro a repetição d'este atraso do equinoxio determinou que se deveria tirar tres dias em 4 seculos, o que se faz supprimindo os bissextos que cahem no principio de cada seculo, e conservando o do quarto. Existe um modo muito simples de conhecer se um anno é ou não bissexto; dividindo o numero que representa o anno por 4, se a divisão não deixa resto, o anno é bissexto, se deixa um, este mostra quantos annos tem decorrido depois do ultimo bissexto. Por exemplo o anno 1856 é divisivel por 4, e é bissexto, o anno de 1858, não é divisivel por 4, feita a divisão deixa um resto 2, e é o 2.º anno depois do ultimo bissexto.

Quando o anno é secular não será bissexto ainda que seja divisivel por 4, senão quando o seu quociente por 100, é ainda divisivel for 4, ou o que é o mesmo, se cortando as duas cifras á direita, o numero restante é divisivel por 4. Assim os annos de 1600, 2000, 2400, 2800, tem sido ou serão bissextos, e 16, 20, 24, 28, são numeros divisiveis por 4, mas os annos 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300, 2500, 2600, 2700 não são bissextos, e 17, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, não são divisiveis por 4.

Assim pois temos duas unidades fundamentaes para a medição do tempo, o Dia, e por uma correspondencia quase exacta o Anno para periodos maiores.

Para os usos da vida porém, foi preciso crear algumas unidades de tempo, menores que o dia, e outras intermediarias entre o Dia e o Anno, estas são inteiramente convencionaes.

O Dia foi dividido em 24 partes iguaes chamadas Horas, estas em 60 Minutos, estes em 60 Segundos, etc.

Quanto ás divisões intermidiarias entre o Dia e o Anno, a Lua deo uma ideia desta divisão do anno, mas como não se pode fazer concordar o movimento da Lua com o da Terra, outras divisões arbitrarias foram adoptadas.

A semana é um espaço de tempo igual á 7 dias, que corresponde quase com os quartos de Lua, quanto á duração.

O mez é outra divisão arbitraria e tem duas significações; 1.º corresponde quase em duração com a revolução da Lua, e então consta de 28 dias, ou de 4 semanas, e o anno tem 13 mezes e 1 dia: 2.º, é um espaço de tempo sem determinação fixa, uns mezes sendo de 30 dias, outros de 31, e até um de 28, ou 29, conforme o anno não é, ou é bissexto; o anno neste caso é de 12 mezes

Segundos	Minutos					
60=	1	Horas				
3600=	60=	1	Dias			
86400=	1440=	24=	1	Semanas		
604800=	10080=	168=	7=	1	Mezes	
2419200=	40320=	672=	28=	4 =	1	
31557600=	525960=	8766=	$365\frac{1}{2}$ =	52=	13=	1anno

2.º Medidas de extensão.

10 Os corpos tem 3 dimensões, e por tanto precisamos

de 3 medidas; 1.° para comprimentos; 2.° para superficies; e 3.° para volumes, ou capacidades.

Uma só unidade poderia servir para todas estas medidas mas tem se achado conveniente adoptar 3 ou 2.

A circumferencia da Terra é uma quantidade fixa, que pode servir de unidade para a extensão, e della derivar todas as mais.

Os Astronomos dividem esta circumferencia em 4 partes iguaes, chamadas quadrantes, e cada quadrante em 90 gráos, cada grão em 60 minutos, cada minuto em 60 segundos etc.

Segundos	Minutos			
60=	1	Gráos		
3600=	60=	1		
324000=	5400=	90=	1 Quadrantes	
1294000=	21600=	360=	4	=1 circumferencia.

D'esta medida circular poderiam ser tiradas as unidades para todas as medidas de extensão; mas assim não acontece, em cada Paiz se tem adoptado por unidade uma extensão tirada de outra origem, de que se fazem depois multiplos, e sub multiplos arbitrarios, para a medição de maiores ou menores extensões. A maior parte dos povos tiram estas unidades do palmo, do pé, da pollegada etc. unidades que referindo-se à partes do corpo humano são mui variaveis, e que por isso, à final tornam-se quantidades convencionaes, as quaes depois se trata de referir à algum phenomeno fixo da natureza.

1. Medidas de comprimento.

Pontos 12= 1 linha
144= 12=1 Pollegada
1152= 96— 8= 1 Palmo
1728=144=12=1,5=1 Pé
55760=480=40= 5=3,33= 1 Vara.
11520=960=80=10=6,66= 2 = 1 Braça.

Uma milha tem 841,75 Braças, 1683, 5 Varas, e é igual à $\frac{1}{60}$ de grão.

Uma legua tem 2525, 25 Braças 5050, 5 Varas, 3 milhas, e é igual à $\frac{1}{20}$ de grao, ou o grão tem 20 leguas.

A legua de 20 ao grao não é usada geralmente no Brasil a legua de sesmaria tem 3000 braças.

A legua de 18 ao grao tem 2805, 83 braças, 5610,66 varas.
O passo ordinario tem 30 pollegadas.
O passo geometrico 60 pollegadas.

2. Medidas de superficie.

As areas ou superficies são medidas por braças, varas palmos, e pollegadas, quadradas.

1 Pollegada quadrada			
64	= 1 Palmos quadrados		
160	=25	=1 Varas quadradas	
6400	=100	=4	=1 Braça.

A geira tem 400 braças quadradas, a tarefa 900 braças quadradas.

3. Medidas de capacidade

1.° Para seccos

1. Selamim						
2	=1 Maquia					
4	=2	=1 Oitava				
8	=4	=2	= 1 Quarta			
32	=16	=8	= 4	= 1 Alqueire		
128	=64	=32	=16	= 4=	1 Fanga	
1990	=960	=480	=240	= 60=	15=	1Moio

2.° Para liquidos

1 Quartilho			
4	=1 Canada		
24	=6	=1 Pote	
48	=12	=2=	1 Almude.

Uma pipa tem 8,333 almudes, 100 canadas, tambem ha pipas de 300 canadas,

Um tonel tem 6 pipas, 50 almudes; o tonel de carga é de 52 almudes, serve para vinho e azeite.

Depois de termos indicado todas as medidas de extensão por nós empregadas, é preciso determinar o padrão d'estas medidas, para que seja fixo, é preciso que seja referido à um phenomeno natural constante. A vara é a unidade fundamentãl, e para fixal-a de um modo invariavel foi comparada com o metro, e achou-se que a vara é igual $\frac{11}{10}$ de metros. O metro é $\frac{1}{10,000000}$ do quadrante terrestre, $\frac{1}{40,000000}$ da circumferencia da terra, logo a vara é $\frac{1}{36.363.636}$ da circumferencia da terra.

A unidade fundamental de capacidade para seccos, é o alqueire que tem 1744 pollegadas cubicas; para molhados é a canada que tem 128 pollegadas cubicas.

3,° Pezos.

(11) Depois da extensão a propriedade da materia que se precisa medir com mais exactidão é o pezo.

1. Pezos

Grãos						
24=	1 Scropulo					
72=	3=	1 Oitava				
576=	24=	8=	1 Onça			
4608=	192=	64=	8=	1 Marco		
9216=	384=	128=	16=	2=	1 Libra	
294912=	12288=	4096=	512,=	64=	32=	1 Arroba.

A libra de 16 onças tambem se chama arratel dando-se o nome de libra só á 12 onças—O quintal tem 4 arrobas,= 128 libras—A tonellada 13,5, arrobas.—A tonellada é uma denominação não só para pezo, como tambem para volume. A de pezo chamada de frete deve conter 72, 51 palmos cubicos, os quaes cheios d'agua salgada pesam 1728 libras ou arrateis, ou 54 arrobas, e é equivalente a um cubo de 4,17 palmos de lado.

A tonellada de porte, ou de arqueação dos navios equivale a um cylindro de 6 pés de altura e $3\frac{1}{2}$ de diametro na base, e produz um volume de 57, 726 pés cubicos.—A meia tonellada equivale á um cylindro da mesma altura e de 1|2 pés de diametro da base. O seu volume é de 29.45 pés cubicos.

A tonellada para seccos equivale á 71 alqueires de trigo reputando-se o pezo medio do alqueire de trigo [medida de Lisboa] 14 1|3 libras, e occupa o espaço de 71, 31 palmos cubicos. A tonellada para liquidos é o mesmo que o tonel, tem 52 almudes,

2. Pezos de Botica.

Grãos				
24=1	Scropulo			
72=	3	=1 Drachma		
576=	24	=8	= 1 Onça	
6912=	288	=96	=12	=1 Libra.

3.º Pezos de diamantes.

Grãos				
4=	1 quilate			
24=	6 »	== 1 Scropulo		
72=	18	=3 »	1 Oitava.	
376=	144	=24 »	= 8	= Onça.

4.º Pezo para toque de prata.

4 oitavas	1 grão		
96	=24	= 1 dinheiro	
1155=	288=	=12	=1 Marco.

5.º Pezo para toque de ouro.

8 oitav.	=1 grão		
32	= 4	=1 quilate	
768	=96	=24	=1 Marco.

O padrão para pezos é o marco que è igual $\frac{64}{564[illegible]}$ ou $11\frac{668}{2821}$, ou approximadamente $11\frac{11}{32}$ pollegadas cubicas de agua pura ao nivel do mar, marcando o thermometro 28.º centegrados, e o barometro $31\frac{1}{10}$ pollegadas inglezas.

4. Moedas.

(12) A moeda serve para medir o valor que é uma qualidade tão variavel que não pode ter um padrão fixo. A unidade que se adopta geralmente é um certo pezo, determinado por convenção em cada paiz, de prata ou de ouro ; esta unidade toma um nome particular , e conforme um systema de divisão qualquer , formam-se outras unidades que são multtplos ou submultiplos, da unidade fundamental.

A nossa unidade monetaria é o real, que tem um valor tão pequeno que ainda nas mais pequenas transacções nunca precisamos descer a fracções , o que é uma grande vantagem; o systema monetario é decimal, que é o mais commodo de todos. A quantia de mil réis forma uma outra unidade maior, e a de conto de réis, uma ainda maior.

Alem d'estes tres termos,, réis, mil réis, conto de réis, empregamos mais alguns para representarem certas sommas de réis.

100 réis=um tostão
320 réis=uma pataca
400 réis=um cruzado
480 réis=um sello

(13) Para servir de comparação apresentamos o systema de medidas decimaes, ou metricas.

Medidas do systema metrico.

1. Medida de tempo.

Pelo systema decimal o Dia é dividido em 10 horas, cada hora em 100 minutos, cada minuto em 100 segundos O anno tem 12 mezes de 30 dias cada um, e os 5 dias que restam ajuntam-se no fim do anno. O mez é dividido em 3 decadas,

2. Medidas circulares.

A circumferencia do circulo é dividida em 400 gráos, cada gráo em 100 minutos, cada minuto em 100 segundos.

3. Medidas de comprimento de superficie e de capacidade; dos pezos, e das moedas.

A unidade para comprimento é o Metro, esta unidade é a 10 millionesima parte do quadrante terrestre, ou o metro é igual a circumferencia da terra dividida em 40000000, de partes iguaes, ou por outra, a terra tem de circumferencia 40000000, metros. Todas as mais medidas de extensão derivam d'esta, assim como tambem as de pezo.

As medidas de comprimento são todas multiplos ou submultiplos do metro por 10.

A unidade de superficie é a Ara, ou o quadrado de 10 metros de lado; as mais medidas de superficie são multiplos e submultiplos da ara por 10.

A unidade de capacidade é o Litro, para liquidos, e substancias semi-liquidas. O Litro é igual ao cubo cujos lados tem a decima parte do metro. Um metro cubico tem 1000 litros; as mais medidas de capacidade são multiplos, e submultiplos do litro por 10.

A Stera é a unidade de capacidade para madeiras, é igual a um metro cubico.

A unidade de pezo é o Gramma que é o pezo de um volume d'agua pura no maximo de densidade (isto é na temperatura de 4.°, 44 do thermometro centigrado) equivalente a um cubo cujos lados são $\frac{1}{100}$ de metro; como o litro contém 1000 d'estes pequenos cubos, o pezo de cem litros d'agua é de 1000 grammas.

A unidade monetaria é o franco, peça composta de 9 partes de prata pura e 1 de cobre, cujo pezo é de 5 grammas— Todas estas unidades tem por padrão o metro.

Para representar as quantidades menores que as unidades principaes, empregam-se sub-multiplos destas unidades por 10, isto é divide-se a unidade em 10, 100, 1000 etc. partes iguaes, que são designadas fazendo preceder o nome da unidade principal, das palavras deci, centi, milli etc. Do mesmo modo as quantidades maiores que as unidades principaes são representadas por multiplos destas por 10, isto é por quantidades 10, 100, 1000 etc. vezes maiores que as unidades, que são designadas pelas palavras, deca, hecto, kilo, myria, postas antes dos nomes das unidades.

A principal vantagem deste systema consiste na sua perfeita analogia com o systema de numeração decimal adoptado para os numeros abstractos.

Não se usa das palavras decifranco etc. nem decafranco etc., se diz decime, centime etc. e 10 francos, 100 francos etc.

Na practica se toma cada unidade particular, por unidade principal e assim se diz antes, 27 kilogrammas e 48 centesimos, do que 2 myriagrammas 7 kilogrammas 4 hectogrammas e 8 decagrammas.

Tem-se introdusido as denominações de quintal metrico, e de tonellada metrica, para exprimirem os pezos de 100, e de 1000 kilogrammas.

Quando se tracta de superficies e de volumes consideraveis para os quaes a hectara (100 metros quadrados) e a stera são unidades pequenas, empregam-se kilometros ou myriametros quadrados; decametros hectometros, e kilometros cubicos.

Na avaliação das superficies e dos volumes é preciso não confundir um decimo, um centesimo, um millesimo de metro quadrado, ou cubico, com um decimetro, um centimetro, um millimetro quadrado ou cubiço.

TABOA DAS MEDIDAS METRICAS.

MULTIPLOS DA UNIDADE.				UNIDADES SIMPLES.	SUBDIVISÕES DA UNIDADE.		
10000 Myria	1000 Kilo.	100 Hecto	10 Deca	1	$\frac{1}{10}$ Deci.	$\frac{1}{100}$ Centi.	$\frac{1}{1000}$ Milli.
Myriametro	Kilometro	Hectometro	Decametro	Metro	Decimetro	Centimetro	Millemetro
»	»	Hectara	»	Ara	Deciara	Centiara	»
»	»	Hectolitro	Decalitro	Litro	Decelitro	Centilitro	»
»	»	»	Decastera	Stera	Decistera	»	»
»	Kilogramma	Hectogramm.	Deeagramma	Gramma	Dec[illegible]	Centigramm.	Milligramm.
»	»	»	»	Franco	Dec[illegible]	Centime	»

(14) Depois de termos exposto os systemas de pezos e medidas acima, é preciso mostrar como podemos fazer as reducções de quantidades dadas em uma especie de unidades a outras unidades maiores ou menores.

(15) Por meio da regra de reducção representamos a mesma quantidade em differentes unidades da mesma especie maiores ou menores; como por exemplo 4 dias em horas, ou 60 pollegadas em varas etc.

(16) As reducções tem dous objectos: 1.° redusir unidades maiores à menores; e 2.° unidades menores á maiores.

1.° Caso. Redusir uma quantidade dada em unidades de uma certa especie, a unidades menores da mesma especie.

Tod s as unidades inferiores da mesma especie são submultiplos da unidade principal : portanto a reducção n'este caso se faz por uma simples multiplicação. Seja proposto reduzir 4 dias á horas; cada dia tendo 24 horas, segue-se que 4 dias tem $4 \times 24 = 96$. horas. As vezes a quantidade que temos de reduzir é complexa isto é, contem unidades de differentes denominações e valores da mesma especie, e então devemos empregar a seguinte regra que serve para todos os casos.

1.° Multiplica se o numero da mais alta denominação por tantas unidades quantas unidades de denominação menor são precisas para formar uma da ordem superior em questão.

2.° A este producto ajunta-se o numero, se ha, de unidades da ordem inferior, e multiplica-se esta somma por tantas unidades quantas são precisas da ordem menor immediata para formar uma unidade da ordem precedente.

3.° Procede-se do mesmo modo por todas as denominaçoes até a menor de todas ; e o numero achado em ultimo lugar será o valor de todos os numeros de mais altas denominações reunidos em uma só somma , expressa em unidades da menor denominação.

1.° Exemplo. Quantas libras tem 60 , arrobas e 15 libras?

$$\begin{array}{lr}
 & 60 \\
 & 32 \\
\hline
 & 120 \\
 & 180 \\
\hline
 & 1920 \\
 & 15 \\
\hline
\text{resposta} & 1935 \text{ libras.}
\end{array}$$

2.° Exemplo. Quantos pence tem 1 libra 14 shellings e 6 pence? A libra tem 20 schellings, o shelling 12 pence

```
           1 l.
          20
          ——
          20 shellings
          14    »
          ——
          34    ,
          12
          ——
          68
         34
         ———
         408 , Pence
           6     »
         ———
resposta 414   Pence
```

2.° Caso. Reduzir uma quantidade representada em unidades menores, à unidades maiores da mesma especie. Devemos empregar uma operação inversa da do 1.° caso.

1.° Divide-se o numero dado por tantas unidades quantas são precisas da denominação em que se acha expresso o numero, para formar uma unidade da denominação superior; e conserva-se o resto, se ha.

2.° Divide-se o quociente por tantas unidades quantas são precisas da mesma denominação para formar uma unidade de ordem superior, e conserva-se o resto havendo.

3.° Procede-se do mesmo modo até a mais alta classe de unidades, e o ultimo quociente junto aos restos terá o mesmo valor que o numero dado.

1.° Exemplo. Seja proposto reduzir 6169 pence á libras.

```
1.°   6169 |12            2.°   514 |20
       16   514                 114  25
       ——                       ———
       49                        14
       ——
        1
```

Dividimos 6169 por 12, e depois o quociente 514 por 20, e achamos que 6169 pence, é o mesmo que 25.l 14s, 1d.

ARTIGO 2.º

Operações arithmeticas com numerso concretos.

(17) Um numero concreto, composto de unidades da mesma especie mas de tamanhos differentes, chama-se complexo; e um numero concreto é chamado incomplexo quando não contém senão unidades da mesma especie e do mesmo tamanho; 3 br., 1. va 3 pal. é um numero complexo, 20 br um numero incomplexo.

Nas operações arithmeticas com numeros concretos, a enunciação da questão faz logo conhecer a especie de unidades do resultado, e basta então determinar o numero destas. A natureza de cada regra impoem certas condições particulares aos numeros.

1.º Na addição, como na subtracção, os numeros empregados devem ser da mesma natureza, e o resultado tambem é da mesma natureza: esta regra é evidente, não podemos ajuntar arrobas á libras, ou tirar varas de canadas etc.

2.º Na multiplicação o multiplicador é sempre um numero abstrato, e o producto é da mesma natureza que o multiplicando; pois o objecto d'esta operação é repetir uma quantidade um certo numero de vezes.

3.º Na divisão temos dous casos; 1.º quando o divisor e o dividendo são numeros concretos, o quociente é um numero abstrato, porque então representa as vezes que o divisor é contido no dividendo, 2.º quando o dividendo é concreto, e o divisor abstracto, o quociente é concreto, e da mesma natureza que o dividendo, porque então representa uma das partes do dividendo, repartido em tantas quantas são as unidades do divisor,

Calculo dos numeros concretos incomplexos.

(18) Os calculos com numeros concretos incomplexos nenhuma difficuldade apresentam.

1.º Na addição e na subtracção de numeros concretos incomplexos, as unidades são todas da mesma especie. Quando estas unidades são do mesmo tamanho, as unidades do resultado são tambem as mesmas: para achar o numero das unidades do resultado, devemos empregar os numeros dados, fazendo abstracção da especie das unidades; o que se faz seguindo as regras dadas para a addição, e subtracção de numeros abstractos. Por exemplo, para calcular a somma de 36,^{br} e 12,^{br} devemos observar que esta somma sendo formada de um numero de braças marcado por 36+12, basta effectuar a addição dos numeros abstractos 36, e 12; o que dá 48. A somma portanto é 48 braças.

Vemos do mesmo modo que a differença entre 36 ^{br}. e 12 ^{br}, é igual á um numero de braças denotado por 36—12, ou por 24: de modo que esta differença é 24 braças.

Quando os numeros são da mesma natureza mas complexos podemos referil-os ao primeiro caso, representando estes numeros na mesma unidade pela regra de reducção (16). Assim para calcular a somma, ou a differença dos numeros, 3 arrobas, e 9 libras, observaremos que 1 arroba valendo 32, libras 3 arrobas valem 3 vezes 32 libras, ou 96 libras, e nada mais temos à fazer senão empregar os numeros 96, e 9, a somma é 105 libras, e a differença 87 libras.

2.° Na multiplicação o multiplicador é essencialmente abstracto, e por tanto as unidades do producto são sempre as mesmas que as do multiplicando. Obtemos o numero das unidades do producto, effectuando a multiplicação, fazendo abstracção da natureza das unidades do multiplicando. Por exemplo, o producto de 7 palmos por 3, sendo formado de 7 ^{p}.+7^{p}.+7^{p}, exprime palmos; e para achar o numero de palmos d'este producto, basta multiplicar 7 por 3; o que dá 21; de modo que o producto de 7 palmos por 3, é 21 palmos.

3.° Na divisão o dividendo sendo um producto, cujos factores são o divisor, e o quociente; quando o dividendo e o divisor são da mesma natureza e compostos de unidades do mesmo tamanho, o quociente é um numero abstracto que exprime quantas vezes o divisor é contido no dividendo. Para achar este quociente basta effectuar a divisão fazendo abstracção da natureza das unidades do dividendo e do divisor. Por exemplo, o producto de 7 palmos por 3 sendo 21 palmos, dividindo 21 palmos por 7 palmos, o quociente será o numero abstracto 3, que exprime que 7 palmos são contidos 3 vezes em 21 palmos, e este quociente se obtem dividindo 21 por 7.

Quando o dividendo e o divisor são compostos de unidades da mesma natureza, mas de tamanhos differentes, podemos referir este caso ao primeiro, reduzindo primeiro os numeros a mesma unidade (16).

Por exemplo, para dividir 3 varas por 3 palmos, observaremos que 1 vara tendo 5 palmos, 3 varas valem 15 palmos, assim temos de dividir 15 palmos por 3 palmos, o que dá o quociente 5.

Quando o dividendo é concreto, e o divisor abstracto, o quociente é da mesma natureza que o dividendo, a divisão servindo então para repartir o dividendo em tantas partes iguaes quantas unidades tem o divisor, e o quociente exprimindo uma destas partes. Para achar o numero de unidades do quociente basta effectuar a divisão como se o dividendo fosse abstrecto. Por exemplo, o producto de 7 palmos por 3, sendo 21 palmos, se dividirmos 21 palmos por 3, o quociente será o numero 7 palmos, que exprime que quando se reparte o dividendo 21 palmos em 3 partes iguaes, cada uma d'estas partes é igual ao quociente 7 palmos; para achar o numero 7 palmos do quociente, basta dividir 21 por 3.

A regra de reducção, nos dá um meio de referir um numero concreto complexo à uma qualquer de suas unidades, o que o transforma em numero incomplexo. Assim o calculo dos numeros complexos pode ser redusido ao dos numeros incomplexos. Vamos porém indicar meios mais simples de effectuar directamente os calculos com numeros concretos complexos. Estes calculos tornam-se precisos porque os systemas de pezos e medidas não seguem a divisão decimal, adoptando-se as medidas decimaes francezas não ha difficuldade em fazer as 4 operações com numeros concretos, que podem ser sempre considerados como incomplexos, o é esta a grande vantagem deste systema.

CALCULO DOS NUMEROS CONCRETOS COMPLEXOS.

(19). Addicção de complexos.

1.º Escrevem-se os numeros de modo que os da mesma classe, isto è, da mesma subdivisão da unidade principal, fiquem directamente por baixo uns dos outros em columnas verticaes.

2.º Sommam-se os numeros da classe de unidades menores, e escreve-se a somma se não chega a formar uma ou mais unidades da classe superior, se contém algumas, extrahem-se, e reservam-se, escrevendo por baixo da primeira columna á direita somente o excesso da somma sobre as unidades da classe superior.

3.º Sommam-se as unidades reservadas da primeira columna, com as da classe respectiva da columna seguinte, trata-se do mesmo modo a somma, e procede-se assim com cada columna até chegar á da classe superior, cujo numero se escreve por inteiro.

Exemplo. Seja proposto sommar as seguintes quantidades.

14 Arrobas	6 Libras	10 Onças	7 Oitavas	20 Grãos
17, »	5, »	3 »	5, »	12, »
15, »	8, »	7, »	4, »	25, »
16, »	0, »	9, »	5, »	20, »
72 »	20 »	15 »	7 »	5

Sommamos os grãos e achamos que são 77, e como uma oitava tem 72 grãos, escrevemos na columna dos grãos 5,=77—72, e levamos para a das oitavass 1; sommamos depois a columna das oitavas com 1, que levamos da dos grãos, e achamos 23; e como 8 oitavas fazem uma onça, dividimos 23, por 8, e temos por quociente 2, e de resto 7; escrevemos 7, na columna das oitavas, e levamos 2 para a das onças; sommamos então a columna das onças ajuntando-lhe 2 provenientes da das oitavas, e achamos 51, e como uma libra tem 16 onças, dividimos 51 por 16, e temos 1 no quociente e 15 de resto, escrevemos este resto na columna das onças, e levamos 1 para a das libras, sommamos a columna das libras ajuntando-lhe 1, proveniente das onças, o que escrevemos, porque não chega a uma arroba; finalmente sommamos as arrobas, e escrevemos esta somma por inteiro.

(20). Subtracção de complexos.

Para diminuir um numero complexo de outro, ambos se assentam como para a addição.

1.° Principiando pela direita diminue-se cada numero superior do que lhe fica por baixo.

2.° Se alguma d'estas subtracções parciaes não pode ser feita, por ser maior o numero que fica por baixo do que o que lhe corresponde por cima, ajunta-se ao superior uma unidade da classe immediatamente superior decomposta em unidades da classe do numero de que se trata, e faz-se então a subtracção.

3. Na operação que segue diminue-se de 1 o numero superior, ou augmenta-se de 1 o inferior.

4.° Se a classe de unidades a que se recorre for zero, passa-se á seguinte que o não seja, e no lugar da classe que falta ficarão tantas unidades menos uma quantas bastam para fazer uma da classe immediatamente superior.

5.° Os diversos restos assim achados formam a differença total das duas quantidades.

Exemplo 1.° Seja proposto tirar de 79 libras, 17 schellings 8 e $\frac{3}{4}$ pence, a quantia de 35 libras, 12 shellings e $4\frac{1}{2}$ pence.

L	s	d
79 »	17 »	$8,\frac{3}{4}$
35 »	12 »	$4\frac{1}{2}$
44e»	5s »	$4^d\frac{1}{4}$

De $\frac{3}{4}$ tiramos $\frac{1}{2}$, ou $\frac{2}{4}$, e escrevemos $\frac{1}{4}$; de 8^d tiramos 4^d. e ficam 4^d, que escrevemos; de 17^s tiramos 12^s, e ficam 5^s, que escrevemos, finalmente de 79^l tiramos 35^l, e ficam 44^l, que escrevemos.

Exemplo 2.° Seja propotto tirar 71^l, 12^s. $5\frac{3}{4}$ de 103^l, 3^s. $2^d\frac{1}{2}$

103 »	3 »	$2\frac{1}{2}$
71 »	12 »	$5\frac{3}{4}$
31 »	10 »	$8\frac{3}{4}$

Não podemos tirar de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$,

ajuntamos á $\frac{1}{2}$, ou $\frac{2}{4}$. o valor de 1 penny redusido a quartos, e temos então $\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{6}{4}$. Tirando de $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{4}$ ficam de resto $\frac{3}{4}$, que escrevemos.

Então temos 1^d, do qual devemos tirar 5^d, o que não pode se fazer, ajuntamos a 1^d, 12^d valôr de um shilling em pence, e temos $13^d-5^d=8^d$. que escrevemos. Passando à casa dos schillings, temos 2^s-12^s, o que não pode ser, ajuntamos aos 2^s, 20^s, valor d'uma libra em shillings e temos $22^s-12^s=10^s$ que escrevemos; finalmento $102^l-71^l=31^l$, que escrevemos.

Exemplo 3.° Seja proposto fazer a seguinte subtracção.

arro.	lib.	onças	oit.	grãos
30 ,	20 »	0 »	3 »	16
21 »	30 »	9 »	7 »	50
8 »	21 »	6 »	3 »	38

Temos $16^{gr}-50.^{gr}$ ajuntando aos $16,^{gr}$ 72^{gr}. valor de uma oitava em grãos, temos $88^{gr}-50^{gr}=38^{g}$ que escrevemos; $2^{oit}.-7^{oit}$, não pode ser, e não havendo na casa das onças numero do qual se possa tomar uma unidade, devemos tomal-a da casa das libras, a qual vale 16 onças, destas deixaremos 15 no lugar das onças, e converteremos uma em 8 oitavas, e ajuntando ás 2^{oit}, então temos $10^{oit}-7^{oit}=3^{oit}$, que escrevemos: na casa das onças temos agora só 15 onças, e então $15^{onc}-9^{onc}=6^{onc}$ que escrevemos; na casa das libras só temos 19^{l}, das quaes não podendo tirar 30, ajuntamos ás 19^{l}, 32^{l} valor de uma arroba em libras, e temos $51^{l}-30^{l}=21^{l}$ que escrevemos; $29^{arr}-21^{a}=8^{arr}$ que escrevemos.

(21). Multiplicação de complexos.

1.° Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando: 2.°, multiplica-se o numero da classe menor do multiplicando pelo multiplicador; e procura-se quantas unidades de classe superior tem este producto, escreve-se o resto: 3.° procede-se do mesmo modo com o numero seguinte, e ao producto ajuntam-se as unidades reservadas da multiplicação precedente, e procura-se quantas unidades da classe superior tem: 4.° procede-se assim até chegar ás unidades da mais alta classe.

Exemplo 1.° Em quanto importam 8^{ll} de chá ao preço de 5^{s}, $8^{d}\frac{1}{2}$ cada libra?

$$\begin{array}{rrr} 5^{s} & , & 8^{d}\ \frac{1}{2} \\ & & 8 \\ \hline 2^{l}\ \text{»}\ 5^{s} & , & 8 \end{array}$$

Temos de multiplicar o preço por 8: $8\times\frac{1}{2}=4$, e $8\times8=64$; $64+4=68$, como 12 pence valem 1 schilling devemos dividir 68^{d} por 12, e temos no quociente 5, e o resto 8, escrevemos 8 na casa dos pence e levamos 5 para a dos schillings; $8\times5=40$, e ajuntando a 40^{s}, os 5^{s} reservados da casa dos pence temos 45^{s}, e como 20^{s} valem 1 libra, dividimos 45 por 20, e temos no quociente 2, e o resto 5, escrevemos 5 na casa dos schillings, e 2 na casa das libras.

Quando o multiplicador excede 12, e é um numero composto, isto é, o producto de dous ou mais factores de um algarismo, podemos simplificar o calculo multiplicando successivamente o multiplicando por cada um de seus factores em vez de multiplical-o pelo numero inteiro.

Exemplo 2.° 16 hundred weights de queijo á 4 libras 18 schillings, e 8 pence cada um, em quanto importam?

$$\begin{array}{r}
4^{l}\ \ 18^{s}\ \ 8^{d} \\
4 \\
\hline
19^{l}\ » \ 14^{s}\ \ 8^{d} \\
4 \\
\hline
78^{l}\ » \ 18^{s}\ \ 8^{d}
\end{array}$$

Multiplicamos por 4, e depois o producto por 4, porque $16=4\times4$.

Quando o multiplicador não é um numero composto, toma-se aquelle que mais se aproxima delle em valor, e que é composto, e multiplica-se o multiplicando pelos seus factores, e depois ajuncta-se, ou tira-se, tantas vezes o multiplicando quantas unidades tem o numero que se tomou para multiplicador de mais, ou de menos, que o verdadeiro multiplicador.

Exemplo 3.° Em quanto importam 17 jardas de uma fazenda que custa $7^{s}\ 1^{d}\frac{1}{2}$ cada jarda?

$$\begin{array}{r}
7^{s}\ ,\ \ 8^{d}\frac{1}{2} \\
4 \\
\hline
1^{l}\ » \ 10^{s}\ » \ 10^{d} \\
\hline
4 \\
7\ » \ \ 8\frac{1}{2} \\
6^{l}\ » \ 3^{s}\ » \ 4^{d} \\
\hline
6^{l}\ \ 11^{s}\ » \ \ 0\frac{1}{2}
\end{array}$$

multiplicamos por 4, e depois o producto por 4, porque $16=4\times4$, e ajuntamos a este producto o valor do multiplicando, porque o verdadeiro multiplicador é $17=16+1$.

(22) Divisão de complexos. Temos aqui dous objectos; 1.° dividir um numero complexo em um certo numero de partes; 2.° determinar quantas vezes um numero complexo é contido n'outro da mesma especie.

1.° Dividir um numero complexo por um abstracto.

1.° Escreve-se o divisor á esquerda ou a direita do dividendo separado por um risco: 2.° principiando pela esquerda do dividendo, divide-se o numero de mais alta classe de unidades pelo divisor, e escreve se o quociente: 3.° se fica algum resto deve ser redusido a unidades da classe inferior reunindo à este resto as unidades da mesma classe do dividendo, e divide-se esta somma pelo divisor e escreve-se o quociente: 4.° procede-se do mesmo modo até chegar as unidades da classe menor.

Exemplo 1.° Seja proposto dividir 46 arrobas, 16 libras, 8 onças, 6 oitavas, por 20.

$$
\begin{array}{r|l}
46^{a},\ 16^{l}\ 8^{on},\ 6^{oit}. & 20 \\
\hline
6 & 2^{a}.\ 10^{l},\ 6,^{oit}\ 6\frac{14}{20} \\
32 & \\
\hline
192 & \\
16 & \\
\hline
208 & \\
\hline
8 & \\
16 & \\
\hline
128 & \\
8 & \\
\hline
136 & \\
\hline
16 & \\
8 & \\
\hline
128 & \\
6 & \\
\hline
134 & \\
\hline
14 &
\end{array}
$$

Dividimos 46ª por 20, e achamos por quociente 2 que escrevemos, e o resto 6.ª, multiplicamos este resto por 32 (valor de 1 arroba em libras) e ajunctamos ao producto as libras do dividendo, temos então 208 para 2.° dividendo, este dividido por 20 dá por quociente 10, e fica o resto 8ˡ. escrevemos 10ˡ, e multiplicamos o resto 8ˡ por 16 (valor da libra em onças) e ajunctamos á este producto as onças do dividendo, e temos 136 para 3.° dividendo, este dividido por 20 dá 6 no quociente, e ficam de resto 16 onc, multiplicamos este resto por 8 (valor de uma onça em oitavas) e ajunctamos as oitavas do dividendo, e temos 134 oit para

4.° dividendo, dividimos este por 20 e temos no quociente 6, e fica o resto 14^{cit}.

2°. Se o dividendo e um numero complexo assim como o divisor; reduz-se ambos á unidades da mais infima classe e divide-se então um pelo outro, o quociente é um numero abstracto que mostra quantas vezes o divisor é contido no dividendo.

Exemplo 2.° Em 65^{brac}., 1^{var}., 3^{palm}., 5^{polleg}. quantas vezes são contidas 2^{b}, 1^{v}., 3^{pol}., 2^{pol}.?

Devemos redusir estas quantidades á pollegadas.

O dividendo tem:

$$
\begin{array}{llll}
65^{b} = 65\times80 & = & 5200 & \text{polleg.} \\
1^{v} = 1\times40 & = & 40 & \text{polleg.} \\
3^{pal} = 3\times8 & = & 24 & \text{polleg.} \\
5^{po'} = & = & 5 & \text{polleg.} \\
\hline
 & & 5269 &
\end{array}
$$

O divisor tem:

$$
\begin{array}{llll}
26^{b} = 2\times89 & = & 160 & \text{polleg.} \\
1^{v} - 1\times40 & = & 40 & » \\
3^{pa} = 3\times 8 & = & 24 & » \\
2^{po} = & = & 2 & » \\
\hline
 & & 226 &
\end{array}
$$

$$\frac{5309}{226} = 28»\frac{111}{226}$$

Quando o divisor é um numero composto pode-se abreviar a divisão, dividindo successivamente pelos seus factores.

Como custa cada hundredweights, se 16 importam em 30^{l}. 18^{s}, 8^{d}.

$$
\begin{array}{l|l}
30^{c}\ 18^{s}\ 8^{a} & 4 \\
\hline
7,\ 14,\ 8^{d} & 4 \\
\hline
1^{c}»18^{s}»8^{d} &
\end{array}
$$

Dividimos por 4, e depois o quociente ainda por 4, porque $16=4\times4$.

Quando o divisor não é um numero composto, não podemos fazer a divisão senão empregando o divisor inteiro.

(23). A multiplicação e a divisão de um numero complexo por uma fracção, reduz-se ao que precede, pois então nada mais temos a fazer do que multiplicar e dividir successivamente por numeros inteiros.

Seja proposto achar o producto de 4^{arr}., 8^{libr}. por $\frac{4}{5}$

multiplicamos primeiro 4^{ar}. 8^{l}, por 4, e dividimos depois o producto por 5.

$$
\begin{array}{l|l}
4^{a} \;\text{»}\; 8^{l} & \\
\quad\;\; 4 & \\
\hline
17^{a} \;\text{»}\; 0 & 5 \\
\hline
2^{a} & (3^{a}.\ 12^{l},\ \frac{4}{5} \\
32 & \\
\hline
64^{l} & \\
\hline
14 & \\
\hline
4 &
\end{array}
$$

Seja proposto dividir, 4^{ar}, 8^{l}, por $\frac{2}{3}$, multiplicamos primeiro 4^{a}, 8^{l}, por 3, e dividimos depois o paoducto por 2.

(54). Muitas vezes o resultado dos calculos é uma fracção concreta, isto é um numero concreto dividido por um abstracto, então precisamos de redusir esta fracção, ou a decimaes, ou a numeros de classes inferiores.

Exemplo 1.º Seja proposto redusir $\frac{15}{4}$ de braças a uma fracção decimal. Dividindo 15 por 4, redusimos a fracção a decimaes, e temos por resultado 3^{br}, 75.

Exemplo. Seja prposto redusir a mesma fracção de braça a numeros concretos menores, para isto dividimos 15 por 4 pelo methodo, (2 Append).

$$
\begin{array}{l|l}
15 & 4 \\
\hline
3 & 3.,^{b}\ 1,^{va}\ 2,^{pl}\ 4\ \text{poleg.} \\
2 & \\
\hline
6.\ \text{varas} & \\
\hline
2 & \\
5 & \\
\hline
10\ \text{palmos} & \\
\hline
2 & \\
8 & \\
\hline
16\ \text{pollegadas} & \\
\hline
00 &
\end{array}
$$

Assim pois $\frac{15}{4}{}^{b} = 3^{b}.\ 1^{v}.\ 2,^{pol}.\ 4,^{pol}$.

A conversão de uma fração decimal de numeros concretos, em numeros complexos de classes inferiores, é uma operação mui simples: Seja proposto reduzir $\frac{375}{100}$ toesas a numeros complexos. Podemos effectuar a divisão de 375 por 100, mas é melhor pôr esta fracção na forma decimal $3,^{t}75$, e então converter $0,^{t}75$, em pés multiplicando por 6, e temos $4,^{p}5$, para exprimir $0,^{p}5$ em pollegadas multiplicamos por 12, e temos 6 pollegadas, de modo que a fracção proposta é igual a $3.^{t}\,4,^{p}\,6^{pol}$.

(25) Para converter um numero complexo qualquer em fracção de uma qualquer de suas unidades, redusimos todas as partes a esta unidade, e fazemos a somma. Seja proposto achar a fracção de toesas que representa a quantidade $3^{t}\,4^{p}\,6^{pol}$. Um pé é igual á $\frac{1}{6}$ de toesa, 1 pollegada$=\frac{1}{72}$ de toesa, logo 4 pés, 6 pollegadas$=\frac{4}{6}{}^{T}+\frac{6}{72}{}^{T}=\frac{2}{3}{}^{T}+\frac{1}{12}{}^{T}=\frac{9}{12}{}^{T}=\frac{3}{4}{}^{T}$: logo $3^{t},4^{p},6^{p}=3^{t}\frac{3}{4}=\frac{15}{4}{}^{T}$. Podemos chegar ao mesmo resultado redusindo $3.^{t}\,4.^{p}\,6^{p}$, á pollegadas, então temos $270^{p}=270\times\frac{1}{72}{}^{T}=\frac{270}{72}{}^{T}=\frac{15}{4}{}^{T}$

Para representar o mesmo numero 3 toesas, 4 pes, 6 pollegadas, em fracções do pé, procedemos do modo seguinte: 3 toesas$=18$ pés, e 6 pollegadas valem $\frac{6}{12}$ de pés, portanto 3 toesas, 4 pés, 6 pollegadas$=18$ pés$+4$ pés$+\frac{1}{2}{}^{p}=22\frac{1}{2}$ pés$=\frac{45}{2}$ pés. Podemos tambem redusir o numero a pollegadas e então temos 270 pollegadas, e como 1 pollegada$=\frac{1}{12}$ pé, segue-se que 270 pollegadas são iguaes a $\frac{270}{12}$pés$=\frac{45}{2}$ pés.

(26) Pelo mesmo modo podemos converter um numero complexo em fracções decimaes de uma qualquer de suas unidades. Seja proposto o numero 3 toesas, 4 pés, 6 pollegadas, para ser redusido a uma fracção decimal da toesa; 4 pés valem $\frac{4}{6}{}^{T}$, e 6 pollegadas $\frac{6}{72}{}^{T}$, logo 4 pés, 6 pollegadas$=\frac{4}{6}{}^{T}+\frac{6}{72}=\frac{2}{3}{}^{T}+\frac{1}{12}{}^{T}=\frac{9}{12}{}^{T}=\frac{3}{4}{}^{T}=0,^{t}95$. Portanto 3 toesas, 4 pes, 6 pol.$=3^{t},75$.

O mesmo numero pode ser redusido a fracções decimaes do pé do modo seguinte—3 toesas, 4 p.$=22$ pés, 6 poll.$=\frac{6}{12}{}^{p.}=\frac{1}{2}{}^{pé}=0,^{p}5$ logo, 3 toesas, 4 p., 6 pol.$=22^{p},5$.

ARTIGO 3.°

DOS PROBLEMAS ARITHMETICOS.

(27) Os processos expostos, no artigo antecedente, e nos elementos de arithmetica que precedem este appendice, nos dão todos os meios precisos para a solução dos problemas arithmeticos. Estes problemas podem ser resolvidos por dous methodos, pelo o da unidade, que não exige senão o conhecimento das quatro operações numericas fundamentaes, e pelo o da regra de tres, fundada sobre a theoria das proporções.

1.ª REGRA DE TRES SIMPLES.

(28). Por esta regra podemos sempre achar a 4.ª proporcional à tres números dados; não é senão uma applicação da theoria das proporções: chama-se tambem regra de ouro por causa da sua grande utilidade. A solução de todo problema numerico reduz-se á determinação de um numero, e para obter este é preciso conhecer as relações do numero procurado com outros conhecidos. O essencial para chegar a solução de um problema numerico qualquer é estabelecer exactamente estas relações entre as incognitas e as quantidades dadas.

(29). As razões entre quantidades são directas, ou indirectas. Uma quantidade está em razão directa com uma outra, quando a relação que existe entre ellas é tal, que uma não pode augmentar, ou diminuir, sem que a outra tambem augmente, ou diminua. Quando pelo contrario a relação entre duas quantidades é tal, que uma não pode augmentar, ou diminuir, sem que a outra diminua, ou augmente, estão em razão indirecta.

A regra de tres é geralmente dividida em duas, uma directa outra indirecta; mas a mesma regra pode servir em todos os casos.

(30). Para resolver a questão que forma o objecto da regra de tres devemos seguir o seguinte methodo.

1.° Considerar qual dos tres termos dados é da mesma especie que o 4.° procurado, e escrevel-o no ultimo lugar a fim de ser o antecedente da segunda razão, sendo o consequente a incognita representada por X. 2.° Depois ver pela natureza da questão se a incognita que procuromos achar deverá ser maior, ou menor, que o numero dado da mesma especie, e que se pôz em ultimo lugar como seu antecedente: se deve ser maior, colloca-se o maior dos outros dous numeros no meio, e o menor em primeiro lugar, formando assim a primeira razão da proporção: se deve ser menor, colloca-se o menor dos dous termos dados no meio, e o maior no primeiro lugar: 3.º Tendo assim escripto a proporção reduz-se os dous primeiros termos à unidades do mesmo tamanho, e o terceiro termo á unidades da menor classe que contém. 4.º Multiplica-se o 2.º termo pelo 3.º, e divide-se o producto pelo 1.º termo, o quociente será o numero procurado expresso em unidades da mesma especie, e tamanho que as do 3.º termo.

1.º Exemplo. Sabendo que 15 varas de uma fazenda custam 14$000 rs. em quanto devem importar $17\frac{1}{2}$ varas da mesma fazenda pelo mesmo preço.

A resposta deve ser em dinheiro, por tanto 14$000 rs. deve ficar no 3.º lugar, servindo de antecedente á 2.ª razão. Se 15 varas valem 14$000 rs., $17\frac{1}{2}$ devem valer mais, logo a incognita X, é maior que o numero dado 14$000 rs., e por tanto a primeira razão deve levar no segundo lugar o maior dos dous numeros dados de varas, assim.

$$15 : 17\frac{1}{2} :: 14\$000 \text{ rs.} : X$$

Devemos redusir os dous primeiros termos à mesma unidade, isto se faz multiplicaudo por 2, e temos então

$$30 : 35 :: 14000 : X$$

por tanto—

$$X = \frac{35 \times 14000 \text{ rs.}}{30} = 16\$333 \text{ R.}$$

A multiplicação de um numero concreto por um numero concreto é um absurdo, não podemos multiplicar 35 meias varas por 24$000 R., devemos entender esta expressão como um modo abreviado de dizer, que, se 15 varas estão para $17\frac{1}{2}$ varas, na mesma proporção em que estão 14$000 R para 16$333, então como o 4.º termo de uma proporção contém tantas unidades, quantas contém o 3.º termo multiplicade pelo 2.º, e dividido pelo 1.º, podemos achar o 4.º termo da proporção acima considerando as outras quantidades como numeros abstractos represontando o quociente de cada uma dividida pela sua unidade especial.

Quando se diz que um numero concreto é multiplicado por um outro numero concreto, ou que um numero de uma especie, é multiplicado, ou dividido, por outro numero de outra especie, é evidente que sendo estes numeros heterogeneos não se trata senão das relações que estas quantidades tem com suas unidades respectivas. Não são estas quantidades que se multiplicam, ou se dividem, mas sim, os numeros abstractos que formam o quociente d'estas divididas pelas suas unidades respectivas.

Exemplo 2.º Uma fonte despeja uniformemente 400 litros de agua em $2\frac{3}{4}$ horas; quanto tempo levaria para encher um vaso de 225 litros?—A resposta que procuramos é em tempo logo $2\frac{3}{4}$ horas é o antecedente da segunda razão; O tempo procurado X, é menor que o dado, porque a fonte deve levar menos tempo para despejar 225 litros, do que leva para despejar 400 litros de agua: por tanto na primeira razão o menor numero deve occupar o 2.º lugar, e temos a seguinte proporção para resolver o problema.

$$400 : 225 :: 2\frac{3}{4} : X$$

devemos redusir o tempo á quartos de hora, e temos então

$$400 : 225 : \frac{11}{4} : X$$

$$X = \frac{225 \times 11}{4 \times 400} = \frac{2475}{1600} = 1 \times \frac{875}{1600} = 1\frac{35}{64} \text{ horas};$$ podemos redusir $\frac{35}{64}$ horas, á minutos, e segundos; o que se faz multiplicando 35 por 60, e dividindo por 64; $\frac{35 \times 60}{64} = \frac{2100}{64} = 32\frac{52}{64}$ minutos, e depois multiplicando 52 por 60, e dividindo por 64 temos $\frac{52 \times 60}{64} = 48\frac{48}{64} = 48\frac{3}{4}$ segundos. Logo o tempo procurado é de 1 ^{ho}, 32^{mi}., 48^{se} $\frac{3}{4}$

Podiamos logo ter redusido a fracção de horas á segundos, multiplicando $\frac{35}{64}$ por 3600, segundos que tem a hora, então $\frac{35 \times 3600}{64} = 1968\frac{48}{64}$, e dividindo 1968 por 60, temos 32^{m}., 48^{s}.

Exemplo 3.º Vinte obreiros concluiram em 30 dias um certo trabalho, em quantos dias se poderia fazer o mesmo trabalho com 32 obreiros?

A razão entre o numero de obreiros e o tempo é inversa, quantos mais obreiros fôrem empregados menos tempo se gasta no mesmo trabalho. O que queremos achar é o tempo, por tanto a segunda razão é 30^d : X, e como o numero de dias procurado é menor que o dado, por estar em razão inversa dos obreiros, na primeira razão o menor numero deve ficar em segundo lugar.

$$32 : 20 :: 30 : X$$

$$X = \frac{20 \times 30}{32} = \frac{600}{32} = 18\frac{24}{32} = 18\frac{3}{4} \text{ dias.}$$

O tempo empregado pelos 32 obreiros será $18\frac{3}{4}^d = \frac{3 \times 24}{4} = 3 \times 6 = 18$ horas, assim pois a resposta é 18 dias, e 18 horas.

Exemplo 4.º Quatro obreiros fazem 20 braças de trabalho; quantas farão 9 obreiros?

9 obreiros devem fazer mais trabalho do que 4, logo a resposta que procuramos e que é um certo numero de braças X, é maior que o numero de braças dado, e por tanto temos á proporção.

$$4 : 9 :: 20 : X$$

$$X = \frac{20 \times 9}{4} = 45$$

Exemplo 5.º Tres obreiros fizeram um trabalho em 15 horas, quanto tempo empregarão 5 obreiros para fazer o mesmo trabalho?

Tres obreiros empregam mais tempo para fazer o mesmo trabalho que 5, logo o tempo procurado X, é menor que 15 horas, por tanto na primeira razão o 2º termo deve ser o menor, e temos

$$5 : 3 :: 15 : X$$

$$X = \frac{15 \times 3}{5} = 9 \text{ horas}$$

Podemos resolver todas as questões da regra de tres sem recorrer as proporções redusindo à unidade um dos dous termos do primeiro periodo da enunciação do problema, o que se faz multiplicando os dous termos deste periodo quando estão em razão directa um pelo outro, e dividindo um pelo outro quando estão em razão inversa.

1.º Caso. Regra directa. Divide-se os termos do primeiro periodo um pelo outro, e substitue-se este ultimo por 1. No exemplo 4º, 4 obreiros fazem 20 braças de trabalho, quantos farão 9?

Com menos obreiros, menos trabalho se faz; dividiremos 20 por 4 porque 4 obreiros fazendo 20 braças, 1 obreiro faz a quarta parte, isto é $\frac{20\ b}{4}$; e nove obreiros fazem evidentemente 9 vezes mais trabalho que 1, logo o trabalhos dos 9 obreiros será $\frac{20\times9}{4}=5\times9=45$. braças.

2.º Caso. Regra inversa. Multiplica-se um pelo outro os dous termos do primeiro periodo. No 5º exemplo 3 obreiros fizeram um trabalho em 15 horas, em quantas 5 obreiros fazem o mesmo trabalho? 15 horas foram suficientes para 3 obreiros fazerem um certo trabalho, como, quanto menos obreiros se empregam, mais horas se gastam para fazer o mesmo trabalho, multiplicaremos 3 por 15. Pois que tres obreiros empregaram 15 horas a fazer um certo trabalho, 1 obreiro empregaria 3 vezes mais tempo para fazer o mesmo trabalho, isto é $15^h\times3$; os 5 obreiros devem empregar 5 vezes menos tempo que um obreiro, logo $\frac{15\times3}{5}=3\times3=9$ horas é o tempo empregado pelos 5 obreiros. Em todos os casos o termo que se deve reduzir á unidade no primeiro periodo é o que é homogeneo, ou de mesma especie, que o termo dado no segundo periodo.

Exemplo. Se 10 obreiros podem acabar um trabalho em 12 dias, quantos obreiros são precisos para fazer o mesmo trabalho em 3 dias. Quanto mais obreiros se empregam menos tempo se gasta no mesmo trabalho, logo 15 deve ser multiplicado por 10.

Pois que 12 horas são precisas para 10 obreiros fazerem um certo trabalho, para que este mesmo trabalho seja feito em uma hora devemos empregar 12 vezes mais trabalhadores, 12×10 é o numero de obreiros que podem fazer o mesmo trabalho em 1 hora; para fazel-o em 3 horas bastam trez vezes menos obreiros, logo o numero de obreiros que procuramos é $\frac{12\times10}{3}=\frac{120}{3}=40$.

(31) No commercio emprega-se uma abreviação da regra de tres que é muito util para achar com facilidade o preço de qualquer quantidade de mercadoria quando se sabe o preço de um dos artigos.

Esta abreviação se faz quando o 1º termo de uma porporção é a unidade, o que reduz o calculo a uma simples multiplicação.

Exemplo 1.° O preço de uma toesa de uma fasenda qualquer sendo 12^l»2^s»$3^d\,\frac{2}{11}$, qual é o preço de 12 toesas, 5 pés, 8 pollegadas da mesma fazenda? A proporção aqui é evidentemente

$$1\text{ t.} : 12\text{ t. } 5\text{ pé } 8\text{ p.} :: 12\text{ l. } 2\text{ s. } 3\text{ d. }\frac{2}{11} : X$$

e como o primeiro termo é a unidade

$$X = (12\text{ t. } 5\text{ p. } 8\text{ p.}) \times \left(12\text{ l. } 2\text{ s. } 3\text{ a. }\frac{2}{11}\right)$$

isto é temos de multiplicar um numero concreto por outro, ou pelo numero de unidades e partes de unidades representadas por um numero concreto considerado como abstracto

$$\begin{array}{l}
12\text{ l. } 2\text{ s. } 3\text{ a. } \frac{2}{11} \\
12\text{ t. } 5\text{ p. } 8\text{ po.} \\
\hline
145\text{ l. } 7\text{ s. } 2\text{ d. } \frac{2}{11} = \text{preço de 12 toesas} \\
10 \text{ » } 1 \text{ » } 10 \text{ » } \frac{43}{66} = \text{preço de 5 pés} \\
1 \text{ » } 6 \text{ » } 11 \text{ » } \frac{2}{99} = \text{preço de 8 pollegadas.} \\
\hline
156\text{ l. } 15 \text{ » } 11 \text{ » } \frac{160}{198} = \text{preço de 12 t. 5 pés 8 p.}
\end{array}$$

Para achar o preço de 12 toesas multiplicamos o preço de uma toesa por 12.

Para achar o preço de 5 pés, devemos observar que 1 pé é $\frac{1}{6}$ de toesa, e que por tanto 5 pés$=\frac{5}{6}$ da toesa, por tanto o preço de 5 pés, é igual $\frac{5}{6}$ do preço de 1 toesa, isto é, de 12^l, 2^s, $3^a\,\frac{2}{11}$

Para achar o preço de 8 pollegadas, devemos tomar $\frac{8}{72}$ do preço da toesa, porque 1 pollegada $=\frac{1}{72}$ de toesa. Esta abreviação da regra de tres é o que se chama multiplicação de complexos por complexos, o que é um absurdo, pois não podemos tomar, por exemplo, 5 varas, 5$000 R. de vezes; e de facto já sabemos que um numero concreto não pode ser multiplicado senão por um numero abstracto.

A divisão de um numero complexo por um numero inteiro abstracto fornece um methodo de simplificar a multiplicação de um numero complexo por outro inteiro ou complexo.

1.° Multiplicando complexo, multiplicador imcomplexo.

Seja proposto multiplicar $2^l\ 15^s\ 7^d\frac{1}{2}$, por 153 tonelladas, isto é determinar o preço de 153 tonelladas, custando cada uma 2^l, 15^s, $9^d\frac{1}{2}$. E' evidente que se comprarmos 153 tonelladas pelo preço de 2^l, 15^s, $7^d\frac{1}{2}$ cada uma, podemos fazer pagamento desta somma, dando primeiro por cada tonellada 2^l, depois 10^s, por cada uma, e depois mais 5^s por cada uma, mais 6 pence por cada um, e finalmente 1 penny, e $\frac{1}{2}$ penny por cada uma. Estas sommas addicionadas importam em $2^l\ 15^s\ 7^d.\frac{1}{2}$ por cada tonellada.

Podemos dispôr o calculo do modo seguinte:

153 tonelladas á 2^l cada uma, importam em.	L 306, 0^s » 0^d
10 shillings é o mesmo que $\frac{1}{2}$ libra, por tanto 153 tonelladas à 10^s cada uma, importam em $\frac{153^l}{2}$, isto é em . . .	76^l, 10 » 0
5 shillings, é a metade de 10 shillings, 153 tonelladas á 5^s cada uma, custam a metade do preço do mesmo numero de tonellada á 10^s, isto é a metade de 76^l, 10^s=.	38^l, 5^s, » 0
6 pence é a metade de um shilling, por tanto 5^s valem 10 vezes 6 pence, e 6 pence valem $\frac{1}{10}$ de 5s; 153 tonelladas á 6 pence cada uma, custam $\frac{1}{10}$ do que custam á 5s cada uma, isto é $\frac{1}{10}$ de 38^l, 5^s.	5^l, 16^s, 6^d
$1\frac{1}{2}$ penny ou $\frac{3}{2}$ de 1 penny é o mesmo que $\frac{1}{4}$ de 6 pence $\left(\frac{12}{2}\text{ penny}\right)$ 153 tonelladas á $1\frac{1}{2}$ penny cada uma custam $\frac{1}{4}$ do que custam à 6 pence cada uma, isto é, $\frac{1}{4}$ de 5^l, 16^s, 6^d.	0, 19^s, $1^d\frac{1}{2}$
Somma	425^l » 10^s, $7^d\frac{1}{2}$

este é o importe de 153×2^l, 15^s, $7\frac{1}{2}^d$

Podemos escrever esta operação do modo seguinte—

L 153,=Preço de 153 tonelladas a 1^l por tonellada.

$2^l = 2\times 1^l = 306.\ 0^s,\ 0^d$ =preço de 153 tonelladas a 2^l—

$10s = \frac{1}{2}$ de $1^l = 76.\ 10^s,\ 0$ =preço de » » a $0.\ 10^s$

$5_s = \frac{1}{2}$ de $10^s = 38.\ 5^s,\ 0$ =preço de » » a $0,\ 5^s$»

$6^d = \frac{1}{10}$ de $5^s = 3,\ 16^s,\ 6^d$=preço de » » a $0,0,6^d$

$1^d\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de $6^d = 0,\ 19^s,\ 1\frac{1}{2}$ =preço de » » a $0^s,\ 1\frac{1}{2}$

$425^l,\ 15^s,\ 7\frac{1}{2}{}^d$ preço de 153 ton.a $2^l,\ 15_s\ 7\ \frac{1}{2}$

Exemplo 2.° Em quanto importam 1735 libras, ao preço de $9^s,\ 10^d\frac{3}{4}$, cada libra?

O preço $9.^s,\ 10^d\ \frac{3}{4}$, pode ser decomposto do modo seguinte $5^s + 4^s + 10^d + \frac{1}{2}{}^d + \frac{1}{4}{}^d$. Ora $5^s = \frac{1}{4}$, de libra sterlina, $4_s = \frac{1}{5}{}^l$, $10^d = \frac{1}{6}$ de 5^s, $\frac{1}{2}{}^d = \frac{1}{20}$ de 10^d, e $\frac{1}{4}{}^d = \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}{}^d$

L. 1756, preço de 1735^l á 1^l cada uma

$5^s = \frac{1}{4}$ de $1^l = 433^l.13^s.0^d$. preço de 1735^l a 0^l»5^s»0^d

$4 = \frac{1}{5}$ de $1^l = 347^l,\ 0^s,\ 0^d$ » » 0^l»4^s»0^d

$10^d = \frac{1}{6}$ de $5^s = 72^l,\ 5^s,\ 10^d$ » » 0^l»0^s»10^d

$\frac{1}{2}{}^d = \frac{1}{20}$ de $10^d = 3,\ 12^s,\ 3\frac{1}{2}$ » » 0^l»0^s»$0^d\ \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}{}^d = \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}{}^d = 1,\ 16,\ 1^d\frac{1}{4}$ » » 0^l»0^s»$0^d\ \frac{1}{4}$

858» 9s $3^d\ \frac{1}{4}$ p. d 1735^l, á 9^s»$10^d\frac{3}{4}$

Este methodo é o das partes aliquotas porque consiste em decompor o numero de unidades de cada classe em partes aliquotas, ou da unidade principal, ou umas das outras. Não se pode dar regras para effectuar esta decomposição, só com a practica é que se aprende a fazer esta operação do melhor modo para cada caso particular.

2.° Multiplicador complexo, multiplicando complexo, ou incomplexo.

Exemplo: a vara de uma certa fazenda custa 65^l, 17^s, 11^d, pede-se o preço de 39 varas, e $\frac{7}{8}$?

Como uma vara custa 65^l, 17^s, 11^d, segue-se que 39 $\frac{7}{8}$ varas, devem custar 39 vezes 65^l, 17^s, 11^d, mais $\frac{7}{8}$ de 65^l, 17^s, 11^d, isto é devemos multiplicar primeiro 65^l, 17^s, 11^d, por 39, e depois por $\frac{7}{8}$.

A primeira multiplicação sabemos fazer—

65^l. 17^s, 11^d, é o preço de 1 vara
39^l é de 39 varas a 1^l por vara
$65 \times 39 = 2535$, 0^s, 0^d = o preço de 39^v. á 65^l por cada $v.^a$
$10_s = \frac{1}{2}$ de $1^l = 19^l$. 10^s. 0^d = » » 0, 10^s, 0^d—
$5_s = \frac{1}{2}$ de $10^s = 9^l$. 15^s. 0^d = » » 0, 6^s, 0^d
$2^s = \frac{1}{5}$ de $10_s = 3^l$. 18^s. 0^d = » » 0, 2^s, 0^d
$6^d = \frac{1}{4}$ de $2^s = 0^l$. 19^s. 6^d = » » 0, 0, 6^d
$3^d = \frac{1}{3}$ de $6^d = 0^l$. 6^s. 6^d = » » 0, 0, 2^d
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ de 1 v. $= 32^l$ 18^s $11^d\frac{1}{2}$ pr. de $\frac{4}{8}$v. á 65^l » 17^s » 11^d
$\frac{2}{8} = \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ v. $= 16$, 9^s. 5 $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{8}$ á » »
$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ vara $= 8$, 4^s, $8^d\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}$ à » »

2627^l, 11^s, $11^d\frac{1}{8}$ preç. de 39^v $\frac{7}{8}$ à 65^l, 17^s, 11^d

As 7 primeiras parcellas nos dão o resultado da multiplicação de 65^l, 17^s, 11^d, por 39, resta achar o producto d'esta quantia por $\frac{7}{8}$, esta fracção pode ser decomposta do modo seguinte $\frac{4}{8}$, ou $\frac{1}{2}$, mais $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$, mais $\frac{1}{8}$, para achar este producto devemos tomar a metade de 65^l, 17^s, 11^d, mais a metade d'esta metade, e mais ainda a metade d'esta ultima metade, e é o que nos dão as 3 ultimas parcellas.

Exemplo 2.º Seja proposto achar o preço de 69^t. 4 pés, 11 poll. de uma obra, cada toesa custando 25^l, 19^s, 6^d.

25^{l}, 19^{s}, 5^{d} = o preço de uma toesa

69^{lib}. = o preço de 69 toesas a 1 ^{lib}. cada toesa

$69 \times 25 = 1725^{l}$, 0^{s} » 0^{d} = o preço de 69 toesas á 25^{l}, 0^{s}, 0^{d}

$10^{s} = \frac{1}{2}\,{}^{l} = 34$ » 10 » 0 = 0 » 10 » 0

$5^{s} = \frac{1}{2}$ de $10^{s} = 17$ » 5 » 0 = » » 0 » 5 » 0

$2^{s} = \frac{1}{5}$ de $10^{s} = 6$ » 18 » 0 = » » 0 » 2 » 0

$2^{s} = \frac{1}{5}$ de $10^{s} = 6$ » 18 » 0 = » » 0 » 2 » 0

$4^{d} = \frac{1}{6}$ de $2^{s} = 1$ » 5 » 0 = » » 0 » 0 » 4^{d}

$1^{d} = \frac{1}{4}$ de $4^{d} = 0$ » 5 » 9^{d} = » » 0 » 0 » 1^{d}

$3^{pes} = \frac{1}{2}$ de t. $= 12^{l}$ » 19^{s} » $8^{d}\,\frac{1}{2}$, preç. de 3 pés a 25^{l}, 19^{s}, 5^{d} cada t.

$1^{p} = \frac{1}{3}$ de $3^{p} = 4$ » 6 » $6\,\frac{5}{6}$ — 1 pé » »

$6^{pol} = \frac{1}{2}$ de $1^{pe} = 2$ » 5 » $5\,\frac{5}{12}$ — 6 pol. » »

$3^{pol} = \frac{1}{2}$ de $6^{po} = 1$ » 1 » $7\,\frac{12}{24}$ — 3 pol. » »

$1^{po} = \frac{1}{3}$ de $3^{po} = 0$ » 7 » $2\,\frac{41}{72}$ — 1 pol. » »

$1^{l} = \frac{1}{3}$ de $3^{p} = 0$ » 7 » $2\,\frac{41}{72}$ — 1 pol. » »

1813^{l}, 5^{s}, $4^{d}\,\frac{48}{72}$ preç. de 69^{t}, 4^{pes}, 11_{p} a 25^{l}, 19^{s}, 5^{d}

Exemplo 3°. Seja proposto determinar quanto podemos comprar de uma certa mercadoria com 25^{l}, 19^{s}, 5^{d}, custando 69^{t}, 4^{p}, 11^{pol}, cada libra;

1 libra compra 69 t., 4 p., 11 pol.
25^{t}: valem 25^{l}; a 1 libra cada toesa
$69 \times 25 = 1725^{t}$ é o que se compra com 25^{l}, a 69^{t}, por libra

$5^{pe} = \frac{1}{2}$ t. $= 22^{t}$» 3^{pe}» 0»	0^{t}, 3^{p}, por libra
$1^{pe} = \frac{1}{3}$ de $3^{p} = 4$» 1^{p} 0»	0» 1^{pe} »
$6^{po} = \frac{1}{2}$ pé $= 2$» 0» 6»	0» 1^{pe} 6^{pol} »
$3^{p} = \frac{1}{2}$ de $6^{p} = 1$» 0» 5»	0» 0» 3^{pol} »
$2^{p} = \frac{1}{2}$ de $6^{p} = 0$» 4» 2»	2^{p}

$10^{s} = \frac{1}{2}$ l. $= 34$» 5» $5^{s}6^{l}$, é o q' se compra com 10^{s}, a $69^{t}4_{p}^{e}$, 11_{p}^{o} a l.

$5^{s} = \frac{1}{2}$ de $10^{s} = 17$» 2» 8^{p}» 9^{l}	5^{s}
$2^{s} = \frac{1}{5}$ de $10^{s} = 6$» 5» 10» $8\frac{2}{6}$	2^{s}
$2^{s} = \frac{1}{5}$ de $10^{s} = 6$» 5» 10» $8\frac{2}{5}$	2^{s}
$4^{d} = \frac{1}{6}$ de $2^{s} = 1$» 0» 11» $9\frac{2}{5}$	4^{d} a
$1 = \frac{1}{4}$ de $4^{d} = 0$» 1» 8» $11\frac{2}{20}$	1^{d}

1813^{t}, 1^{pe}, 7^{po}, $14^{l}\frac{11}{2}$.

é o que se compra com 25^{l}, 19^{s}, 5^{d}, a 69^{t}, 4^{p}, 1^{p}, 1^{t}.

E' preciso notar que n'este ultimo exemplo os factores são os mesmos, que os do exemplo anterior, e que entretanto os resultados differem um do outro pela natureza da unidade, e pelas suas subdivisões: Parece pois que o principio estabelecido na theoria da multiplicação, que o producto de dous factores é o mesmo, seja qual for o que se toma para multiplicador não tem lugar quando se tracta de numeros complexos. Para que o principio seja applicavel à dous numeros complexos é preciso conceber cada um d'elles redusido a um numero fraccionario da unidade principal correspondente, e então o producto dos dous numeros será sempre o mesmo, quer se tome um, quer se tome o outro, por multiplicador, fazendo abstração da natureza das unidades do producto, que deve ser differente em cada caso, porque da definição da multiplicação resulta que todas as vezes que empregamos numeros concretos o producto e o multiplicando devem ser da mesma natureza, em quanto que o multiplicador, ainda que expresso em numeros concretos, deve sempre ser considerado como um numero abstracto que indica quantas vezes devemos repetir o multiplicando, ou que partes d'este devemos tomar. Quando temos de multiplicar dous numeros concretos devemos ter muito cuidado em determinar qual dos dous é o multiplicando, o que não é difficil porque deve ser da mesma natureza que o producto, e que a natureza d'este é dada pela questão.

(32) Quando na regra de tres o 2° termo da proporção é a unidade, tambem o calculo fica redusido n'este caso a uma simples divisão; divisão de dous numeros concretos complexos, ou incomplexos, de differentes especies, o que é um absurdo tomado ao pé da letra, mas que se explica como um modo abreviado de fallar como á multiplicação de um numero concreto por outro. Temos dous casos: o divisor pode ser complexo, ou incomplexo.

1.° Caso. Divisor incomplexo: considera-se como um numero abstracto, e effectua-se a divisão do dividendo pelo divisor, redusindo o quociente á unidades principaes, e ás subdivisões destas, da mesma natureza que as do dividendo.

2.° Caso. Divisor complexo: converte-se em um só numero fraccionario de sua unidade principal, multiplica-se o dividendo pelo denominador da fracção, e divide-se o producto pelo numerador da fracção divisora, redusindo sempre o quociente á unidades principaes, e as subdivisões destas unidades, da mesma natureza que as do dividendo.

Exemplo 1.° Pede-se o preço de uma toesa de certo trabalho, supponudo que se tem pago 25469^l, 19^s, 11^d, por 568 toesas do mesmo trabalho.

A regra de tres estabelece a seguinte proporção.

$$568^t.: 1^t.:: 25469^l,\ 19^s,\ 11^d: X$$

$$X=\frac{25469^l,\ 19^s,\ 11^d,}{568}=44^l,\ 16^s,\ 9^d$$

Por tanto tudo se reduz a dividir 25469^l, 19^s, 11^d, por 568 considerado como um numero abstracto, o que sabemos fazer pela regra da divisão de complexos.

Exemplo 2.° 258^l, 1^m, 7^{on}, 5^{gr}. de uma certa mercadoria importaram em 3259^l, 17^s, 10^d, pergunta-se quanto custa cada libra (peso) d'esta mercadoria. Temos de dividir 3259^l, 17^s, 10^d, por 258^l, 1^m, 7^{on}, 5^{gr}.

$258^l, 1^m. 7^{on}, 5\ g$: 1 libra $128 \times 1^e = 128^l$

2	2
516^m	2 marcos
1^m	8 $\quad 3259 \times 128 = 417152^l = 3259 \times 128$
517^m	16^{onc}.
8	8 $\quad 10^s \frac{1}{2}\ 1 \quad = \quad 64^l = 10^s \times 12$
4136^{onc}.	128^{gr}. $\quad 5^s \frac{1^d}{2}\ 10^s \quad = \quad 32 = 5^s \times 15$
7	$2^s \frac{1^d}{5}\ 10^s \quad = \quad 12,16^s \quad 2^s \times 2^s$
4145	$6^d \frac{1^d}{4}\ 2^s \quad = \quad 3,\ 4^s \quad 6^d \times 12^d$
8	$3\ \frac{1^d}{2}\ 6^d \quad = \quad 1.\ 12 \quad 3^d \times 12^d$
53144 gr.	
5	$1\ \frac{1^d}{3}\ 3^d \quad = \quad 0,\ 10,8 \quad 1^c \times 19$
33149^s	$417266^l, 2^s, 8^d = 3330,17,\ 10 \times 128$

$417266, 2^s, 8^d \mid 33149$

83776	$12^l, 11^s\ 9^d$
19478	
20	
389562	
58072	
24923	
12	
299084	
743	

Depois de ter convertido o divisor em um numero fraccionario, redusindo à unidades da mesma classe, e dividindo-o pelo numero de unidades d'esta classe que contém a unidade principal, temos para divisor $\frac{33149}{128}$, pois uma libra tem 128 grãos. O calculo fica então redusido á dividir $3259^l, 17^s, 10^d$ por $\frac{33149}{128}$, e para isto é preciso multiplicar o dividendo por 128, e dividir o producto $417366, 2^s, 8^d$ por 33149 o que entra no primeiro caso, e temos

$$12^l, 11^s, 9^d\ \frac{343}{33149}$$

Todas as vezes que o dividendo e o divisor são da mesma natureza a enunciação da questão indica qual a natureza do quociente; mas quando o dividendo e o divisor são de naturezas differentes, o quociente deve ser da mesma natureza que o dividendo porque então o divisor é considerado como um numero abstracto.

2.ª REGRA DE TRES COMPOSTA.

(33) A regra de tres composta é o methodo de resolver por uma só proporção questões que pela regra de tres simples pedem duas ou mais proporções. A regra é a seguinte. 1.º Escrevem-se os termos dados conforme determina a regra de tres, considerando o 3.º termo como commum a todas estas proporções ; 2.º multiplicam-se todos os primeiros termos uns pelos outros, e todos os segundos termos uns pelos outros : 3.º divide-se o producto dos segundos termos multiplicado pelo 3.º termo, pelo producto dos primeiros termos. Quando acham-se os mesmos numeros no divisor e no dividendo, devem ser supprimidos. Esta regra é uma simples applicação da theoria das proporções. Razão composta é a que resulta da multiplicação de duas ou mais razões simples. O producto de todos os antecedentes e o producto de todos os consequentes das razões simples formam respectivamente o antecedente e o consequente da razão composta. Uma cousa está em razão composta com outras muitas cousas de differentes especies, quando qualquer alteração n'uma destas, produz uma alteração na primeira ; e quando para determinar esta precisamos tomar em consideração ao mesmo tempo todas as outras. Todas as vezes que as razões empregadas na solução de um problema, não são simples , mas compostas de outras razões , devemos fazer uso da regra de tres composta.

Exemplo 1.º Quantos homens podem abrir uma trincheira de 135 braças de comprimento em 8 dias , quando 16 homens cavam 54 braças da mesma trincheira em 6 dias.

Vemos que o numero de homens que procuramos determinar está em razão composta das braças e do tempo: despresando o tempo em que se faz o trabalho , podemos fazer uma simples proporção.

A quantidade do trabalho está em razão directa do numero de trabalhadores , despresando o trabalho e tomando em consideração só o tempo , temos outra proporção simples , o numero de trabalhadores está em razão inversa do tempo.

Dias	Braças	Homens
6	54	16
8	135	X

Por tanto para fazer 135 braças de trabalho são precisos mais homens do que para fazer 54 braças, e para fazer o mesmo trabalho em 6 dias são precisos mais homens do que para fazel-o em 8 dias; e temos as duas proporções seguintes:

$$54^b : 135^b :: 16 : X$$
$$8^d : 6^d :: 16 : X$$

multiplicando os antecedentes das primeiras razões, e os consequentes das mesmas razões uns pelos outros, temos a proporção composta.

$$54\times 8 : 135\times 6 :: 16 : X$$
$$X=\frac{135\times 6\times 16}{54\times 8}=\frac{135\times 2}{9}=15\times 2=30 \text{ homens}$$

Este problema pode ser resolvido por duas proporções simples, e então

$$54^b:135::16:X$$
$$X=\frac{135\times 16}{54}=40$$

isto é considerado o tempo como o mesmo, se 16 homens fazem 54^b de trabalho em 6 horas, serão precisos 40 para fazer 135 braças no mesmo tempo.

Agora temos esta outra proporção. Se 40 homens fazem 135 braças de trabalho em 6 horas, quantos serão precisos para fazer o mesmo trabalho em 8 horas, evidentemente temos—

$$8 : 6 :: 40 : X$$
$$X=\frac{40\times 6}{8}=5\times 6=30 \text{ homens}$$

Exemplo 2.º Dous obreiros empregaram 3 horas a fazer 7 metros de obra; quantos metros da mesma obra farão 15 obreiros durante 11 horas?

Pela regra dada acima temos para resolver este problema as duas proporções seguintes

$$2 : 15 :: 7 : X$$
$$3 : 11 :: 7 : X$$

compondo $2\times3 . 11\times15 : 7 : X$

$$X=\frac{11\times15\times7}{2\times3}=\frac{11\times5\times7}{2}=\frac{385}{2}=192,5$$

Estas proporções podem ser redusidas a uma só do modo seguinte:

2 obreiros trabalhando 3 horas fazem o mesmo que 1 obreiro em 6 horas, e 15 obreiros trabalhando 11 horas fazem o mesmo que 1 trabalhando $15\times11^h=165$ horas: a questão reduz-se pois a esta outra; um obreiro gasta 6^h á fazer 7 metros de uma obra, quantos metros da mesma obra farão em 165 horas? e temos para resolvel-a a seguinte proporção:

$$6 : 165 :: 7 : X$$
$$X=\frac{165\times7}{6}=\frac{1155}{6}=192,\ 5 \text{ metros.}$$

Exemplo 3.º Uma guarnição, de 3600 homens tem pão para 35 dias na razão de 24 onças por dia, quantas onças por dia se deverá dar no caso de ser ella augmentada para 4800 homens durante 45 dias, para que a mesma quantidade de pão chegue?

A ração deve ser menor quanto maior for o numero de homens, e tambem quanto maior for o numero de dias, logo temos as proporções seguintes:

$$4800 : 3600 :: 24 : X$$
$$45 : 35 :: 24 : X$$

por tanto

$$4800\times45 : 3600\times35 : 24 : X$$
$$X=\frac{3600\times35\times24}{4800\times45}=\frac{36\times35\times24}{48\times45}$$
$$\frac{2\times2\times3\times3\times7\times5\times3\times2\times2\times2}{3\times2\times2\times2\times2\times5\times3\times3\times3}=7\times2=14 \text{ onças}$$

Exemplo 4.º Dous obreiros trabalhando 3 horas por dia fizeram em 5 dias 90 metros de um certo trabalho; quantos metros do mesmo trabalho poderão fazer 3 obreiros trabalhando 7 horas por dia em dous dias?

Obreiros.	Horas.	Dias.	Metros.
2.	3.	5	90
3.	7.	2.	X

O que queremos saber é o numero de metros que podem fazer os 3 obreiros, logo, o 3.º termo das proporções é 90 metros, e temos para 2.ª razão de cada proporção 90 : X.

Não nos importando com as horas e dias, é evidente que quanto maior for o numero de obreiros mais metros de trabalho se farão, por tanto, se 2 obreiros fazem 90 metros, 3 devem fazer mais, e a primeira proporção é 2: 3::90: X. O numero de dias de trabalho é tanto maior quanto maior for o numero de metros, por tanto se em 5 dias se faz 90 metros de trabalho, em 2 dias se deve fazer menos, logo a segunda proporção é 5: 2 : : 90 : X.

Quanto maior for o trabalho mais horas deverão ser empregadas em fazel-o, por tanto se em 3 horas se faz 90 metros de trabalho, em 7 se deverá fazer mais, a 3.ª proporção é pois 3:7 : : 90 : X. Por tanto reunindo estas proporções temos

$$2 : 3 : : 90 : X$$
$$5 : 2 : : 90 : X$$
$$3 : 7 : : 90 : X$$

Logo fazendo a proporção composta temos

$$2\times5\times3 : 3\times2\times7 : : 90 : X$$
$$X=\frac{3\times2\times7\times90}{2\times5\times3}=\frac{7\times90}{5}=7\times18=126 \text{ metros}$$

Podemos chegar ao mesmo resultado do modo seguinte:

2 obreiros fazem o mesmo trabalho em 5 dias, que 2×5 obreiros em 1 dia.

5×2 obreiros fazem o mesmo trabalho em 3 horas que $5\times2\times3$ obreiros em 1 hora.

3 obreiros fazem em 2 dias o mesmo trabalho que 3×2 obreiros em 1 dia.

3×2 obreiros fazem o mesmo trabalho em 7 horas que $3\times2\times7$ obreiros em 1 hora.

Se $5\times2\times3$ obreiros fazem n'uma hora 90 metros, quantos farão $2\times3\times7$ obreiros no mesmo tempo? Temos a proporção seguinte.

$$5\times2\times3 : 2\times3\times7 :: 90. X$$
$$X=\frac{2\times3\times7\times90}{5\times2\times3}=18\times7=126 \text{ metros.}$$

Os problemas acima podem ser resolvidos sem empregar as proporções. No segundo exemplo podemos achar o numero

X de metros empregando o seguinte raciocinio; tendo successivamente em consideração o numero de obreiros, e o das horas.

1.° Para achar o trabalho de 15 obreiros conhecendo o de 2 diremos, se 2 obreiros fazem 7^m de trabalho 1 deverá fazer a metade de 7^m, ou $3,^m 5$, e os 15 obreiros deverão fazer 15 vezes o trabalho de 1, isto é $15 \times 3^m, 5 = 52^m 5$. Por tanto 15 obreiros fazem 52^m, 5, em 3 horas.

2.° Para dedusir do trabalho 52^m, 5, feitos em 3 horas, o trabalho que seria feito em 11 horas nas mesmas condições, diremos: Se a obra feita em 3 horas é de 52^m, 6 a obra feita em 1 hora será de um terço de 52^m, 5, ou $17^m 5$, e a obra feita em 11 horas, será igual a 11 vezes $17^m 5$ ou $192^m 5$. Logo os 15 obreiros farão 192^m, 5 em 11 horas.

Regra de Companhia ou Sociedade.

(34). O fim desta regra é dividir um numero em partes que tenham entre si relações dadas. Deriva o seu nome do emprego frequente que della se faz nas transacções mercantis quando se tracta de repartir pelos socios de uma companhia de negocio, o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada socio.

Para conceber esta regra em toda sua generalidade, vamos resolver a seguinte questão.

Divida-se o numero 630 em tres partes que sejam entre si como os numeros 2, 3, 4; isto é, taes que a razão da 1.ª para a segunda seja, 2: 3; da 2.ª para a 3.ª; 3 : 4; e da 1.ª para a 3.ª; 2: 4.

A somma das tres partes é 630, a razão entre esta somma, e cada uma de suas partes deve ser a mesma que a razão entre 9 somma dos tres numeros, á cada um dos numeros dados: por tanto temos as tres proporções.

$$9 : 2 :: 630 : X$$
$$9 : 3 :: 630 : Y$$
$$9 : 4 :: 630 : Z$$

e por consequencia —

$$X = \frac{630 \times 2}{9} = 140$$
$$Y = \frac{630 \times 3}{8} = 210$$
$$Z = \frac{630 \times 4}{9} = 280$$
$$\overline{630} = \text{somma das 3 partes.}$$

Por tanto basta multiplicar a razão $\frac{630}{9}$ por cada um dos numeros proporcionaes dados. O numero $\frac{630}{9}$, é o numero que se tem de repartir dividido pela somma dos numeros proporcionaes.

Para repartir os ganhos, ou as perdas de uma companhia, devemos tomar como razão a somma total do lucro ou da perda, dividida pela somma das partes proporcionaes de todos os socios; e depois para achar o quinhão de cada socio devemos multiplicar este quociente fixo, pela parte proporcional de cada um.

Exemplo 1.° Duas pessoas negoceam de sociedade, a primeira A. entra com 1:500$000 rs., a segunda B., com 2:200$000 rs., e ganham no negocio 5:000$000 rs.: quanto cabe do ganho á cada socio?

Cada socio deve receber uma quantia proporcional á sua entrada. Por tanto, o problema está reduzido á repartir 5.000$000 r. em duas partes que estejam entre si como os numeros 1:500$000, e 2:200$000. Tomando a somma das partes proporcionaes temos, 1:300$000+2:200$000=3:500$000; logo a razão é $\frac{5000000}{3500000}=\frac{50}{35}=\frac{10}{7}$. Para achar o lucro de cada socio multiplica-se a entrada de cada um por $\frac{10}{7}$

Ganho de A=1:500$000$\times\frac{10}{7}$=1:857$142 $\frac{6}{7}$

Ganho de B=2:200$008$\times\frac{10}{7}$=3:142$857 $\frac{1}{7}$

Somma 5:000$000

Podemos resolver este problema pela regra de tres. A somma total das entradas, ou das partes proporcionaes, está para o lucro da companhia, como a parte de um dos socios está para a parte de seu ganho. No caso acima

3:500$000 : 5:000000 :: 1500000 : X

7 : 10 :: 1500000 : X

X=1500000$\times\frac{10}{7}$=1:857$142$\frac{6}{7}$

quinhão de A.

7:10 :: 2200000 : R

X=3200000$\times\frac{10}{7}$=3:142$857 $\frac{1}{7}$

quinhão de B.

Exemplo 2.º As entradas de 3 socios são 300^f, 500^f e 700^f; o ganho total é 126^f,
qual é o ganho de cada socio?

A entrada total é 1500^f, o lucro é 126^f

a razão é pois $\frac{126}{1500}$, ou 0^f084: logo—

o ganho do 1.º socio é $300 \times 0^f,084 = 25^f.\ 2$
o ganho do 2.º » é $500 \times 0^f,084 - 42^f$.
o hanho do 3.º » é $700 \times 0^f,084 = 58^f,\ 8$

$$126^f$$

Pelas proporções temos—

$1500 : 126 :: 300 : X$, $1500 : 126 :: 500 : Y$, $1500 :: 126 : :$
$700 : Z$

$$X = \frac{126 \times 300}{1500} = \frac{126 \times 3}{15.} = \frac{126}{5} = 25,^f\ 2$$

$$Y = \frac{126 \times 500}{1500} = \frac{126 \times 5}{15} = \frac{126}{5} = 42^f$$

$$Z = \frac{126 \times 700 \times}{1500} = \frac{126 \times 7}{15} = \frac{882}{15} = 58,^f\ 8$$

(35). A regra de companhia chama-se composta quando os capitaes são empregados por differentes tempos: isto é, quando os socios entre os quaes tem de ser dividido os lucros ou as perdas não deixaram na sociedade os seus fundos o mesmo tempo todos.

Exemplo 3.º Duas pessoas entraram em sociedade para um certo negocio, no qual ganharam 36:000$000 rs., mas A que entrou com o capital de 23:000$000 rs. não esteve na sociedade senão 2 annos e 3 mezes, ou 27 mezes. B com a sua entrada de 21:000$000 rs. ficou 3 annos e 3 mezes ou 39 mezes, findou então a sociedade: pergunta se quanto cabe a cada um dos socios?

A. entrou com 23:000$000 rs. durante 27 mezes, o seu lucro durante este tempo é o mesmo que o de um mez com o capital do 23:000$000 rs × 27. B. entrou com 21:000$000 rs durante 39 mezes, o seu lucro neste tempo é o mesmo que o de um mez com o capital de 21:000$000 rs × 39.

Podemos pois redusir o problema a regra de sociedade simples, multiplicando as entradas de cada socio pelo tempo que esteve na sociedade.

rs 23:000$000 × 27 = 621:000$000 rs entrada de A
rs 21:000$000 × 39 = 819:000$000 rs entrada de B

1440:000$000 rs

A razão commum é pois $\frac{36000000}{1440000000}=\frac{36}{1440}=\frac{1}{40}$

Por tanto

O quinhão de A é 621:000$000$\times\frac{1}{40}$=15.525$000 R

O quinhão de B é 819:000$000$\times\frac{1}{40}$=20:495$000 R

35:000$000 R

Exemplo 4.° As entradas de 3 socios são 100f, 250f e 50f, a primeira entrada ficou 3 mezes na sociedade, a segunda 2 mezes, e a terceira 14 mezes, o ganho total é de 126f. Qual é o ganho relativo á cada entrada?

100f. durante 3 mezes é o mesmo que 100f×3 ou 300 f em um mez; 250f durante 2 mezes é o mesmo 250f×2=500f em um mez, 50f durante 14 mezes é o mesmo que 50f×14 ou 700 f durante um mez. A razão commum é pois $\frac{126}{1500}$=0,084—Os lucros são por tanto

300 × 0,084=25f, 2
500 × 0,084=62,f
700 × 0,084=58, 8
126f

Esta mesma regra serve para dividir numeros em partes proporcionaes. Seja proposto dividir 7800 em tres partes que satisfaçam ás condições seguintes.

1.ª parte: 2.ª : : 3120 : 4680. 1.ª parte: 3.ª:: 3250: 4554

Para simplificar estas proporções, dividiremos primeiro 3120, e 4680 pelo seu maior commum divisor 1560, e depois 3250, e 4550, pelo seu maior commum divisor 650, e então teremos as proporções seguintes.

1.ª part.: 2.ª part : 2: : 3. 1.ª part: 2.ª part.: : 5:7 das quaes dedusimos que se a primeira parte é 1, a 2.ª será $\frac{3}{2}$, e a 3.ª $\frac{7}{5}$, as partes pedidas devem ser proporcionaes aos numeros 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, ou ás fracções equivalentes $\frac{10}{10}$; $\frac{15}{10}$, $\frac{14}{10}$, ou aos numeros 10, 15, e 14. A somma dos numeros 10, 15, 14 sendo 39, e o numero que temos de repartir sendo 7800, as partes pedidas acham-se pelas seguintes proporções:

$$39: 7800:10: 1.^a \text{ parte} = \frac{7800\times10}{39} = 200\times10 = 2000$$

$$39: 7809.15: 2.^a \text{ parte} = \frac{7800\times15}{39} = 200\times15 = 3000$$

$$39: 7800;14: 3.^a \text{ parte} = \frac{7800\times14}{39} = 200\times14 = 2800$$

Regra de liga.

(36). A regra de liga divide-se em directa e indirecta. A' directa tem por objecto determinar o valor medio de muitas cousas de differentes valores misturadas em differentes proporções. A incognita n'este caso é o valor do mixto, e os dados, os valores de cada substancia misturada, e a quantidade de cada uma. A indirecta tem por fim achar as quantidades das substancias que entram no mixto quando se conhece o preço da mistura, e sua quantidade, e os preços das substancias misturadas.

Uma quantidade de uma substancia qualquer é representada por um certo numero de unidades. A unidade é sempre uma quantidade determinada de ante-mão por convenção. O valor desta unidade em dinheiro, é o que se chama o seu préço. O preço multiplicado pelo numero que representa a quantidade da substancia, é o valor desta quantidade de substancia. Por exemplo; 3 canadas de vinho á 6$000 réis importam em 18$000 réis; aqui a unidade, é a canada, 3 canadas exprimem a quantidade de vinho, 6$000 R. o seu preço, e 18$000 R., (o preço multiplicado pela quantidade) o valor da quantidade de vinho de que se tracta.

1.º Regra directa. Achar o preço da mistura conhecendo os das substancias misturadas, e a quantidade de cada uma. Para isto, devemos multiplicar o preço de cada substancia pela quantidade, sommar estes productos, e dividir a somma pela quantidade total, ou pela somma das quantidades dos ingredientes, o resultado será o preço procurado.

As quantidades das substancias que entram n'um mixto podem ser avaliadas em pezo ou em volumes; quando é avaliada em pezo a regra se applica sempre, pois o pezo de um composto é sempre igual a somma dos pezos das substancias que o compoem. Quando porém a quantidade é avaliada em volumes, às vezes a regra não tem applicação, porque nem sempre a mistura de dous ingredientes tem um volume igual á somma dos volumes de cada um.

Exemplo 1.º Uma mistura é formada de 20 litros de vinho de 5ˢ ao litro, 30 litros de vinho de 10ˢ, 28 litros de vinho de 14^s, e 12 litros de vinho de 24^s: pergunta-se por quanto se deve vender cada litro da mistura para que não haja perda.

Quantidades.	Preços.	Valores.
20 litros á . .	5^s	$=20\times 5=100^s$
30 » á . .	10^s	$=30\times 10=300^s$
28 » á . .	14^s	$=26\times 14=392^s$
12 » à . .	24^s	$=12\times 24=288^s$
90 litros á . .	X	import. em 1080^s.

O valor do mixto sendo 1080^s, a quantidade 90 litros, suppondo que não houve augmento nem diminuição no volume da mistura; cada litro da mistura deve valer $\frac{1080}{90}=\frac{108}{9}=12^s$.

Quando o volume da mistura não é igual á somma dos volumes das substancias que o compoem, o que acontece muitas vezes, como por exemplo quando misturamos grãos de differentes tamanhos, (milho com arroz), que occupam um espaço menor do que occupavam separadamente, porque os menores occupam os intervallos dos maiores; devemos em lugar de dividir o valor total pela somma dos volumes das substas que entram no composto, dividil-o pelo volume total da mistura que não pode ser determinado senão por medição, ou então pela lei da diminuição ou augmento do volume.

Exemplo 2.° Misturam-se 7 litros de cevada a 14^s ao litrão, com 3 litrões de uma outra especie de cevada de grãos menores á 24^s o litrão; e estes 10 litrões não formam mais depois de misturados do que 8 litrões da mistura; qual deve ser o preço de cada litrão da mistura?

$$\begin{array}{l} 7 \text{ á } 14^s=7\times 14^s=98^s \\ 3 \text{ à } 24^s=3\times 24^s=72^s \\ \hline 10 \;.\;.\;.\;.\;.\; 170^s \end{array}$$

Os 10 litrões ficando redusidos á 8 devemos para achar o preço de cada litrão dividir 170 por 8, logo $\frac{170}{8}=21^s\ 25$. preço procurado.

Esta mesma regra applica-se á liga de metaes preciosos. Nos metaes não consideramos senão os pezos, e o pezo de uma liga é sempre igual à somma dos pezos dos metaes que a formam.

Quando uma liga de ouro com outro metal contém $\frac{8}{10}$ do pezo em ouro puro diz-se que està ao titulo de $\frac{8}{10}$, ou à $\frac{8}{10}$ de fino. Uma barra pezando 100 onças á este titulo contém 80 onças de ouro puro, e 20 de outro metal. O ouro puro sem liga alguma de outro metal suppoem-se constar de 24 quilates, (por tanto um quilate é $\frac{1}{24}$ de qualquer quantidade de ouro puro) cada quilate de 4 grãos, e cada grão de 8 oitavas, (é preciso não confundir o grão e a oitava de quilate com os de pezo). Um marco de ouro sendo puro vale 24 quilates, sendo metade de ouro e metade de outro metal vale 12 quilates. Por tanto o metal vale tantos quilates conforme a proporção de ouro puro que contèm; o ouro de 22 quilates tem 22 partes de ouro puro, e 2 de outro metal. Uma liga contendo 5 partes de ouro puro, e uma de outro metal vale 20 quilates, e o ouro ao titulo de $\frac{8}{10}$ é igual á $\frac{8}{10} \times 24$ quilates, isto é a 19 quilates, e 6 oitavas. Para calcular a quantidade de ouro puro em uma liga de titulo conhecido, multiplicamos o pezo total da liga pelo titulo. Por exemplo 2 marcos de ouro de 22 quilates valem 44 quilates (22×2). Para achar o titulo de uma liga dividimos o pezo de ouro contido na liga pelo pezo total da liga, e redusimos esta porção a quilates, multiplicando-a por 24. Por exemplo, 4 marcos de liga contendo 2 marcos de ouro puro está ao titolo $\frac{2}{4}$, isto é, contém $\frac{2}{4}$ de seu pezo de ouro, multiplicando $\frac{2}{4}$ por 24 temos 12 quilates.

A prata sem liga alguma suppoem-se constar de 12 dinheiros, cada dinheiro de 24 grãos, cada grão de 4 quartos. A prata sendo pura vale 12 dinheiros, tendo 3 partes de prata e 1 de outro metal vale $\frac{3}{4} \times 12 = 9$ dinheiros, tendo metade de prata vale $12 \times \frac{1}{2} = 6$ dinheiros.

Exemplo 3. Querendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21, e 6 de 17, a que quilate se reduz o composto?

Considerando os quilates como preços podemos fazer uso da regra acima.

$$\begin{array}{rcl} 5\times 24 & = & 120 \\ 8\times 21 & = & 168 \\ 6\times 17 & = & 102 \\ \hline 19\times & & 390 \end{array}$$

Dividindo a somma total dos quilates pelo pezo temos $\frac{390}{19}=20\,\frac{10}{19}$ quilates.

2.º Regra inversa. Tem esta por objecto achar as quantidades dos ingredientes que entram n'uma mistura dada.

1. Caso. Achar que quantidade de qualquer numero de ingredientes, sabendo-se o preço de cada um poderá compôr umò mistura de um preço dado.

Seja proposto determinar em que proporções devem ser misturados vinhos de 14^s, e 24^s ao litro para que a mistura vala 17^s o litro. As proporções da misturo devem ser taes que não haja nem ganho nem perda vendendo se a 17^s cada litro da mistura. Cada litro de 14^s que entra na mistura dá $17^s-14^s=5^s$ de ganho, e cada litro de 24^s, dá $24-17^s=7^s$ de perda: para que a perda seja compensada pelo ganho, devemos tomar de cada especie de vinho um numero de litros que multiplicado pela perda, e pelo ganho dê um mesmo numero no resultado. Por exemplo 7 litros do vinho de 14^s, e 3 litros do vinho 24 satisfazem a questão, porque então o ganho será de 7×5^s, e a perda de 3×7^s quantidades iguaes à 21. Como 10 litros da mistura contém 7 litros de vinho do 14^s, e 3 litros de vinho de 24^s cada litro d'esta mistura contém $\frac{7}{10}$ de vinho de 14^s, e $\frac{3}{10}$ de vinhe de 24^s. Podemos dar a regra seguinte:

1.º Escrevem-se os preços dos ingredientes n'uma columna vertical: 2.º Unem-se por linhas curvas o preço de cada simples, que é menor que o da mistura com os do que são maiores, e cada maior preço com os menores: 3.º Escrevem-se as differenças entro o preço da mistura e o de cada simples defronte do preço contrario ao que foi unido: 4.º Então se só uma differença acha-se defronte de algum preço será a quantidade do simples d'aquelle preço, mas se houverem mais de uma differença a somma destas será a quantidade. Unindo o maior preço com o menor, e pondo a differença entre estes preços e o da mistura alternativamente as quantidades que resultam são taes que precisamente tanto se ganha de um lado como se perde de outro, e por tanto os ganhos e as perdas no todo devem ser iguaes. O mesmo se dá entre dous simples quaesquer arranjados do mesmo modo. Seja o numero de simples qual for, e cada um unido com outros, com tanto que seja sempre um de menor valor com um de maior, existirá uma compensação entre as perdas e os ganhos entre dous quaesquer, e por tanto uma compensação completa no todo. E' evidente que questões desta especie admittem um grande numero de respostas, pois tendo-se uma resposta, podemos achar outras multiplicando, ou dividindo cada uma das quantidades achadas por 2, 3, 4, 8. Porque se duas quantidades de dous simples fazem uma compensação de perdas e ganhos, relativamente ao preço da mistura, tambem devem fazer a mesma compensação, o duplo ou o triplo etc., a metade ou terço etc. destas quantidades. Estas questões são chamadas indeterminadas, ou illimitadas.

Exemplo 1.° Um negociante quer misturar vinhos de 17^s 18^s e 22^s por gallon, de modo que a mistura possa ser vendida a 20^s ao gallon, que quantidade de cada especie de vinho deverá tomar?

$$20 \left\{ \begin{array}{l} 17 \\ 18 \\ \\ 22 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ \\ 3+2=5 \end{array} \right.$$

Resposta 2 gallon de 17^s, 2 de 18, e 5 de 22. A differença entre 20 e 17 é 3, escrevemos este numero defronte de 22, a differença entre 20 e 18, é 2, e escrevemos este numero defronte de 22; a diffesença entre 22, e, 20 è 2, e escrevemos este numero defronte de 17 e de 18.

$$\begin{array}{l} 2\times17^s=34^s \\ 2\times18^s=36^s \\ 5\times22=110^s \\ \hline 9\ .\ .\ .\ 180 \quad e \quad \frac{180}{9}=20. \end{array}$$

Exemplo 2.° Um ourives tem ouro de 17, 18, 22, e 24 quilates, quanto deverà tomar de cada um para formar uma liga de 21 quilates?

$$21\begin{cases}17 & 3\\18 & 1\\22 & 3\\24 & 4\end{cases}\qquad 21\left|\begin{array}{c|c}17 & 1\\18 & 3\\22 & 4\\24 & 3\end{array}\right.\qquad 21\left|\begin{array}{c|c}17 & 3+1\\18 & 3+1\\22 & 4+3\\24 & 4+3\end{array}\right.$$

3 de 17. 1 de 18, 3 de 22, e 4 de 24, ou
1 de 17. 3 de 18, 4 de 22, e 3, de 24, ou
4 de 17, 4 de 18, 7 de 22, e 7 24.

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
3\times17^q= & 51^q & 1\times17 = & 17 & 4\times17= & 68\\
1\times18^q= & 18^q & 3\times18 = & 54 & 4\times18= & 72\\
3\times22^q= & 66^h & 4\times22 = & 89 & 7\times22= & 154\\
4\times24^q= & 96^q & 3\times24^q = & 72 & 7\times24= & 168\\
\hline
11 & 231 & 11 & 231 & 22 & 464
\end{array}$$

e 231 dividido por 11, é igual $\frac{231}{11}=21^q$ assim 464 divididos por 22 é igual a 21.

Caso 2.º Quando a mistura ou liga é limitada a uma certa quantidade. Procura-se a resposta como no primeiro caso, e depois faz-se a seguinte proporção; como a somma das quantidades, ou differenças determinadas, està para a quantidade dada da mistura, assim està cada ingrediente achado pelas curvas, para a quantidade pedida de cada um.

Exemplo 3.º Quanto ouro de 15, 17, 18. e 22 quilates deve ser misturado para fazer 40 onças de ouro de 20 quilates.

$$20\left|\begin{array}{c|l}15 & 2\\17 & 2\\18 & 2\\22 & 5+3+2=10.\end{array}\right.$$

e $2+2+2+10=16$. Por tanto

$$16 : 40 :: 2 : X = \frac{40X2}{16} = \frac{40}{8} = 5$$
$$16 : 40 :: 2 : Y = \frac{40X2}{16} = \frac{40}{8} = 5$$
$$15 : 40 :: 2 : Z = \frac{40X2}{16} = \frac{40}{8} = 5$$
$$16 : 40 :: 10 : T = \frac{40X10}{16} = \frac{400}{16} 25$$

Por tanto é preciso misturar 5 onças de ouro de 15, de 17, e de 18 quilates e 25, de ouro de 22 quilates, e de facto $5+5+5+25=40$.

Exemplo 4.º Tomaram-se 100 garrafas com vinho de 75 e 40, e foram vendidos a 60 centimes, quantas garrafas de cada especie entram n'esta mistura.

$$60\left\{\begin{array}{c|c} 40 & 15 \\ 75 & 20 \end{array}\right.$$

$18\times20=55.$

$$55 : 100 :: 15 : X=\frac{100\times15}{85}=42,\ 46$$

$$36 : 100 :: 20 : X=\frac{100\times28}{35}=57,\ 14$$

a mistura levou 43 garrafas de vinho de 40 centimes e 57 garrafas de vinho de 75 centemes.

Exemplo 5.º Um ourives quer fazer uma obra que tenha 8 marcos, de ouro de $20\frac{1}{2}$ quilates, para isto quer ligar duas especies de metal, um de 22 quilates, e outro de 17 quilates. Quanto deve tomar de cada especie.

$$20\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c|c} 17 & 1\ \frac{1}{2} \\ 22 & 3\ \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} 5 : 8 :: 1\frac{1}{2} : X=\dfrac{\frac{8\times3}{2}}{5}=\frac{24}{10}=24 \\[2ex] 5 : 8 :: 3\frac{1}{2} : X=\dfrac{\frac{8\times7}{2}}{5}=\frac{56}{10}=5,^{m}6 \end{array}$$

e $2,^{m}4, \times 5,^{m}6=8$ marcos. . . . .

Caso 3.º Quando um dos ingredientes é limitado a uma certa quantidade. Procede-se como no primeiro caso, e depois faz-se a seguinte proporção.

Como a differença do simples cuja quantidade é dada, esta para o resto das differenças respectivamente, assim está a quantidade dada para cada uma das diversas quantidades pedidas.

Exemplo 6.º Para compor vinho de preço de 64 soldos cada litro, misturando vinhos de 60,^{s} de 66,^{s} e 72,^{s} com 5 litros de vinho de 48^{s}, quanto se deverá tomar de cada especie de vinho?

64	48	8×2=10
	60	8×2=10
	60	16×4=20
	72	16×4=20

e temos as proporções

10 : 10 : : 3 : 5
10 : 20 : : 3 : 6
10 : 20 : : 5 : 6

logo 3 litros de vinho de 60^s, 6 de 66^s, e 6 de 72, com os 3 de 48, formam a mistura de 64^s.

Exemplo 7.° Quanto ouro de 15, de 17, de 22 quilates, deve ser misturado com 5 onças de ouro de 18 quilates, para que a mistura seja de 20 quilates?

20	15	2
	17	2
	18	2
	22	5.+3+2=10

2 : 2 : : 5 onças : 5 onças
2 : 2 : : 5 onças : 5 onças
2 : 10: . 5 onças : 25onças

5 onças de ouro de 15 quilates, 5 onças de 17 quilates, e 25 onças de 22 quilates devem ser unidas ás 5 onças de ouro de 18 qullates.

Regra de conjuncta.

(59). Esta regra tem por objecto determinar a razão de dous numeros cuja razão com outros numeros è conhecida. Por exemplo couhecendo a razão de um numero A, à outro B, e a razão de B, á C, e de C á D, determinar a razão de A á D. Supponhamos que temos as segutntes proporções

A : B : : 4:5
B : C : : 8:7
C : D : : 9:2

Compondo as proporções temos

$$A \times B \times C : B \times C \times D :: 4 \times 3 \times 9 : 5 \times 7 \times 2$$
ou $$A : D :: 4 \times 3 \times 9 : 5 \times 7 \times 2$$

Exemplo 1.º A relação entre o Fathom ou Toesa ingleza, e a Toesa franceza é 76 : 81, e a relação entre a Toesa franceza e o metro, é 115 : 59. Pede-se em que relação está a Fathom para um metro?

1 Fath. : 1 Toes : : 76 : 81
1 Toes. : 1 Met. : : 115: 59

Compondo

$$1^{to} \times 1^{fa} . 1^{to} \times 1^{me} :: 76 \times 115 : 81 \times 59$$
$$:: 8746 : 4779$$
$$1 \text{ Fathom} = \frac{8740 \times 1^{m}}{4779} = 1^{m}, 829.$$

Deste exemplo podemos dedusir a seguinte regra. 1.º O antecedente da 1.ª razão deve ser da mesma especie que a quantidade que pretendemos redusir á que buscamos achar; 2.º Cada consequente deve exprimir o valor de seu antecedente; 3.º O antecedente da razão seguinte deve ser da mesma especie que o consequente da razão antecedente; 4.º O ultimo consequente deve ser da mesma especie em que se busca exprimir o valor desconhecido do 4.º termo.

Exemplo 2.º Se 3 arrateis de chá valem 4 de café, 6 de café 20 de assucar, e 80 de assucar 16 de chocolate, quantos arrateis de chocolate valerão 12 de chá?

$$\left.\begin{array}{ll} 3.^a \text{ Chá} :: & 4.^a \text{ de café} . : \\ 6.^a \text{ Café} :: & 20 \text{ de assuc.} : \\ 80 \text{ Assuc} :: & 16 \text{ de choc.} :: \end{array}\right\} 12 : Z$$

$$3 \times 6 \times 80 : 4 \times 20 \times 16 :: 12 : X = 10\tfrac{2}{3} \text{ chocolate}$$

o que não é senão uma simplificação das proporçoos seguintes.

$$\begin{array}{l} 3.^a \text{ Chá} : 4.^a \text{ café} :: 12^a \text{ chá} : X^a \text{ café} \\ 6.^a \text{ Café} : 20^a \text{ assuc} :: X^a \text{ café} : Z^a \text{ essucar} \\ 80^a \text{ Assu} : 16^a \text{ choc.} :: Y^a \text{ assuc} : Y^a \text{ de chocolate} \\ \hline 3 \times 6 \times 80 : 4 \times 20 \times 16 :: 12 \times X \times Y : X \times Y \times Z \end{array}$$

$$\frac{3 \times 6 \times 80}{420 \times 16} = \frac{12}{z} \text{ por tanto } 3 \times 6 \times 80 : 4 \times 20 \times 16 :: 12 : z$$

Regra de falsa posição.

(40). A falsa posição é um methodo de resolver certas questões que não podem ser determinadas pelas regras ordinarias e directas da arithmetica. Chama-se assim porque faz uso de numeros arbitrariamente assumidos sobre os quaes se faz as operações indicadas na questão, como se fossem os verdadeiros numeros, para por este meio descobri-los; divide-se em simples, e composta.

(41). Falsa posição simples. Por esta regra resolvemos problemas que tem resultados proporcionaes as supposições. Serve principalmente para determinar numeros que são augmentados, ou diminuidos de quantidades iguaes a elle mesmo, ou a partes d'elle mesmo; repetidos um certo numero de vezes; ou multiplicados, ou divididos por qualquer numero dado. A regra para resolver estes problemas é a seguiute.

1.° Toma-se um numero qualquer e com elle se faz as mesmas operaçoes que pela questão se requer que se façam com o numero procurado. 2.° Então faz-se a seguinte proporção; como o resultado da operação está para o numero assumido, assim está o resultado dado no problena, para o numero procurado, que se acha resolvendo a proporção.

Exemplo 1.° A idade de A é o dobro da de B, e a de B, é o triplo da de C, e a somma das idades d'estas tres pessoas é 140 annos, qual a idade de cada uma?

Supponhamos que a idade de A é 60 annos, (podemos tomar um numero qualquer) então temos pela questão; a idade de B é de 30 annos, a idade de C de 10 annos. Sommando estas idades temos $60+30+10=100$; a questao dà como somma das idades 140 annos.

Temos por tanto as seguintes proporções;
$100 : 60 :: 140 : X=84$ que é a idade de A, a idade de B é 42 annos, e a de C 14 annos, e $84+42+14=140$ annos.

Exemplo 2.° Um homem depois de ter gasto $\frac{1}{3}$ de seu dinheiro, e depois $\frac{1}{4}$, tinha de resto 60$000 Rs. que dinheiro tinha a principio?

Supponhamos que o homem tinba 120$000 rs., gastou 1.° 40,000 R, e depois 30$000, por tanto gastou 70$000 Rs., e 120$000 Rs. menos, 70$000 Rs. importam em 50$000 Rs., mas pela questão devia ter de resto 60$000 rs. Logo temos a seguinte proporção.

50$000 Rs : 120$000 Rs. : : 60$000 : X=144$000 Rs.

(42). Falsa posição composta. E' esta uma regra para resolver certos problemas complicados por meio de suposições de numeros falsos. A regra que deve ser empregada é a seguinte. 1.º Tomam-se dous numeros, executam-se com elles separadamente todos os calculos indicados no problema como devendo ser effectuados com o numero procurado. Acha-se quasi sempre que os resultados dos calculos feitos com os numeros suppostos differem do que exige o problema, e nota-se de quanto differem, estas differenças são os erros da falsa posição, que podem ser para mais, ou para menos. 2.º Se os erros são da mesma natureza, isto é, se são ambos para mais ou para menos, multiplica-se cada numero supposto pelo erro que a outra supposição produsio, toma-se a differença dos erros. 3.º Se os erros são de natureza opposta, isto é, um para mais outro para menos, multiplica-se do mesmo modo cada numero supposto pelo erro produsido pelo outro, toma-se a somma d'estes productos, e divide-se pela somma dos erros. Em ambos os casos o quociente dará o valor da incognita.

Para mostrar a razão d'esta regra devemos resolver um problema. Pede-se um numero tal que os seus dous terços excedam a sua metade de uma unidade.

Supponhamos que o numero procurado é 12, os dous terços deste numero são 8, e a metade é 6, a differença 2 é maior que a da questão de 1, logo o erro aqui é de 1 para mais.

Supponhamos agora que o numero procurado é 18, os dous terços deste numero são 12, e sua metade 9, e 12—9=3, e não 1, temos ainda um erro para mais de 2. Podemos fazer a seguinte proporção.

$$1 : 2 : : (X-12) : (X-18)$$

Pois as differenças entre os resultados suppostos e o verdadeiro, devem estar em proporção das differenças entre os numeros suppostos, e o procurado. Desta proporção concluimos que $1\times(X-18)=2\times(X-12)$,

$$1\times X-1\times 18=2\times X-2\times 12$$

ajuntando aos dous termos desta igualdade a mesma quantidade $2\times12-1\times X$. temos esta outra igualdade

$$1\times X-1\times18+2\times12-1\times X=2\times X+2\times12-2\times12-1\times X$$

$$2\times12-1\times18=(2-1)\times X$$

$$\frac{2\times12-1\times18}{2-1}=X,$$ conforme a primeira parte da regra. Por tanto o numero procurado é $\frac{24-18}{1}=6$, e de facto os dous terços de 6, são 4, e a metade 3, e $4-3=1$ como quer a questão. Se a questão fosse achar um numero tal que seus dous terços excedam a sua metade de 2, tomando por numeros suppostos 6, e 18, temos, dous terços de 6, 4, a metade 3, $4-3=1$. e não 2, logo o erro é de 1 para menos; e os dous terços de 18 são 12, a metade 9, e $12-9=3$, e não 2, logo o erro é de 1 para mais, assim pois temos a seguinte proporção:

$$(-1:1)::X-6::X-18.$$

$$-1\times X-18\times-1=X\times1-6\times1$$

$$-X+18=X-6$$

ajuntando aos dous lados desta igualdade $=6\times X$

$$-X+18+6+X=+X-6+6+X$$

$$18+6=(1+1)X$$

$$\frac{18+6}{1+1}=X$$ como exige a 2.ª parte da regra. Por tanto o numero procurado é $\frac{24}{2}=12$, e de facto os dous terços de 12, são 8, e a metade 6, e $8-6=2$, como quer a questão.

Exemplo 1.º Qual é o numero que multiplicado por 6, e este producto augmentado de 18, e a somma dividida por 9 dá por quociente 20?

Tomamos dous numeros suppostos 18, e 30, e então fazemos relativamente a elles as operações indicadas na questão

$$18\times6\times108,\ 108+18=126,\ \text{e}\ \frac{126}{9}=14,$$

e não 20, logo o erro é $20-14.=6$ para menos

$30\times6=180$, $180+18=198$, e $\frac{198}{9}=22$, e não. 20, logo o erro e $22-20=2$, para mais. Por tanto como os erros são oppostos.

1.ª falsa posição 18. 1.º erro-6
2.ª falsa posição 30, 2.º erro$+2$

$$\frac{18\times2+30\times6}{6+2}=X\ \frac{36+180}{8}=27.$$

e de facto $27\times6=162+18=179$,

$\frac{179}{9}=20$,

Exemplo 2.º Perguntando-se a um pastor quantas ovelhas tinha, respondeo; se tivesse outras tantas das que tenho, com mais a metade, reunidas com as que tenho, e com $7\frac{1}{2}$ ovelhas, teria 1000. Pergunta-se quantas tinha.

Supponhamos que tinha 200, então pela questão, 200 mais 100 mais 200 mais $7\frac{1}{2}=507\frac{1}{2}$, e não 1000, logo ha um erro de $429\frac{1}{2}$ para menos.

Supponhamos agora que eram 300, então $300+150+300+7\frac{1}{2}=757\frac{1}{2}$, e não 1000, logo ha ainda um erro $242\frac{1}{2}$ para menos.

1.ª falsa posição 200. . . . erro $492\frac{1}{2}$

2.ª falsa posição 300. . . . erro $242\frac{1}{2}$

Por tanto a incognita é igual á

$$\frac{300\times492\frac{1}{2}-200\times242\frac{1}{2}}{492\frac{1}{2}-242\frac{1}{2}}=\frac{147750-48500}{250}=$$

$\frac{9925}{25}=397$, numero das ovelhas, e de facto $397+198\frac{1}{2}+397+7\frac{1}{2}=1000$.

Exemplo 3.º Perguntando-se á um pai que idade tinha seu filho respondeo: minha idade é o triplo da sua, e ha dez annos era o quintuplo. Pede-se a idade do filho.

Supponhamos a idade de 24, então temos $24\times3=72$, idade do pai, e esta ha dez annos era de 62, e então era igual a 5 vezes a idade do filho que era de 14, isto é, a $5\times14=70$, um erro de 8 para mais.

Supponhamos agora a idade de 23 annos, temos $3\times23=69$, e $69-10=59$ que deve ser igual á $5\times13=65$, erro de 6.

1.ª falsa posição 24 erro 8
2.ª falsa posição 23 erro 6

$$\frac{23\times 8-24\times 6}{8-6}=\frac{184-144}{2}=\frac{40}{2}=20$$

de facto $20\times3=60$, e $60-10=50$, que é igual $(10\times 5=50$. . . . .

Estra regra não dá valores rigorosos senão em certos casos, pode porém ser ainda empregada em muitos outros quando por um meio qualquer se tenha um valor approximado da incognita.

Exemplo 4.º Seja proposto achar um numero tal que seu quadrado ajuntado a elle mesmo dê por somma 10.

O numero procurado fica entre 3, e 2 temos $3\times3+3=12$, e não a 10, erro de 2 para mais, $2\times2+2=6$, erro de 4 para menos.

1.ª falsa posição 3 erro +2
2.ª falsa posição 2 erro —4

Por tanto $\frac{3\times4+2\times2}{4+2}=\frac{12+4}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}=2{,}6666$: 1.ª app.

1.ª falsa posição 3 erro 2

2.ª falsa posição $\frac{8}{3}$ erro $-\frac{2}{9}$

$$\frac{3\times\frac{2}{9}+\frac{8}{3}\times 2}{2+\frac{2}{9}}=\frac{\frac{6}{9}+\frac{48}{9}=\frac{54}{20}}{\frac{20}{9}}=2{,}7.\ \text{2.ª approximação.}$$

e assim se pode continuar até o gráo de approximação que se queira.

Regra de Juros.

(43). A regra de juros é simples ou composta. Juros é o lucro dado por quem toma dinheiro emprestado a quem o empresta. Este lucro é estipulado a tanto por cento ao anno, e o numero que indica os tantos por cento chama-se taxa dos juros. O dinheiro emprestado chama-se capital, a somma é o capital com os seus juros.

(44). Juros simples. Trataremos primeiro dos juros simples. Podemos calcular os juros de um capital dado por um anno, por mais de um anno, e por menos de um anno.

(45). 1.º Caso; juros por um anno. Podemos dadas duas das trez causas, o capital, os juros, e a taxa, determinar a 3.ª

1.º Dados o capital, e a taxa, achar os juros. Seja proposto achar os juros de 2$450 Rs. a 4 por °/₀ ao anno. Temos evidentemente a proporção seguinte:

$$100 : 4 :: 2\$450 : X = \frac{2450\times4}{100} = \frac{980}{10} = 98 \text{ réis.}$$

Ou, os juros de 100 réis sendo 4, segue-se que os de 1 real são $\frac{4}{100}$, e os de 2$450 rs. são $2450\times\frac{4}{100} = \frac{145\times4}{10} = \frac{980}{10} = 98$ réis.

Por tanto, para achar os juros de uma quantia dada, multiplica-se esta quantia pela taxa, e divide-se o producto por cem, ou o que é o mesmo, cortam-se dous algarismos da direita. Representando a quantia por C, a taxa por °/₀, e os juros por j. exprimem-se os juros pela seguinte formula:

$$J. = \frac{C\times p\ °/_0}{100}$$

2.º Conhecidos os juros e a taxa achar o capital. Qual é o capital que produz n'um anno 98 réis de juros a 4 p. 0/0. Temos evidentemente a seguinte proporção.

$$4 : 100 :: 98 : X = \frac{98\times100}{4} = 2\$450 \text{ réis.}$$

ou 100 réis sendo o capital de 4 réis, o capital de 1 real é $\frac{100}{4}$, e o capital que dà de juros 98 réis é $98\times\frac{100}{4}$. Por tanto para achar o capital conhecendo os juros e a taxa accrescentam-se duas cifras aos juros dados, e divide-se pela taxa.

$$C = \frac{100\times j}{p\ °/_0}$$

3.º Achar a taxa conhecendo-se o capital e os juros. A que taxa deve estar o capital de 2$450 réis para render por anno 98 réis. Temos evidentemente a proporção.

$$2450 : 98 :: 100 : X = \frac{98 \times 100}{2450} = 4$$

Augmentam-se duas cifras aos juros dados e divide-se pelo capital.

$$p\ \%= \frac{4 \times 100}{c}$$

4.° Ás vezes conhecemos a somma de um capital com seus juros, e queremos determinar os juros à uma taxa determinada.

Seja dada a somma 2$548 réis de um capital com seus juros a 4 p. 0/0, e queira se determinar em quanto importam os juros. Temos a seguinte proporção.

$$104 : 4 :: 2548 : X = \frac{2548 \times 4}{104} = 98$$

multiplica-se a somma dada pela taxa, e divide-se por 100 mais a mesma taxa.

$$\frac{S \times p\ \%}{100 + p.\ \%} = J.$$

5.° Dada a somma e a taxa achar o capital. No mesmo exemplo seja proposto achar o capital: temos

$$104 : 100 : 2548 : X = \frac{2548 \times 100}{104} = 2\$450 \text{ réis}$$

Accrescentam-se duas cifras á somma dada, e divide-se por 100 mais a taxa.

$$\frac{S \times 100}{100 + p.\ \%} = C.$$

(46). Em vez da expressão a tanto por cento a respeito dos capitaes postos a juros, emprega-se tambem uma outra que é ao dinheiro de tanto. Por exemplo de 20, de 25 etc. o que quer dizer que cada 20. ou 25 etc. contido em 100 rende 1 de juros. Assim 2$450 réis ao dinheiro de 25, é o mesmo que 2$450 réis a 4 p. 0/0, e ao dinheiro de 20 é o mesmo que a 5 p. 0/0. Para saber a que dinheiro está um capital a tanto por cento, por exemplo à 5 por 0/0, divide-se 100 pela taxa, e o quociente dà o dinheiro $\frac{100}{5} = 20$

Reciprocamente sabido o dinheiro sabemos a taxa dividindo 100 pelo dinheiro $\frac{100}{20}=5$. Como o dinheiro multiplicado pela taxa é sempre igual a 100, segue-se que o dinheiro mostra em quantos annos os juros igualam o capital.

(47) Juros por mais de um anno. Para isto fazemos uso da regra de tres composta. 1.° Emquanto importam os juros de 340$000 réis por 4 annos a 8 por 0/0 ao anno.

Os juros de 4 annos devem ser 4 vezes os juros de 1 anno, assim podemos calcular os juros de 1 anno e multiplical-o por 4. Mas pelas proporções seguintes podemos achar logo os juros de 4 annos.

100 : 8 : : 340$000 R. : X juros de 1 anno
1 : 4 : : X juros de 1 anno : Z jurus de 4 anno.

$$100 : 8\times4 :: 340000\times X : X\times Z.$$

$$Z=\frac{8\times4\times34000\times X}{100\times X}=\frac{32\times340\$000}{100}=R.108\$800$$

multiplica-se o capital pelo producto da taxa pelo tempo, e cortam-se dous algarismos a direita representando o tempo por T

$$\frac{C\times T\times p.\ ^0/_0}{100}=J.$$

2.° Qual é o capital que à juros de 8 por 0/0 rende em 4 annos 108$800 rs.

$$8\times4 : 100 : : 108\$800\ Rs. : =\frac{108\$800\ Rs.\times100}{8\times4}$$
$$=340\$000.$$

Ajunta-se aos juros dados duas cifras, e divide-se pelo *producto da taxa pelo tempo.*

$$\frac{J\times100}{p.\ ^0/_0\times T}=C.$$

3.° A que taxa deve ser posto a juros o capital 340$000 réis para render 108$000 réis em 4 annos.

340$000 : 108$800 : : 100 : X taxa de 1 anno
4 : 1 :: X : Z taxa de 1 anno

$$340\$000\times4 : 108\$800\ R. : : 100\times X : X\times Y$$

$$Y=\frac{100\times X\times108\$800\ R.}{4\times340\$000\times X}=\frac{108\$800\times100}{340\$000\times4}=8$$

juntam-se duas cifras aos juros dados e divide-se pelo producto do tempo pelo capital

$$\frac{J. \times 100}{C. \times T.} = p. \ \%$$

4.° Em que tempo pode o capital de 340$000 rs. posto a juros de 8 por % render 108$800? Temos

$$\begin{array}{l} 340000 : : 108800 : : 100 : X \\ \quad 8 : \quad X : : \quad 1 : J. \\ \hline 340000 \times 8 \ . \ 108800 \times X : : 100 : X \times J \end{array}$$

$$J. = \frac{108800 \times X \times 100}{340000 \times 8 \times X} = \frac{108800 \times 100}{340000 \times 8} = 4 \text{ annos}$$

juntam-se duas cifras aos juros dados e divide-se pelo producto do capital pela taxa

$$\frac{J \times 100}{C \times p. \%} = T.$$

5.° Sendo 448$800 R. a somma de um capital com seus juros de 4 annos a 8 por % qual é o capital

$$100 \times (8 \times 4) : 100 : 448.800 : X$$

$$X = \frac{448\$800 \times 100}{100 + 8 \times 4} = \frac{44880000}{132} = 340\$000 \text{ R.}$$

juntam-se duas cifras a somma dada e divide-se por 100 mais o producto da tara pelo tempo.

$$\frac{S \times 100}{100 \times (p. \% \times T.)} = C.$$

6.° Sendo 448$800 rs. a somma d'um capital com seus juros a 8 por % de 4 annos, em quanto importam os juros

$$100 + (8 \times 4) : 8 \times 4 : : 448\$800 \ T : X$$

$$X = \frac{448800 \times (8 \times 4)}{100 \times (8 \times 4)} = \frac{448800 \times 32}{132} = 108\$800 \text{ R.}$$

multiplica-se a somma dada pelo producto da taxa pelo tempo, e divide-se por 100 mais o mesmo producto

$$\frac{S\times(p.\ \%\times T)}{100+p.\%\times T)}=j$$

(48). Juros por menos de um anno. Uma vez conhecidos os juros por um anno podemos achar os de um espaço de tempo menor repartindo o importe dos juros annuaes em partes aliquotas do anno. As mesmas regras dadas para tempos maiores que um anno servem para tempos menores, nos exemplos anteriores podemos substituir o numero de annos 4, por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{365}$ para achar os juros de 6, de 4, de 3, e de 1 meses, e de 1 dia. Por exemplo seja proposto achar os juros de 8 por % de 340$000 rs. em 6 mezes temos 100 : 8 : 340000 : X

$$\frac{1 : \frac{1}{2} : : \quad X : Y}{100 : 8\times\frac{1}{2} : : 34000 : Y=\frac{340000\times 4}{100}=13{,}600}$$

Para achar os juros de qualquer quantia em um certo numero de dias procede-se do modo seguinte. Seja proposto achar os juros de 2$450 a 4 por % durante 27 dias.

O anno tem 365 dias, sabendo os juros desta quantia de um anno podemos achar os de 27 dias pela seguinte proporção representando os juros annuaes por Y

$$365 : Y : : 27 : X=\frac{27XY}{365}$$

mas assim temos de calcular primeiro os juros de um anno, evita-se este trabalho pela proporção composta seguinte

$$\begin{array}{l} 100 : 4 : : 2450 : Y \\ 365 : Y : : \quad 27 : X \\ \hline 100\times 365 : 4\times Y : : 2450\times 27 : X\times Y \end{array}$$

$$X=\frac{2450\times 27\times 4}{100\times 365}=7.24$$

Podemos ainda simplificar este calculo, basta para isso applicar o seguinte principio, que as duas relações que formam uma proporção sendo iguaes, acha-se o termo desconhecido dividindo o termo conhecido pela razão conhecida: na proporção 100X365: 4: : 2450X27 ; X

$$X=\frac{2450\times 27}{\frac{100\times 365}{4}}$$ a primeira relação 365X100 : 4 acha-

se em todos os calculos que tem por base a mesma taxa 4 por °/₀, seja qual for a somma e o numero de dias. Podemos pois calcular por uma vez esta razão $\frac{36500}{4}=9125$. Dividindo por este numero o termo conhecido da segunda razão, devemos ter por quociente o valor da incognita pedida, assim

$$\frac{2450\times27}{9125}=\frac{66150}{9125}=7.24$$

Por tanto para achar os juros de uma quantia qualquer de um certo numero de dias a uma taxa determinada, multiplicamos a quantia dada pelo numero de dias, e dividimos este producto por 36500, dividido pela taxa. Os quocientes de 36500 pelas taxas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. calculados uma vez tomam o nome de divisores fixos porque não mudam, emquanto a taxa é a mesma; para facilitar os calculos existem taboas com todos estes divisores fixos. Este methodo na practica se simplifica: 1.° suppondo o anno de 360 dias, o que serve para simplificar os divisores. 2.° supprimindo os dous ultimos algarismos á direita do producto e do divisor.

Applicando os dous meios de simplificação ao exemplo a cima, temos:

$2450\times27.=66150$, $\frac{36000}{4}=9000$, e então temos $\frac{661}{90}=7.34$. O quociente aqui é maior que o que resulta do calculo rigoroso, o que provém de contarmos só 360 dias no anno, em vez de 365, de modo que os juros de 1 dia em vez de serem $\frac{1}{365}$ dos juros annuaes são $\frac{1}{360}$. Para compensar esta differença consideramos todos os mezes como de 30 dias, $\frac{1}{12}$ do anno, ou de 360 dias.

Este calculo não é expedicto quando o divisor fixo é uma fracção, n'este caso podemos abrevial-o, procurando primeiro os juros da taxa mais proxima que tenha um divisor inteiro, e depois augmentando ou diminuindo os juros achados segundo a razão da taxa calculada para a que se devia calcular. O costume é calcular sempre os juros por 6000, divisor fixo da taxa 6 por °/₀, e então diminuir o resultado de $\frac{1}{3}$ para 4 por °/₀, de $\frac{1}{12}$ para 5 $\frac{1}{2}$ por °/₀, de $\frac{1}{6}$

para 5 por %. Em quanto importam os juros de 50$000 réis a 6 $\frac{1}{2}$ por cento em 3 $\frac{1}{2}$ mezs.

$$\frac{50\$000 \times 105}{6000} = \frac{5250000}{6000} = \frac{5250}{6} = 875 \text{ réis}$$

Juros da quantia acima á 6 por %, e como: 6: 6 1/2 : : 12: 13, ajuntamos à 875, a sua duodecima parte, e temos $875 + 72{,}9 = 947{,}9$, que são os juros pedidos de 50$000 rs.

Em vez de divisores fixos, podemos empregar para calcular os juros, multiplicadores fixos.

Para calcular os juros com os multiplicadores fixos, multiplica se a quantia dada pelos dias, e depois multiplica-se este producto por uma fracção, tendo por numerador a taxa dos juros, e por denominador 36000. Seja proposto achar os juros de 50$000 réis à 6 por % em 3 $\frac{1}{2}$ mezes.

Temos a seguinte proporção:

$$100 \times 360 : 6 : 50\$000 \times 105 : X$$

$$X = \frac{50000 \times 105 . \times 6}{36000} = 50000 \times 105 \times \frac{6}{36000} = 875$$

Tendo pois uma taboa com todos os multiplicadores fixos, isto é com as fracções que resultam das taxas 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc. divididas por 36000, podemos empregar os multiplicadores em logar dos divisores fixos; estas fracções reduzidas á decimaes, facilitam ainda mais o calculo dos juros.

Podemos ainda calcular os juros de outro modo, pelas partes aliquotas. O juros durante 1 dia de uma somma igual ao divisor fixo da taxa dada, é igual a 1 real porque esta somma dividida pelo divisor fixo dá no quociente 1. Por exemplo; os juros de 9$000 réis durante 1 dia a 4 por % são iguaes a um real, porque para achar estes juros devemos dividir 9$000 réis por 9000, divisor fixo correspondente a 4 por %, o que dá no quociente 1.

Por consequencia já que 9000 réis á 4 por % dam um real de juros por dia, segue-se que os juros de 9000 em 90 dias são iguaes a centesima parte de 9000 réis: e para uma outra qualquer quantia a centesima partê do capital é igual tambem aos juros de 4 por % de 90 dias. Seja por exemplo o capital 245. os juros deste capital á 4 por °/₀ em 90 dias, acha-se pelas proporções seguintes:

$$9000 : 1^{real} :: 2450 : X, \quad e$$
$$1 :: 90^{d} :: X : Z$$
$$\overline{9000 : 90^{d} :: 2450 \times X : Z \times X}$$
$$Z = \frac{2450 \times 90}{9000} = \frac{2450}{100}$$

Por tanto tomando a centesima parte de 245, temos os juros desta quantia em 90 dias, e facil é dedusir os juros para qualquer outro numero de dias. Seja proposto achar os juros de 2$450 Rs. a 4 por °/₀ durante 27 dias.

2450	capital
24, 50	juros de 90 dias
8, 16	juros de 30 dias
0, 81	juros de 3 dias

Tirando os juros de 3 dias dos de 30 temos 8, 16—0,81,= 7,35 juros de 27 dias.

Na practica podemos facilitar ainda este calculo fazendo sempre os calculos com os mesmos numeros. Tomamos por typo os juros de 6 por 0/0 cujo divisor fixo é 6000, e corresponde a 60 dias de juros. Este numero tem a vantagem de ter muitos divisores, decimaes e duodecimaes, divide-se por 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, o que facilita muito a decomposição em partes aliquotas. Uma vez conhecidos os juros de 6 por cento, facilmente se acham os juros de 5 por cento tirando da somma achada $\frac{1}{6}$, á 4 por 0/0 tirando $\frac{1}{3}$, a 3 por 0/0 tirando $\frac{1}{2}$, á 8 por 0/0 ajuntando $\frac{1}{3}$, á 12 por 0/0 dobrando; os $\frac{1}{2}$ por 0/0 avaliam-se em $\frac{1}{12}$, os $\frac{1}{3}$ por 0/0 em $\frac{1}{18}$, e assim por diante. Seja proposto achar os juros de 3.554$000 rs. durante 5 dias a 4 por 0/0.

Os juros de 3:554$000 rs. a 6 por °/₀ em 60 dias são iguaes a $\frac{1}{100}$ do capital, isto é a 35$540 rs. 5 numero de dias procurado é igual a $\frac{60}{12}$, portanto $\frac{35\$540}{12} = 2\$491$ rs. são os juros a 6 por °/₀ do capital dado por 5 dias, tirando desta quantia $\frac{1}{3}$ teremos os juros da mesma durante o mesmo tempo a 4 por %, o terso de 2$961 rs. é 987 rs. e 2$961 rs.—987 rs.=1$974 rs. juros procurado. Se a taxa fosse de 8 por % em vez de tirar o terso deveriamos ajuntal-o, então teriamos 2961+987 rs.=3$948 rs. Se a taxa fosse 12 por 0/0, teriamos 2934×2=5922 rs. Este é o mais expedicto de todos os methodos.

Como os juros J. de um capital C. em um numero de dias D. a uma taxa T. è $J.=C\times D\times\frac{T}{36000}=\frac{C\times D\times T.}{36000}$ Teremos $36000\times J=C\times T\times D.$ logo $\frac{36000\times J}{T\times D}=C.$ Os juros multiplicados por 36000, e divididos pelo producto da taxa pelo numero de dias, dando o capital. Da mesma expressão $36000\times J=T.\times C\times D.$ tiramos $T=\frac{36000\times J}{C\times D.}$ Os juros multiplicados por 36000, e divididos pelo producto do capital pelo numero de dias, dando a taxa; $D=\frac{36000\times J}{T\times C}$. Os juros multiplicados por 36000, e divididos pelo producto da taxa pelo capital dando o numero de dias.

Juros compostos ou juros de juros.

(49). Quando o capitalista em vez de receber os juros vencidos no fim de cada praso convencionado para o seu vencimento, os reune ao capital primitivo, para que capitalisados vençam tambem os seus respectivos juros diz-se que recebe juros de juros. As questões de juros compostos são ás vezes muito complicadas para poderem ser resolvidas pela simples arithmetica, e então devemos recorrer a Algebra; por tanto, aqui só trataremos das mais simples.

1. Seja proposto achar em quanto importaria um capital de 480$000 rs. em 3 annos á juros compostos de 5 por 0/0 ao anno. O modo mais simples de resolver este problema, e calcular os juros de 480$000 rs. por um anno, ajuntal-os ao capital, calcular depois os juros deste novo capital por um anno, ajuntal-os ao capital, e finalmente calcular os juros deste ultimo capital por um anno e ajuntal-os ao capital, e a ultima somma será a resposta procurada:

480$000=capital do 1° anno
21$000=juros do 1° anno
504$000=capital do 2° anno
25$000=juros do 2° anno
529$000=capital do 3° anno
25$400=juros do 3° anno
555$660=capital no fim do 3° anno.

Este methodo é muito longo principalmente quando o numero de annos é grande; podemos proceder do modo seguinte

100 : 105 :: 480000 : X capital de 1° anno
100 : 105 :: X Y capital de 2° annos
100 : 105 :: Y Z capital de 3° annos

temos $X=\frac{480000\times 105}{100}$ 1° capital

$Y=48000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}$ 2.° capital

$Z=480000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}$ 3.° capital.

Então fazemos logo de uma só vez o calculo, isto é, multiplicamos o capital por tantas vezes a razão de cem augmentado da taxa a 100, quantos são os annos, ou multiplicamos o capital por uma potencia desta razão igual ao numero de annos $Z=480000\times\left(\frac{105}{100}\right)^3$

representando por C o capital temos

$$C'=C\times\left(\frac{100+p\,\%}{100}\right)^n$$

Esta formula calcula-se facilmente por logarithmos.

$$\text{Log. } Z=\text{log. } 480000+\text{log.}\left(\frac{105}{100}\right)\times 3$$

O logarithmo de 480000=5,68124

O logarithmo de $\left(\frac{105}{100}\right)$

log. 1,05=0,02119 e
0,0211973 =0,06357

numero correspondente 555663 =5,74481

Ajunta-se ao logarithmo do capital o logarithmo de uma fracção tendo por numerador 100 mais a taxa, e por denominador 100, multiplicado pelo numero de annos.

$$\text{Log. J.} = \log. C + \log.\left(\frac{100 + p\ \%}{100}\right) \times n.$$

$$\text{Log. J.} = \log. C + (\log. 100 + p\ \% - \log. 100) \times n.$$

2.º Seja proposto achar qual o capital que a juros compostos de 5 p. % no fim de 3 annos importa em 555$662

$$105 : 100 : 555660 : X$$
$$108 : 100 : X : Y$$
$$105 : 100 : Y : Z$$

$$X = 555660 \times \frac{100}{105} \quad 1.º\ \text{anno}$$

$$Y = 555660 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \quad 2.º\ \text{anno}$$

$$Z = 555660 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105} \quad 3.º\ \text{anno} =$$

$$\text{logo } Z = 555660 \times \left(\frac{100}{105}\right)^3$$

Podemos calcular esta formula pelos logarithmos.

Logarithmo de 55660 = 5.74481

$$\text{logarithmo } \left(\frac{100}{105}\right) \times 3$$

$$9.97881 - 10) \times 3 = 29.93643 - 30$$
$$\overline{3568124 - 30 = 5,681124}$$

o numero que corresponde a este logarithmo è 480000, logo o capital procurado é 480.000 rs.

Podemos fazer este calculo por esta outra forma, pela regra antecedente temos

$$555660 = X \times \left(\frac{105}{100}\right)^3 \text{ portanto}$$

$$\log. 555660 = \log. X + \log. \left(\frac{105}{100}\right) \times 3$$

$$\log. X = \log. 555660 - \log. \left(\frac{105}{100}\right) \times 3$$

logarithmo 555660—	5,74481
logarithmo 1,05 ×3	6,06357
numero correspondente 4808000=	5.68124

Por tanto para achar o capital primitivo que uma somma produsio dada a juros compostos n'um tempo determinado e a uma taxa dada, multiplica-se a quantia pela rasão de 100, a

100 mais a taxa, elevada a potencia indicada pelo tempo.

$$C=C'\times\left(\frac{100}{100+p\ \%}\right)^n$$

Por logarithmos, ajuntamos ao logarithmo da quantia dada, o logarithmo de uma fracção tendo por numerador 100 e por denominador 100 mais a taxa, multiplicado pelo numero de annos: ou tiramos do logarithmo da quantia dada, o logarithmo de uma fracção tendo por numerador 100 mais a taxa e por denominador 100.

$$\text{Log. } C=\text{Log. } C'+\text{log. } \left(\frac{100}{100+\text{por } \%}\right)\times n$$
$$\text{Log. } C=\text{Log. } C'+(\text{log. } 100-\text{log. } 100+p\ \%)\times N.$$
$$\text{Log. } C=\text{Log. } C'-\text{log. } \left(\frac{100+\text{por } \%}{100}\right)\times N$$
$$\text{Log. } C=\text{Log. } C'-\text{log. } (100+p\ \%)-\text{log. } 100)\times n.$$

3.° Seja proposto achar em quantos annos o capital 480$000 rs. importara em 555$660 rs. a juros compostos de 5 por %.

Temos pela 1.ª regra $555660=480000\times\left(\frac{105}{100}\right)^x$ d'esta igualdade tiramos a seguinte

$$\left(\frac{105}{100}\right)^X=\frac{555,660}{480,000}, \text{ e pelos logarithmos.}$$
$$X\times\text{log. }\left(\frac{105}{100}\right)=\text{log. }\left(\frac{555660}{480000}\right) \text{ por tanto}$$
$$X=\frac{\text{log. } 555660-\text{log. } 480000}{\text{log. } 105-\text{log. } 100}$$

Logarithmo	555660	=	5,74481
log.	480000	=	5,68351
			0,06357
logarithmo 1,05		=	0,02119

dividindo 0,06357 por 0,02119 temos por quociente, 3,

Tira-se do logarithmo da quantia dada o logarithmo do capital primitivo, e divide-se esta differença pelo logarithmo da fracção que tem por numerador 100 mais a taxa e por denominador 100

$$N=\frac{\text{Log. } C'-\text{log. } C}{\text{log. } 100+p\ \%-\text{log. } 100}$$

4.° Seja proposto determinar porque taxa deve ser posta á juros compostos a quantia de 480000 rs. para que no fim de 3 annos importe em 555660.

Temos pela primeira regra

$$555660=480000\times\left(\frac{100+X}{100}\right)^3$$

D'esta igualdade tiramos a seguinte

$$\frac{555660}{480000}=\left(\frac{100+X}{100}\right)^3 \text{ por tanto}$$

$$\frac{100+X}{100}=\sqrt[3]{\frac{555668}{480000}}$$

$$100+X=100\times\sqrt[3]{\frac{555660}{480000}}$$

$$\text{Log. } 100+X=\text{log. } 100+\frac{\text{log. } 555660-\text{log. } 48000}{3}$$

logarithmo 555660=5,74481
——— 48000=5,68124
log. $\frac{555660-48000}{3}$ 0,06357 =0,02119
logarithmo 100 2,00000
numero corresp. 105=2.02119

Portanto 100+X=105, e X=105—100=5; ao logarithmo de 100 ajunta-se o logarithmo da quantia, menos o do capital primitivo, divididos por 3, e acha-se assim cem mais a taxa, tirando cem, acha-se a taxa procurada

$$\text{Log. } 100+\text{p. }\%=\frac{\text{log. } C'-\text{log. } C}{n}+100$$

Discontos.

(50) Disconto é um abatimento no valor de uma somma antes de se ter direito a ella conforme um tanto por cento

O valor presente de qualquer quantia que só deve ser paga em um praso ainda não vencido, é igual a uma somma que posta a juros pelo tempo que falta para o praso de seu vencimento a um tanto por cento produz o valor da quantia, assim o valor actual de 500$000 rs. a pagar-se daqui a 6 mezes, é igual a quantia que a juros de 6 p. %, por exemplo, em 6 mezes importa em 500$000 rs.

Por tanto a regra de discontos deve ser resolvida pela seguinte proporção.

Como 100 mais os juros pelo praso, está para a taxa multiplicada pelo praso, assim está a quantia para o disconto.

Qual é o valor presente de 500$000 rs. a remir-se no prazo de 2 annos, com disconto de 5 p. %.

Temos

$$110 : : 10 : : 500000 : X = \frac{500000}{11} = 45454$$

Temos por tanto de obter de 500$000, esta quantia, e 500$000 rs.—45,454=454$545 rs. valor presente.

Podemos achar logo o valor presente por esta outra porporção

$$110 : 100 : : 500\$000 : : X = \frac{500000 \times 100}{110}$$

$$\frac{500000 \times 10}{11} = 454\$545 \text{ rs. valor presente.}$$

Esta é a verdadeira regra de descontos, mas não é empregada entre nós, em todas as nossas transações de discontos se faz uso da regra de juros, o que é favoravel ao que disconta. Por exemplo pela regra de juros o disconto de 2 annos de 500$000 rs. acha-se assim

$$100 : 10 : 500\$000 : X = \frac{500000 \times 10}{100} = 50000 \text{ rs.}$$

e o disconto é de 50$000 rs. em vez de 45$454 rs., o valor presente da mesma quantia é de 450$000 rs. em vez de 454$545 rs. a differença é de 4$545 rs. em favor de quem disconta.

Outros calculos.

(51) A mesma regra de juros applica-se às commissões, as corretagens, aos seguros, e à compra e venda de acção.

1.º Commissão é um tanto por cento que se paga á um correspondente de casas de negocio para comprar ou vender generos que lhe são consignados.

2.º Corretagem é um tanto por cento que se paga á um corrector para ajudar os negociantes a acharem compradores e vendedores.

3.º Seguros é um tanto por cento que se dá á certas pessoas ou companhias, que promettem pagar as perdas de navios, mercadorias, etc. causadas por fogo, naufragios etc.

Exemplo 1. Qual a commissão de 500$000 Rs. á 3 1/2 p. %

$100 : 3\frac{1}{2} : : 500\$000 \quad : X = \frac{500000 \times 3\ 1/2}{100} = 5000 \times 3\frac{1}{2}$ $= 17\$500$ R.

Exemplo 2.° Qual a corretagem de 610$000 R. a $\frac{1}{4}$ p. 0/0

$100 : \frac{1}{4} : : 610\$000 : X = \frac{1}{4} = 6100 X \frac{1}{4} = 1525$ R.

Exemplo 3.° Qual o seguro de 874$000 R. a $12\frac{1}{2}$ p. 0/0

$100 : 12\frac{1}{2} : : 874000 : X = \frac{874000}{100} \times 12\frac{1}{2} = 8740 \times 12\frac{1}{2}$ $= 109\$250$ Rs. . . . .

Podiamos em vez de procurar a commissão, a corretagem e o seguro, procurar pelo contrario, a taxa, ou os capitaes, etc., mas como o calculo é o mesmo que para juos, nada mais diremos a este respeito.

4.° Acções, fundos publicos etc. Os fundos publicos são os titulos da divida publica de que o estado paga juros aos seus possuidores, quer ella tenha resultado de emprestimos por elle contrahidos, quer de rendas vendidas, quer emfim de acções de pagamentos, que se consolidaram em divida perpetua ou temporaria, com vencimento de juros. Estes titulos representam um capital nominal que é 100, e um juro tambem nominal, que é o que o estado paga ao seu possuidor nas epochas do seu vencimento. Um e outro são invariaveis. Ha porém outro capital real, que é o preço que dá a venda de um titulo posto em praça, e este é variavel segundo a maior ou menor fidelidade que o estado guarda no pagamento dos juros, e outras circunstancias.

Um juro de 5 p % pago pelo estado pode custar em praça, ou ao par, ou acima, ou abaixo do par, isto é, a 100, ou a mais, ou a menos de 100; e por aqui se vê que tambem é vario o juro real do capital real. As questões a este respeito são resolvidas pela regra de juros.

Exemplo 1.° Quanto devem custar 240$000 Rs. de renda do estado á 5 p % ao custo de 101?

5:240000::101: X=4:848$000 reis capital real.

Exemplo 2.° Que renda se poderá comprar de 5 p % com o capital real de 4 : 848$000 Rs. ao custo de 101?

101 : 4848000 : : 5 : X =240$000 Rs. renda.

Exemplo 3.° Tendo-se comprado por 4:848$000 Rs. a renda de 240$000 Rs. de 5 p % a como está o custo.

240000 : 4848000 : : 5:X=101 custo.

Exemplo 5.° Que juro real vence com o seu capital o que o emprega em rendas de 5 por 0/0 ao curso de 101?

$101 : 5 :: 100 : X = \frac{469}{101}$ por 0/0 Taxa real.

Exemplo 6.° Para que um capital real empregado em rendas de 5 0/0 possa render 6 0/0, qual importa que seja o custo?

$6 : 5 :: 100 :: X = 83\frac{1}{3}$

Quanto ás acções de banco, e das Companhias de Seguros, ou de quaesquer outras empresas ha tambem que notar n'elllas o capital nominal, que é fixo e invariavel, e o capital, que é o preço da acção posta em praça, o qual vale mais ou menos segundo são maiores ou menores os dividendos, isto é, os lucros que o banco ou Companhias tiram do manejo de seus capitaes, e reparte pelos accionistas nas epochas convencionadas. A unica questão importante a este respeito é a seguinte.

Qual é a taxa do juro real de uma acção comprada por 680$000 Rs., tendo sido o dividendo do semestre vencido 32$000 reis? Como queremos saber a taxa de um anno dobramos o dividendo

$$680000 : 64000 :: 100 : X = \frac{64000 \times 100}{680000} = 9\frac{1}{19}$$

ARTIGO 4.°

Comparação de pesos medidas e moedas.

(53) Como cada nação emprega pesos, medidas e moedas differentes, precisamos muitas vezes de, redusir esses pesos e medidas de um paiz, aos de um outro, e sobre tudo aos nossos.

Comparação de pesos e medidas.

(54) Para achar o valor dos pesos e medidas de uma nação em pesos e medidas de outra, é preciso saber em que razão está uma das unidades, de um paiz para outra da mesma especie do outro, para por ella tirar os valores de seus multiples e submultiplos respectivos. Não ha outro meio de chegar á este conhecimento, senão uma confrontação exacta dos padrões mais correctos das duas nações.

(55) O resultado desta confrontação pode ser enunciado de dous modos: 1.º dizendo o numero exacto de medidas segundo um systema, que corresponde á outro numero exacto das medidas relativas do outro systema, dizendo por exemplo, 10 varas portuguezas valem exactamenta 11 metros, e 5 varas valem 6 jardas (yards). 2.º Dizendo em numero inteiro ou fracionario, o valor de uma só unidade d'um systema na sua relativa do outro, como por exemplo: 1 vara é igual 1,1 metros, e a 1,2 jardas. Supposto este conhecimento facil é por meio de multiplicações e devisões, conforme cada systema, representar todas as unidades superiores e inferiores dos dous systemas umas nas outras. Como cada um d'estes dous modos de enunciar as razões entre unidades da mesma especie de differentes systemas, tem suas vantagens particulares, mostraremos como de um modo passamos para o outro. Da expressão 10 varas valem 11 metros podemos passar á expressão 1 vara vale 1,1 metros, do modo seguinte: $10^{v}=11$ metros; dividindo os dous termos desta igualdade por 10, temos $\frac{10}{10}=\frac{11}{10}$, $1^{v}=1,1$ metros.

Reciprocamente podemos passar da expressão $1^{v}=1,^{m}1$ para a $10^{v}=11,^{m}$ multiplicando os dous termos da primeica igualdade por 10, e então temos $10^{v}=11$ metros; multiplica-se por um numero que faça desapparecer a fracção do segundo termo. Exemplo $1^{v}=1,2$ jardas, multiplicando por 10, temos $10^{v}=12$ jardas, mas basta multiplicar por 5, e temos então $5^{v}=6$ jardas.

Uma vez tradusida uma unidade de um systema, na sua correspondente do outro, facil é achar o valor de qualquer numero de unidades de um systema em unidades do outro. Por exemplo, sabendo quanto vale a vara em metros facil é achar quantos metros valem 40 varas, $10^{v}: 11^{m} :: 40 : X = \frac{40\times11}{10}=4\times11=44$ metros, ou então 1 vara$=1,^{m}1$, logo 40 varas$=1,^{m}1\times40=44,^{m}$. Do mesmo modo podemos achar quanto valem 30 varas em jardas. Temos $5^{v}.: 6^{v}:: 30 : X=\frac{30\times6}{5}=6\times6=36$ jardas, ou $1^{v}=1,2$ jardas logo 30 varas$=1^{v}.\ 2\times30=36$ jardas.

Querendo saber 44 metros quantas varas são; temos a proporção seguinte: $11 : 10 :: 44 : X$

$=\frac{44\times10}{11}=\frac{440}{11}=10$ varas.

(56) Mostraremos agora como podemos redusir as medidas de um systema ás de outro, quando não sabemos directamente a razão entre os padrões dos dous systemas, mas sabemos a razão em que está um delles para o de outro, cujo padrão sabemos tradusir no outro.

Supponhamos que queremos redusir a jarda à varas, e que não sabemos em que razão estão estes padrões por confrontações exactas, mas que sabemos que a jarda é igual a $0^m,914383$. e a vara á $1,^m1$. Temos esta proporção.

$1.^m100000 : 0^m,914383 :: 1^v : 1^{jar}$

logo $1^{jard} = \frac{0,914383}{1,100000} = 0,8312572$ varas

Despresando as decimaes a jarda está para a vara como $9 : 11$, e a jarda é igual á $\frac{9}{11}$ de vara, e a vara à $\frac{11}{9}$ de jardas, ou a 1, 22. Como $1,^m1 \times 5 = 5,^m5$ e $0,^m914383 \times 6 = 5,^m488292$, podemos dizer que 5 varas são iguaes a 6 jardrs, a differença sendo de 0,011708, pouco mais de $\frac{1}{100}$ de metro, ou de $\frac{1}{110}$ de vara que vem a ser pouco mais de 4 linhas. Por tanto, 1 jarda é igual a $\frac{5}{6}$ de vara, e 1 vara a $\frac{6}{5}$ de jarda.

(57) Apresentaremos aqui a reducção de algumas medidas mais importantes em medidas portuguezas, e em medidas metricas.

1.º Medidas circulares. A circumferencia do circulo tendo 360 gráos, e o quadrante 90, no systema sexagessional, e no systema decimal cada quadrante tendo 100 gráos, e a circumferencia 400 gráos. Segue-se que

$100^{g.de} = 90^{g.sex}$. e 1 gráo cente $= \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ do grào sexages

1 gráo sexo. $= \frac{100}{90} = \frac{10}{9}$ do gráo cente.

Por uma simples multiplicação redusimos um numero dado de gràos de um systema ao outro. Por exemplo 30 sex. são iguaes $30 \times \frac{10}{9} = 33,33$ gráos cent., e 50 gràos cent. à $50 \times \frac{9}{10} =$, 45 gráos sexagessimaes.

2. Medidas de extensão. O quadrante terrestre tem 5130740 toesas francezas, esta determinação foi feita com

toda a exactidão por meio de medições geodesicas; este mesmo quadrante tem por convenção 10 000000 metros, ou por outra dà-se o nome de metro a $\frac{1}{10000000}$ de um quadrante terrestre. Por tanto

$$10000000^{m} = 5130740.^{t}$$
$$1^{m} = \frac{5130740}{10000000} = 6,^{t}513074$$
$$1^{t} = \frac{10000000}{5130740} = 1,^{m}9490365$$

Conhecido o valor da toesa em metros, e do metro em toesas, podemos redusir todas as unidades das antigas medidas francezas as metricas, e reciprocamente.

Um quadrante terrestre tem 10000000^{m} ou 10000 kilometros, um grao tem por consequencia $\frac{10000}{90} = \frac{1000}{9} =$ $111,^{kelo}1111$. A legóa maritima è igual a $\frac{1}{20}$ de gráo, tem pois $\frac{1000}{9}{}^{k} \times \frac{1}{20} = \frac{1000}{180} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9} = 5,^{k}555$. Sabemos por medições exactas que a legua maritima de 20 ao grào tem 50 $50\frac{1}{2}$ varas. Por tanto

$$5,^{k}5555 = 50\ 50,^{v}5$$
$$1\ \text{Vara} = \frac{5,^{k}5555}{5050,5} = 0,^{k}0011 = 1,^{m}1$$
$$1\ \text{Metro} = \frac{5050,^{v}5}{5,5555} = 0,909090$$

O valor da vara e $\frac{11}{10}$ do metro, e do metro $\frac{10}{11}$, de vara, sabendo o valor da vara em metro, e do metro em varas, podemos redusir todas as medidas portuguezas às metricas e reciprocamente.

As medidas inglezas tiram o seu padrão da pendula, o comprimento da pendula que dà uma vibração n'um segundo na latitude de Londres, e de 39^{pol}. 13908.

Para redusir as pollegadas inglezas à medida metrica, é preciso comparar este comprimento da pendula em pollegadas com o mesmo comprimento em millimetros, a pendula que da uma vibração n'um segundo na latitude do Londres tem $994,^{mm}1232$ de comprimento. Por tanto

$39.13908 : 994^{mm}1232 : : 1^{pol}. X^{mm} = \frac{994,1232}{39.13908} = 0,^{m}0254.$

Conhecido o valor da pollegada ingleza em millimetros todas as mais medidas inglezas podem ser redusidas à medidas metricas.

Bastam estas confrontações para mostrar como ellas se fazem.

Comparação de moedas.

(58) Na comparação das moedas temos que considerar o valor ao par, e o valor cambial que depende de circumstancias variaveis e complicadas.

Avaliação das moedas ao par.

(59) Para representar o valor das moedas de um paiz nos de um outro, devemos conhecer; 1.º o toque do metal; 2.º o pezo da peça ou da moeda; 3.º o valor intrinseco da unidade monetaria. As duas primeiras cousas sabemos pela lei do paiz, ou por meio de ensaios. A terceira é o quanto de metal puro, ou de certo toque contém a dita unidade monetaria se é uma moeda real, ou que lhe corresponde se imaginaria.

(60) Chama-se moeda real a que existe realmente em ouro ou prata como o franco na França, chama-se cambial ou imaginaria a que se nomea no curso dos cambios, e nas contas de dinheiro como o real entre nós. Em muitos paizes a moeda cambial é ao mesmo tempo real, como o franco, e a libra esterlina.

(61) O par intrinseco das moedas é uma tal quantidade da moeda de um paiz quer real quer imaginària que intrinsecamente corresponde á uma certa quantidade da moeda de um outro paiz. Em Portugal o marco de ouro de 22 quilates redusido à moeda tem o valor de 120$000 rs., mas o ouro em barra ou em moeda estrangeira tem o valor de 115$200 rs. ao marco de 22 quilates, isto é de 1$800 réis cada oitava. Repartindo o valor do marco por 22, cada quilate vem à ter o valor de $5\#236\frac{4}{11}$, e por tanto o marco de 24 quilates vale $125\#672\frac{8}{11}$, e a oitava do mesmo quilate 1$963, 60 rs. Por tanto:

As moedas de 4 oitavas valem . . . . . . 7\$500 Rs.
As de 2 oitavas » . . . . 3\$450 Rs.
As de 2 2/3 chamadas coroa de ouro. 5\$000 Rs.
As de 1 1/3 chamadas meias coroas . 2\$500 Rs.

As moedas estrangeiras são avaliadas a Rs. 1\$963.60, cada oitava de ouro puro.

O valor de um marco de prata de 11 dinheiros é de 6\$000 réis, por tanto, cada dinheiro em um marco vale $545\frac{5}{11}$, e o marco de 12 dinheiros vale $6\$545\frac{5}{11}$, e a oitava Rs. 102\$027.

O marco de 10 dinheiros e 6 grãos, deveria valer $5\$590\frac{10}{11}$, para evitar quebrados considera-se como valendo 5\$600 Rs.

A prata redusida á moeda de 11 dinheiros é avaliada na razão de 7\$550 Rs. o marco, e então a prata pura amoedada tem o valor de 8\$444, 54 Rs. o marco, e de 132\$000 2 Rs. a oitava. As moedas de 8 oitavas 19s 58 chamadas coroas, valem 1\$000 Rs., as meias coroas, de metade do peso, valem 500 Rs.

Querendo saber quanto vale uma peça de moeda de ouro, cujo toque é de 21 quilates e o peso de 4 oitavas. Temos as proporções seguintes.

$$\begin{array}{l} 22 : 21 :: 1\$800 : x \\ 1^{a}. \quad 4 :: \quad x : z \\ \hline 22 :: 21\times4 :: 1800\times x : z\times x \end{array}$$

$$z=\frac{21\times4\times1800}{22}=6\$872\frac{8}{11}$$

Multiplicamos o preço da oitava d ouro dé 22 quilates pelo producto do toque pelo pezo, e dividimos por 22. Se o quilate for o mesmo basta multiplicar o preço da oitava pelo peso, e se o peso for uma oitava basta multiplicar pelo toque e dividir por 22.

Para facilitar os calculos é melhor redusir o toque a decimaes, e referir-se ao preço do ouro puro. No exemplo acima temos—

$24 : 21 :: 1 : x = \frac{21}{24} = 0,875$. e então entende-se que em 1 parte do metal ha 0,875 partes de ouro puro, e 0,125 de liga, e tomando o preço do ouro puro que é em moeda portugueza de 1$963, 60. Temos para resolver a mesma questão estas outras proporções

$$1 : 0{,}875 :: 1965,\ 65 : x$$
$$1^{oit}: \quad 4^{a}:. \qquad x : z$$

$$1^{o}: 0{,}875 \times 4 :: 1963{,}65 \times x : x \times z —$$
$$z = \frac{0,\ 875 \times 4 \times 1963.65}{1} = 6\$872{,}705$$

Multiplicamos o preço da oitava de ouro puro pelo producto do toque da peça pelo seu peso.

As moedas de prata são avaliadas do mesmo modo.

(62) Podemos sempre achar o valor de uma moeda qualquer no das de uma outra, uma vez conhecido o valor de ouro puro n'estas ultimas, pela operação que acabamos de mostrar. Nas operações de trocos de dinheiro, quasi sempre as sommas são representadas em dinheiros, e para que possam ser feitos sem perda, é preciso conhecer as relações dos valores entre as diversas moedas, e as bases dos diversos systemas monetarios; porque, apesar de que esses trocos se façam pelo cambio, que varia em consequencia de causas commerciaes, tem este um regulador no par intrinseco das diversas moedas, e nas despesas que podem ser precisas para transportal-as.

O par das moedas se deduz da comparação da quantidade de ouro fino que contém uma peça de moeda com a que contém uma outra. As moedas que tem uma mesma quantidade de ouro fino tem o mesmo valor ao par. O mesmo se applica às moedas de prata. Por exemplo, para comparar o valor da libra esterlina com o da moeda de 20 francos, temos os seguintes dados: a libra tem de peso 7.980855 grammas, e é do toque de 0,917; a peça de 20 francos pesa 6,45161 grammas, e é do toque de 0,900. Devemos primeiro calcular o peso de ouro puro de cada uma d'estas moedas

$1{:}0{,}917{:}\,{:}7{,}980555{:}\ X = 7980355 \times 0{,}917 = 7,$ gr. 518444 peso de ouro puro.

$1{:}\ 0{,}900 :: 6{,}45161 : X = 6{,}45161 \times 0{,}900 = 5{,}80449$, peso de ouro puro da moeda de 20 francos. Por tanto

$$5.804490{:}\ 7{,}518444{::}20{:}X = \frac{7{,}518444 \times 20}{5{,}804490} = 25{,}2079$$

logo uma libra esterlina vale 25^{f}, 2079 em moeda de ouro de França.

O shilling pesa 5,656 grammas ao titulo de 0,925, portanto contem 5,gr. 226 de prata pura, o franco ao titulo da 0,900, pesa 5 grammas, e portanto tem 4,g,5 de prata pura. Podemos achar o valor do shilling em francos pela seguinte proporção 4,5: 5,256 : : 1:X$=\frac{5,226}{4,5}=1^{f}16$: devemos

notar que, $1^{f}16$ não é a vigesima parte de $25^{f},2070$, pois $1.16\times20=23,^{f}20$ e entretanto uma libra contém 20 shillings conforme as leis inglezas, esta differença provém de que o troco legal do ouro contra a prata não está na mesma relação em França e em Inglaterra, no primeiro paiz o ouro està para a prata como 15.5 : 1. no segundo como 14,28 : 1. e cada paiz estabelece a este respeito uma proporção differente, por exemplo na Belgica estão os dous metaes na proporção de 15,79 : 1, na Hespanha de 15,75:1, em Portugal de 15,48 : 1 na Prussia 15,69 : 1; na Russia de 15 : 1 etc. no Brasil de 15,62 : 1.

As moedas tem um titulo legal e um titulo real pelo qual são trocadas no commercio de especies. Este titulo commercial é fundado sobre a differença entre o titulo real e a fabricação, porque por mais exacto e cuidadoso que seja o fabricante, não pode jamais attingir na liga e no peso, a exactidão mathematica do titulo legal. Em toda parte a lei prevê estas incorrecções, e limita esta variação debaixo do nome de remedio ou tolerancia. Quando as moedas estão em circulação deve-se ter em consideração este remedio ou tolerancia, que estabelece o titulo commercial, pelo qual são trocadas como mercadoria. Existem obras especiaes, nas quaes se acham os titulos, os pesos, os remedios etc. das moedas de todos os paizes.

Os cambistas e os banqueiros devem consultal-as, aqui não devemos entrar nestas particularidades.

(63) No Brasil o valor do ouro amoedado do toque de 0, 917 é de 4$000 Rs. a oitava, e por tanto o ouro puro amoedado vale Rs. 4$362,05, a oitava. A prata amoedada do toque de 0,917 vale 256 Rs. a oitava, e por tanto a prata pura amoedada vale 279,17 Reis a oitava. Com estes dados podemos avaliar ao par as moedas de qualquer outro paiz em moedas brasileiras, conhecendo o toque, e o peso. Por exemplo, a libra esterlina tem o toque 0,917 e pesa 2 oit. 2259. O seu valor em moeda brasileira acha-se pela seguinte proporção.

1 oit.: 2 oit. 2259 :: 4000^{r}: x=2,2259×4000= 8,908 reis, e como a libra tem 240 pence, 1:000 reis valem 26, 9 pence.

O franco pesa 1 oit. 3946, e tem o toque de 0,900, logo pesa 1.^{o} 255 de prata pura, e como a oitava de prata pura vale 279, 17, o franco vale 1255×279, 17=350 reis. e 1$000 vale 2,f56. A regra é, primeiro determinar o peso das moedas em ouro ou em prata pura, o que se faz multiplicando o pezo pelo toque; depois multiplicar o peso do ouro, ou prata pura, que contém a moeda pelo valor da oitava de ouro, ou de prata pura em moeda brasileira. Daremos mais alguns exemplos, 6 florins de Hollanda pesam 3 oit.0028, o toque é de 0,893, por tanto o seu peso de prata pura é de 3 oit., 0028×0,893=2. oit. 6815, o valor da moeda em rèis é pois de 2,6815×279,16=728 réis. O Dollar dos Estados-Unidos pesa 7,^{oit}.5307, e o seu toque é de 0,903, por tanto tem de prata pura 7,^{oit}5307×0,933 =6,^{oit}800, e o valor do dollar é de 6,8002×279,17= 14997 Rs. O peso hespanhol pesa 7.^{o}5435, e tem o toque de 0,903, por tanto tem de prata pura 75433×0,903= 6,^{oit}8115, e o seu valor é de 6,8115×279,17=1$901 rs.

Regra de Cambio.

(64) Por cambio no commercio entende-se troca de moedas effectivas umas pelas outras, e mais particularmente em termos de banco, a troca de dinheiro de uma cidade ou reino pelo de outra cidade ou reino, mediante certo preço. Este preço varia a cada momento, em consequencia de varias circunstancias.

(65) O cambio miudo, de uma moeda por outra, de ouro por prata, ou papel, ou o contrario regula-se à um tanto por cento; por exemplo, para trocar 100$000 rs. em ouro dando papel, estando o cambio à 1 p.^{o}/$_{o}$ temos de dar 101$000 rs. em papel, este premio não é senão uma commissão que se paga ao cambista pelo seu trabalho, e calcula-se pela regra de juros simples.

(66) Quanto ao cambio de banco, que se faz por meio de letras existem duas especies, porque; 1.^{o} ou elle se dá entre praças em que gira a mesma moeda, como acontece no cambio interior, ou entre cidades da mesma nação, ou ainda entre nações que tem moedas suas particulares, mas que empregam o mesmo systema monetario, ou as mes-

mas denominações, como acontece entre o Brasil e Portugal: 2.º ou elle se dá entre praças em que giram moedas differentes, como acontece quase sempre no cambio exterior, ou entre praças de differentes nações.

(67) No primeiro caso o regulamento do cambio é a tanto p. %, e se diz à favor ou contra uma das praças, ou ao par, segundo as circunstancias do debito ou credito das ditas praças, as difficuldades e riscos de transporte do dinheiro em especie etc., e isto è o que faz o que se chama curso do cambio. As operações arithmeticas neste caso são fundamentalmente as mesmas que as da regra de juros simples. Por exemplo; supponhamos que um negociante em Lisboa tem de pagar no Porto a quantia de 500$000 rs., e que o cambio entre estas duas praças é de 2 p. % contra Lisboa, quanto deverá custar uma letra de cambio para este fim? Temos esta proporção $100 : 102 :: 500000$ Rs. : $X = \frac{500000 \times 102}{100} = 510\$000$ Rs. multiplica-se o valor da letra por 100 augmentado do cambio, e divide se por cem.

(68) A moeda do Brasil ainda que tenha a mesma denominação que a de Portugal tem menos valor, isto é, o real que é a unidade monetaria dos dous paizes, têm em cada um d'elles um valor differente, muito menor no Brasil que em Portugal, em Portugal um real representando uma quantidade de prata maior do que o real representa no Brasil. Por esta razão damos mais no Brasil para receber menos em Portugal, damos 210, 205, 200, 190, 185, etc. rs. conforme o cambio para receber em Portugal 100 réis, isto é o cambio entre estes dous paizes regula à 110, 105, 100 etc. p. % contra o Brasil. Para comprar uma letra de Lisboa ou saccar etc. devemos fazer uso da regra de juros simples para calcular o cambio —Por exemplo seja proposto pagar em Lisboa a quantia de 2:000$000 Rs., quanto devemos dar na Bahia supponde o cambio a 100 p%?

$100 : 200 : 2{:}000000 : X = \frac{2000000 \times 200}{100} = 4\$000\$000$ Rs.

Se pelo contrario temos na Bahia a quantia de 4:000$000 rs. e desejamos remettel-a para Lisboa estando o cambio a 100 p. % que somma teremos lá?

$200 : 100 : 4{:}000\$000 : X = \frac{4000000}{2} = 2{:}000\$000$ rs.

(69) No segundo caso, quando as moedas são differentes, o curso do cambio è regulado de outro modo.

Consiste este em que uma das praças, por costume estabelecido, dà constantemente um numero certo de unidades determinadas de sua moeda cambial, para receber da outra praça um numero incerto de unidades determinadas da sua respectiva moeda: e este numero incerto de uma das praças comparado com o certo da outra praça, é que mostra se o cambio é a favor, contra, ou ao par, tendo em consideração o valor intrinseco das moedas determinado pela regra. (59)

O cambio entre duas praças pode estar acima ou abaixo do par. Quando está àcima do par a praça que dà o incerto perde, porque pago por mais do seu verdadeiro valor as moedas que compra da outra nação, ou praça que dà o certo, a qual por este mesmo motivo ganha. Por exemplo nos cambios entre o Brasil e a França, esta segunda dá o certo. Sabemos (63) que ao par o franco vale 350 rèis, estando o cambio acima do par, por 400 rèis ao franco, è evidente que para cada franco que queremos comprar, tendo de dar 400$ R. em lugar de 350$ R. perdemos 50, e que pelo contrario as praças francezas ganham esta mesma quantia por franco. Pelo contrario quando o cambio está à baixo do par, a praça que dà o incerto è que ganha, porque compra por menos de seu valor real a mesma quantia fixa de moedas, da outra praça que dá o certo, a qual perde.

Por exemplo nos cambios entre o Brasil e a Inglaterra, esta ultima dà o incerto, ao par (63) 1$000 R. de nossa moeda valem 26,9 Pence, quando o cambio está a 22 por exemplo, as praças inglezas dão 22 pence por cada 1$000 R em lugar de 26,9. e ganham 4,9 pence em cada mil reis. Segue-se, pois, que para a praça que remette dando o certo ou sacca dando o incerto, o cambio o mais alto e o mais vantajoso; e pelo contrario para a praça que remette dando o incerto, ou sacca dando o certo, o cambio mais baixo e o mais vantajoso.—Não podemos calcular os cambios, isto é achar qualquer quantia saccada ou remettida por uma praça para outra de moeda differente sem conhecer: 1.º as moedas de cambio, e effectivas das praças: 2.º o curso do cambio entre as mesmas na occasião da transacção que pede o calculo. O primeiro destes conhecimentos é fixo e constante, pois só pode soffrer variação havendo alteração no systema monetario, o que é raro; e deve ser adquirido por meio de uma taboa de moedas de todos os paizes. O segundo, porém, só pode adquirir-se na occasião da transaeção consultando o bolletim da praça, salvo quando o mesmo cambio é determinado por contracto especial. Uma vez conhecido o valor de uma das unidades monetarias de um paiz nas de um outro, facil é por simples divisões e multiplicações determinar o de todas as suas moedas. Como as moedas são contadas em quase todos os paizes por numeros complexos, são estes calculos tanto mais difficeis e embaraçados quanto mais o são as operações de complexos, sobre os de numeros inteiros ou decimais; por isso são muito uteis para a pratica todos os meios de reduzir os calculos das moedas á operações decimaes.

(70) A arithmetica dos cambios apresenta-se ao principiante com um aspecto mysterioso, e por tanto na realidade é muito facil A pratica dos cambios porém não pode ser adquerida sem algum trabalho, porque exige muitos conhecimentos especiaes, é preciso saber os nomes das moedas, e de suas subdivisões, o par intrinseco das moedas das principaes praças cambistas, lembrar exactamente o certo subtendido nos bolletins que apparecem nas praças dando o curso do cambio, e finalmente como as diversas praças trocam entre si, mas estes conhecimentos nada tem com a arithmetica. O progresso do commercio tem simplificado ultimamente muito as operações de cambios, concentrando todas as operações d'esta especie nas praças de Londres, Paris, Hamburgo, Amsterdam, Liorne, Vienna, S. Petersburgo, adoptando as divisões decimaes até para as moedas que seguem outro systema de divisão, e finalmente fazendo os calculos sobre as moedas reaes desprezando as antigas moedas de cambio.

Podemos agora dar alguns exemplos do calculo de cambios. Na praça da Bahia, por exemplo, o bolletim dos cambios é o seguinte:

Bahia dá o certo.
Londres=1000=27 pence.
Bahia dà o incerto.
França—1 franco=360 rèis.
Hamburgo=marco de B=660 rèis.

1.° Ex. Seja proposto calcular em quanto importa uma letra sobre Londres de 650 libras, ao câmbio acima. A letra sendo de 650^l contém $650\times20=13000$, shillings, cada shilling tendo 12 pence, 13000^s contém $13000\times12=156000$ pence, como damos 1$000 R. por cada 27 pence, para achar em quanto importa a letra, devemos dividir 156000 por 27. Por tanto $\frac{156000}{27}=5:777777\frac{21}{27}$

2.° Seja proposto determinar quantas libras esterlinas me podem dar 9,600$000 R. ao cambio de 28. Assim temos 1000^{r}: 28^{pen} : : 9600000 R: X^{pen}=
$\frac{9.600000 \times 28}{1000}=268,800$ pence, estes podem ser redusidos a libras, dividindo primeiro por 12, e depois o quociente por 20 $\frac{2688000}{12}=22400$ shillings $\frac{22400}{20}=1120$ libras.

Por tanto importam os 9.600$000 R. em 1,120 libras esterlinas. Podemos verificar este resultado procurando o valor da libra ao cambio de 28, e multiplicando por 1120 para ver se dá o mesmo numero 9.600$000 R. : a libra tendo 240 pence, a libra ao cambio de 28 deve valer tantos mil réis quantas vezes 28 é contido em 240 : assim uma libra é igual a $\frac{240}{28}=8\$571\frac{12}{28}=8\$571\frac{3}{7}$ réis, e esta quantia multiplicada por 1120 dá 9:600$000 R.

Ex. 3.° Em quanto importam 6000 francos ao cambio de 360 réis o franco?

Como cada franco vale 360 réis basta multiplicar 6000 por 360, e temos $6000\times360=2:160\$000$ R.

Ex. 4.° 20:000$000 réis quantos francos dá ao cambio 350? Basta dividir 20.000000 R por 350 e temos $\frac{20000000}{350}=57145\frac{25}{35}$ francos.

Todos os calculos relativos á cambios reduzem-se á avaliar a moeda do paiz em que se está em moeda de um outro paiz sobre o qual se tem, ou sobre o qual se quer adquirir uma letra. Estes calculos fazem-se por meio de multiplicações e divisões, quando os systemas monetarios não seguem a divisão decimal como entre nós, e na França etc. os calculos apresentam algumas difficuldades, e por isso daremos mais alguns exemplos.

Ex. 5.° Seja proposto redusir 4000 francos á moeda ingleza pelo cambio de 25,05 por libra esterlina. O numero 25,05 exprime a libra em numero da mesma especie que 4000, mas com duas decimaes, é pois preciso ajuntar duas cifras á direita de 4000, para redusir os dous numeros a mesma unidade;—e então dividindo 400000 por 2505 o quociente será o numero de libras esterlinas.

$$\begin{array}{r|l} 400000 & 25,05 \\ \cline{2-2} 14950 & 159 \\ \hline 24250 & \\ \hline 1705 & \end{array}$$

achamos 159 libras, e um resto 17,05 céntimos que devemos redusir á shillings. Como o shilling é $\frac{1}{20}$ de libra, é preciso dividir 25,05 por 20, e ver quantas vezes este quociente é contido em 1705, ou o que vem a ser o mesmo multiplicar 1705 por 20, e dividir o producto por 25,05

$$1705\times20=34100, \quad e \quad \begin{array}{r|l} 34100 & 25.05 \\ \cline{2-2} 9050 & 13^{s}. \\ 1535 & \end{array}$$

Temos no quociente 13 shilling e um resto 1535 que exprime vigesimos de centimos, este resto se reduz a pence, multiplicando por 12, e dividindo o producto por 25,05 e temos

$$1535\times12=18420, \quad e \quad \begin{array}{r|l} 18420 & 25.05 \\ \cline{2-2} 885 & 7 \end{array}$$

7 pence, e um resto 885, e temos então 4000 francos= $25^{l}.\ 13^{s}.\ 7^{d}.\ \frac{885}{2505}$

Ex. 6.° Seja proposto redusir $159.^{l}\ 13,^{s}\ 7^{d}$ a francos, pelo cambio de 25,05 a libra.

Procedemos por uma regra de tres.

$$1 : 25,05 :: 159.\ X=159\times25,05=398^{f},95$$

resta-nos avaliar as $13,^{s}\ 7^{d}$; o shilling é $\frac{1}{20}$ da libra. por tanto

$$20 : 25,05 :: 13 : X=\frac{25,05\times13}{20}=16\ f.\ 28.$$

Do mesmo modo para redusir os pence em moeda franceza temos

$$240 : 25,05 : : 7 : X = \frac{25,05 \times 7}{240} = 0,73$$

juntando temos 398,95
16,28
0 73

159 13 7ᵈ = 3999f 96

Poderiamos proceder de outro modo redusindo a quantia 159,ˡ13ˢ.7ᵈ a pence então temos

$$(159 \times 20 \times 12) + (13 \times 12) + 7 = 38323$$
$$240 : 25\ 05 : : 38323 : X$$
$$X = \frac{25,05 \times 38323}{240} = 5999\ f.\ 96.$$

Ex. 7.° Seja proposto redusir $96^{l}.6^{s}.11^{d}$ a florins etc. sendo o cambio de $10,^{f}88$ por libra esterlina. Em moeda hollandeza 1 florim=20 stivers, 1 stiver=2 groots, e 1 groot=8 pennings.

Redusindo as libras esterlinas a pence temos:

$$(96 \times 20 \times 12) + (6 \times 12) + 11 = 3923 \text{ pence}$$

por tanto $240 : 10,88 :: 3923 : X$

$$X = \frac{10,88 \times 3923}{240} = 136,^{fl}\ 176.,$$

a fracção $0,^{fl}176$ pode ser redusida a stivers multiplicando por 20, e temos $3,^{est}520$, esta fracção é redusida a groots multiplicando por 2, e temos $1.^{gr}040$, e esta ultima a penning multiplicando por 8, e temos $0,^{pen}320$, por tanto

$$96^{l}.\ 6,^{s}\ 11^{d} = 136,^{fl}\ 3^{est}\ 1\ ^{gro},\ 0,^{pen}320$$

Arbitração de cambio.

(71) Esta operação é um modo indirecto de calcular o valor das moedas de um paiz em moedas de um outro. Por esta regra podemos achar o curso do cambio entre duas praças que estejam em proporção com as determinadas entre cada uma dellas e uma terceira. Todas as questões desta natureza resolvem-se pela regra de tres composta.

1.° Seja proposto avaliar 3000 marcos de Hamburgo em francos, sabendo que o cambio entre Hamburgo e Amsterdam e de 35 1/4 florins por 40 marcos, e o cambio de

Amsterdam com Paris de 56 1/4 florins por 129 francos. Temos as seguintes proporções:

$$\begin{array}{l} 40^{m}: 35\ 1/4\ ^{fl} :: 3000 : X \text{ florins} \\ 56^{fl}\ 1/4 : 120\ f. \quad : X^{fl} \quad : Z \text{ francos} \\ \hline 40 \times 56\ 1/4 : 35\ 1/4 \times 120 \quad : \quad 3000 \times \ X : X \times Z \end{array}$$

$$Z = \frac{35\ 1/4 \times 120 \times 3000}{40 \times 56\ 1/4} = 5640 \text{ francos.}$$

Neste exemplo a avaliação do cambio indirecto é muito facil porque as duas moedas franceza e hollandeza tem uma medida commum o marco. Se não tivesse os calculos seriam mais complicados.

2.° Seja proposto trocar em Londres um saque de 6000 rublos, estando o cambio entre Londres e Paris á 25, f 25, e entre Londres e S. Petersburgo a 38 1/4 pence por rublo.

$$\begin{array}{l} 1 : 38\ 1/4 : : 6000 : Y \text{ pence} \\ 240^{p}: \qquad 1^{l} : : \quad Y^{pe} : Z \text{ libras} \\ 1^{l} : 25.25 : : \qquad Z^{l} : X \text{ francos} \\ \hline 1 \times 240 \times 1 : 38\ 1/4 \times 1 \times 25,25 : : 6000 X Y X Z : Y X Z \times X \end{array}$$

$$X = \frac{38\ 1/4 X 25,\ 25 X 6000}{240} = 24145 \text{ f. } 31$$

Escreve-se a operação assim :

$$\begin{array}{l} 1 : 38\ 1/4 \text{ pence} \\ 240^{p}: \ 1 \text{ libra esterlina} \\ 1^{l}: 25,\ 25 \text{ franco} \\ :: 6000 : X. \end{array}$$

FIM.

TABOA DE MATERIAS.

ELEMENTOS DE ARITHMETICA.

PARTE I.

DA FORMAÇÃO DOS NUMEROS.

PARTE II.

COMPARAÇÃO DOS NUMEROS.

APPENDICE.

APPLICAÇÕES DA ARITHMETICA AO COMMERCIO.

NOTA.

Não vem no fim deste Compendio a taboa de logarithmos promettida na pag. 223, porque, em consequencia de difficuldades typographicas, não pôde ser impressa.

ERRATAS.

Paginas	*Linhas*	*Erros*	*Emendas.*
III	24	exforcos	esforços
XI	10	adoptalo	adapta-lo
»	13	cousas	causas
XII	20	elleptico	elliptico
21	2	numeros	numero
38	4	este	estes
43	29	factos	factores
45	29	sultraçao	subtracção
56	32	34	24
58	6 de baixo	exforços	esforços
65	5	1×5	$1+5$
81	10	primeiros	primos
	12	»	»
	16	»	»
	22	»	»
	24	»	»
86	28	1	-1
90	6	-6	-5
97	9	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
101	11 e seguinte	primeiros	primos
126	16 »	»	»
143	9	29.41035	92,41035
157	4 contando de baixo	2×2	2
158	41	$2\times(2\times4+2^2)$	$2\times2\times4+2^2$
158	30	5	4
159	15	$(5-3)^2$	$(5-2)^2$

Paginas	*Linhas*	*Erros*	*Emendas.*
159	penultima	$(0,5)^2$	$(0.5)^3$
183	7	213359449	273359449
»	11	273350	273359
184	10 contando de baixo	diminuir de 1 algarismo	diminuir de 1 o ultimo algarismo
186	7 contando de baixo	1.00	0,01
190	11 de baixo	7:2:1:6	7:2::11.6
212	2	$\sqrt{81}$	$\sqrt[4]{81}$
219 e 220	7 de baixo	1×0	$1+0$
	Nas linhas seguintes no calculo dcs meios arithmeticos, é preciso pôr o signal mais, em lugar do de multiplicação		
258	17	51	31
161	28	7» $8\frac{1}{2}$ 6» 3, 4.°	6, 3,ª 4ª 7. $8\frac{1}{2}$
269	9	$x=20\times30=600$,	$x=\frac{20\times30}{32}=\frac{600}{32}$
278	6	$10^s\,\frac{1}{2}\,1$ $5\,\frac{1}{2}\,^d10$ $2\,\frac{1}{5}\,^d10$ $6^d\,\frac{1}{4}\,^d\,2^s$ $3\frac{1}{2}\,^d\,6^o$ $1\frac{1}{3}\,^d\,3^d$	$10^s=\frac{1}{2}\,1$ $5^s=\frac{1}{2}$ de 10^s $2^s=\frac{1}{5}$ de 10^s $6^d=\frac{1}{4}$ de 2^s $3^d=\frac{1}{2}$ de 6^d $1^d=\frac{1}{3}$ de 3^d
281	8 de baixo no denominador decomposto da fracção ha um 3 de mais		
288	13 de baixo	7 litros	7 litrões
298	18 de baixo	$6\times x$	$6+x$
298	5 »	$18\times6\times108$	$18\times6=108$
299	4	$162+18=179$	$=180$
	5	$\frac{179}{9}=20$	$\frac{180}{9}=20$

Bahia: Typografia de Epiphanio Pedroza—1859.